5. Übungsblatt

Algebraische Topologie

im WS 2014/2015 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe: 27.11.14 vor der Vorlesung *Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihr Blatt*

Aufgabe 1

Handelt es sich bei den Paaren

$$(X, A) = \big(\{a, b\}, \{a\}\big) , \tag{1}$$

$$(Y, B) = \big(\{\tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \cup \{0\}, \{0\}\big) \tag{2}$$

um Kofaserungen, wobei X die Klumpentopologie aus Beispiel 1.12(2) und $Y \subset \mathbb{R}$ die Unterraumtopologie trage?

Aufgabe 2

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Es seien $A \subset B \subset X$ abgeschlossene Teilmengen. Wenn (B, A) und (X, B) Kofaserungen sind, dann ist auch (X, A) Kofaserung.

(b) Es sei (X, A) Kofaserung und Y beliebig, dann ist auch $(X \times Y, A \times Y)$ Kofaserung.

Aufgabe 3

Sei (X, A) eine abgeschlossene Kofaserung, sei $f \colon A \to B$ stetig, dann bezeichne $X \cup_f B$ den Pushout, siehe Folgerung 1.75.

(a) Konstruieren Sie mit Hilfe der universellen Eigenschaften eine natürliche, stetige, bijektive Abbildung

$$(X \times I) \cup_{f \times \mathrm{id}_I} (B \times I) \longrightarrow (X \cup_f B) \times I .$$

(b) Zeigen Sie die Stetigkeit der Umkehrabbildung. *Hinweis:* Sie können dazu das Exponentialgesetz 1.60 benutzen.

(c) Zeigen Sie, dass $(X \cup_f B, B)$ wieder eine abgeschlossene Kofaserung ist.

Aufgabe 4

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Disjunkte Vereinigungen und Quotienten kompakt erzeugter Räume sind wieder kompakt erzeugt.

(b) Ein kompakt erzeugter Raum X ist genau dann schwach Hausdorffsch, wenn die Diagonale $\Delta X = \{\, (x, x) \mid x \in X \,\} \subset k(X \times X)$ abgeschlossen ist.

(c) Disjunkte Vereinigungen schwacher Hausdorff-Räume sind schwach Hausdorffsch.

(d) Sei X kompakt erzeugter schwach-Hausdorff-Raum und $q \colon X \to Y$ surjektiv. Dann ist die Quotiententopologie auf Y genau dann schwach Hausdorffsch, wenn $(q \times q)^{-1}(\Delta Y) \subset k(X \times X)$ abgeschlossen ist.