9. Übungsblatt

Algebraische Topologie

im WS 2014/2015 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 8.1.15 vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Aufgabe 1

Es sei X kompakt erzeugt. Wir identifizieren eine Äquivalenzrelation „$\sim$“ auf X mit der Teilmenge

$$R_\sim = \left\{ (x,y) \in X^2 \;\middle|\; x \sim y \right\} \subset k(X \times X) ,$$

und nennen „$\sim$“ abgeschlossen, wenn $R_\sim$ eine abgeschlossene Teilmenge ist. Zeigen Sie:

(a) Es sei $Y \in kw\mathcal{H}$ und $f\colon X \to Y$ stetig, dann ist $(f \times f)^{-1}(\Delta_Y)$ eine abgeschlossene Äquivalenzrelation.

(b) Zeigen Sie, dass $X/\sim$ genau dann schwach Hausdorff ist, wenn $R_\sim$ abgeschlossen ist.

(c) Zeigen Sie, dass der Durchschnitt über alle abgeschlossenen Äquivalenzrelationen wieder eine abgeschlossene Äquivalenzrelation ist.

(d) Es sei $q\colon X \to hX$ der Quotient von X nach der Relation aus (c), dann faktorisiert jede stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ in einen Raum Y aus $kw\mathcal{H}$ über q.

Aufgabe 2

Es bezeichne $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \bigvee_{n\in\mathbb{Z}} S^1$ den Quotienten topologischer Räume. Bestimmen Sie den Kolimes der Folge

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 1} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 3} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow \cdots$$

zum einen in der Kategorie $\mathcal{T}op$, zum anderen in der Kategorie $kw\mathcal{H}$.

Aufgabe 3

Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge schwacher Hausdorff-Räume mit Abbildungen $f_n\colon X_n \to X_{n-1}$ für $n > 0$. Zeigen Sie, dass der Raum $k \varprojlim X_n$ mit

$$\varprojlim X_n = \left\{ (x_n)_n \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \;\middle|\; f_n(x_n) = x_{n-1} \text{ für alle } n > 0 \right\}$$

die universelle Eigenschaft eines (inversen) Limes erfüllt.

Aufgabe 4

Wir betrachten den inversen Limes X der Folge

$$S^1 \xleftarrow{\cdot 1} S^1 \xleftarrow{\cdot 2} S^1 \xleftarrow{\cdot 3} S^1 \longleftarrow \cdots$$

topologischer Räume. Bestimmen Sie eine Abbildung der universellen Überlagerung $\mathbb{R} \to S^1$ des ersten Raumes in den Limes X. Ist diese Einbettung surjektiv?

Aufgabe 5

Es sei $(\mathcal{C}, \otimes, E)$ eine abgeschlossene monoidale Kategorie. Zeigen Sie:

(a) Für jedes Objekt Y ist $\hom(Y, \cdot\,) \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ ein kovarianter Funktor mit

$$\mathrm{ev}_{Y,W} \circ \bigl(\hom(Y, f) \otimes \mathrm{id}_Y\bigr) = f \circ \mathrm{ev}_{Y,Z} \qquad \text{für alle } f \colon Z \to W \;.$$

(b) Für jedes Objekt Z ist $\hom(\,\cdot\,, Z) \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ ein kontravarianter Funktor mit

$$\mathrm{ev}_{X,Z} \circ \bigl(\hom(f, Z) \otimes \mathrm{id}_X\bigr) = \mathrm{ev}_{Y,Z} \circ \bigl(\mathrm{id}_{\hom(Y,Z)} \otimes f\bigr) \qquad \text{für alle } f \colon X \to Y \;.$$

(c) Wir erhalten einen Bifunktor $\hom(\,\cdot\,, \,\cdot\,)$, das heißt, für alle $f \colon Z \to W$, $g \colon X \to Y$ gilt

$$\hom(X, f) \circ \hom(g, Z) = \hom(g, W) \circ \hom(Y, f) \colon \hom(Y, Z) \longrightarrow \hom(X, W) \;.$$

Aufgabe 6

Es sei $(\mathcal{C}, \otimes, E)$ eine abgeschlossene monoidale Kategorie. Zeigen Sie, dass das Tensorprodukt „$\otimes$“ die folgende universelle Eigenschaft erfüllt:

(a) Für alle Objekte X, Y gibt es eine Abbildung

$$\otimes_{X,Y} \colon X \longrightarrow \hom(Y, X \otimes Y) \;.$$

(b) Zu jedem weiteren Objekt Z und jeder Abbildung $f \colon X \to \hom(Y, Z)$ gibt es genau eine Abbildung $F \colon X \otimes Y \to Z$, so dass

$$f = \hom(Y, F) \circ \otimes_{X,Y} \;.$$

Hinweis zu (a): Es gilt $\mathrm{id}_{X \otimes Y} = \mathrm{ev}_{Y, X \otimes Y} \circ (\otimes_{X,Y} \otimes \mathrm{id}_Y)$.