7. Übungsblatt

Algebraische Topologie

im WS 2014/2015 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 11.12.14
vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Aufgabe 1

Bestimmen Sie für die folgenden Sequenzen von Gruppen jeweils den Kolimes G und geben Sie auch die Abbildungen $g_k \colon G_k \to G$ an.

(a) $\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 3} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 4} \dots$

(b) $\mathbb{R} \xrightarrow{\cdot 1} \mathbb{R} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{R} \xrightarrow{\cdot 3} \mathbb{R} \xrightarrow{\cdot 4} \dots$

(c) $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 1} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 3} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 4} \dots$

Aufgabe 2

Es sei (X, A) ein gutes Paar und $f \colon A \to B$ stetig. Konstruieren Sie mit Hilfe der universellen Eigenschaften eine natürliche, stetige, bijektive Abbildung

$$SX \cup_{Sf} SB \longrightarrow S(X \cup_f B) ,$$

und beweisen Sie die Stetigkeit der Umkehrabbildung.

Aufgabe 3

Konstruieren Sie eine Abbildung $f \colon S^1 \to S^1 \vee S^1$, so dass man den 2-Torus als Pushout

$$T^2 = S^1 \times S^1 \cong D^2 \cup_f (S^1 \vee S^1)$$

schreiben kann. Folgern Sie dann mit Proposition 3.63 und Aufgabe 2, dass die Einhängung ST^2 homotopieäquivalent zu $S^2 \vee S^2 \vee S^3$ ist.

Aufgabe 4

Es seien X, Y, Z kompakt erzeugte, punktierte schwach-Hausdorff-Räume. Es sei $C_+(X, Y) \subset kC(X, Y)$ der Raum der punktierten Abbildungen, und $Y^X = kC_+(X, Y)$. Zeigen Sie:

(a) Die Auswertungsabbildung $\mathrm{ev} \colon k(X \wedge kC(X, Y)) \to Y$ mit $(x, f) \mapsto f(x)$ ist stetig.

(b) Eine Abbildung $F \colon k(X \wedge Y) \to Z$ ist genau dann stetig, wenn die dazu adjungierte Abbildung $f \colon X \to Z^Y$ mit $F(x \wedge y) = f(x)(y)$ stetig ist.

(c) Die Adjunktion $(Z^Y)^X \to Z^{k(X \wedge Y)}$ ist ein Homöomorphismus, insbesondere gilt $Y^{kS^\ell X} \cong (k\Omega^\ell Y)^X$.