4. Übungsblatt

Algebraische Topologie

im WS 2014/2015 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 20.11.14 vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Aufgabe 1

Zeigen Sie: für alle $n \geq 1$ macht die Hintereinanderausführung von punktierten Abbildungen von S^n nach S^n die Gruppe $\pi_n(S^n)$ zu einem Ring isomorph zu $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 2

Beweisen Sie die folgenden Aussagen für alle $n \geq 1$.

(a) Betrachte $D^n \subset \mathbb{R}^n$. Es sei $f\colon D^n \to \mathbb{R}^n$ mit $S^{n-1} \subset f^{-1}(S^{n-1})$ und $\deg f|_{\partial D^n} \neq 0$ gegeben, dann gilt $D^n \subset \operatorname{im}(f)$.

(b) Es seien $f_1, \ldots, f_n\colon I^n \to \mathbb{R}$ gegeben, so dass $f_i(x) < 0$ falls $x_i = 0$ und $f_i(x) > 0$ falls $x_i = 1$ für alle $i = 1, \ldots, n$ und alle $x \in I^k$. Dann existiert ein $x_0 \in I^k$ mit $f_1(x_0) = \cdots = f_n(x_0) = 0$.

Aufgabe 3

Zeigen Sie: für einen Punkt x in einer Mannigfaltigkeit M mit Rand gibt es genau zwei Möglichkeiten.

(a) Für jede offene Umgebung $U \subset M$ von x und jeden Homöomorphismus $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$ gilt $\varphi(x) \in \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty)$, oder

(b) Es gibt keine offene Umgebung von x in M, die zu $\mathbb{R}^n$ homöomorph ist, und für jede offene Umgebung $U \subset M$ von x und jeden Homöomorphismus $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$ gilt $\varphi(x) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$.

Aufgabe 4

Wir bezeichnen mit $kw\mathcal{H} \subset w\mathcal{H} \subset \mathcal{T}op$ die vollen Unterkategorien der kompakt erzeugten schwachen Hausdorff-Räume und der schwachen Hausdorff-Räume; Morphismen seien also alle stetigen Abbildungen zwischen den jeweiligen Objekten. Zeigen Sie:

(a) Der Funktor $k\colon w\mathcal{H} \to kw\mathcal{H}$ ist rechtsadjungiert zum Inklusionsfunktor $i\colon kw\mathcal{H} \to w\mathcal{H}$, das heißt, für alle $X \in kw\mathcal{H}$, $Y \in w\mathcal{H}$ gibt es eine natürliche Bijektion

$$\hom_{kwH}(X, kY) = \hom_{wH}(iX, Y)\ .$$

(b) Es sei $X \in kw\mathcal{H}$ und $A \subset X$ eine Teilmenge. Dann hat kA die charakteristische Eigenschaft eines Unterraums in der Kategorie $kw\mathcal{H}$ aus Satz 1.43.

(c) Es sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie von Räumen in $kw\mathcal{H}$, dann hat $k \prod_{i \in I} X_i$ die universelle Eigenschaft eines Produkts in der Kategorie $kw\mathcal{H}$ aus Satz 1.46.