

# 8. ÜBUNGSBLATT

## ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE

IM WS 2014/2015 BEI PROF. DR. S. GOETTE

*Abgabe Donnerstag, den 18.12.14  
vor der Vorlesung*

*Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die  
Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt*

### Aufgabe 1

Es sei  $p: S^3 \rightarrow S^2$  die Hopf-Faserung aus Beispiel 3.30. Bestimmen Sie eine gerahmte Untermannigfaltigkeit  $(M, \tau)$ , die das Bild von  $[p]$  unter der Pontryagin-Thom-Konstruktion repräsentiert.

### Aufgabe 2

Zeigen Sie:

- (a)  $\pi_3^s(S^2) \cong \pi_1^s(S^0)$  wird von der Hopf-Faserung  $p: S^3 \rightarrow S^2$  erzeugt.
- (b) Es bezeichne  $\iota: \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^2$  die Inklusion mit  $(z_0 : z_1) \mapsto (z_0 : z_1 : 0)$ . Dann ist  $\iota_*[p] = 0 \in \pi_3(\mathbb{C}P^2)$ .
- (c) Es gilt dann auch  $\iota_*[p] = 0 \in \pi_3^s(\mathbb{C}P^2)$ .

### Aufgabe 3

- (a) Zeigen Sie mit der stabilen Homotopiesequenz für das Paar  $(\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^{n-1})$ , dass  $\pi_k^s(\mathbb{C}P^n) \cong \pi_k^s(\mathbb{C}P^{n-1})$  für alle  $k < 2n - 1$ .
- (b) Bestimmen Sie  $\pi_2^s(\mathbb{C}P^n)$  für alle  $n \geq 2$ .
- (c) Bestimmen Sie  $\pi_3^s(\mathbb{C}P^n)$  für alle  $n \geq 2$ .

### Aufgabe 4

Zeigen Sie: Die Abbildung  $U(n) \rightarrow S^{2n-1}$  mit  $g \mapsto ge_1 \in S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$  ist ein Faserbündel mit Faser  $U(n-1)$ .

Folgern Sie, dass  $\pi_k(U(n)) \cong \pi_k(U(n-1))$  für  $k < 2n - 2$ .