# 2 Arithmetik

## 2.1 Aspekte von Zahlen:

(1) Kardinaler Aspekt: Elementeanzahl von Mengen (Wie viele?)

(2) Ordinaler Aspekt: Nummerieren, Ordnen (der wievielte?)

(3) Maßaspekt: Maßzahl für Größen (wie lang, wie schwer, wie teuer?)

(4) Operatoraspekt: Vervielfachung eines Vorgangs (wie oft?)

(5) Codierungsaspekt: Bezeichnen von Objekten (Hausnummer, Telefonnummer)

(6) Rechenzahlaspekt: Zahlen in Zusammenhang mit algebraischen und algorithmischen Aspekten

## 2.2 Kognitionspsychologische Aspekte

Bsp.: PIAGETS berühmter Versuch zur Mengeninvarianz: Zwei Reihen angeordneter Dinge (4–10 Stück) sollen verglichen werden. Laut Piaget wählt ein drei- bis vierjähriges Kind stets die längere Reihe, auch wenn sich darin weniger Objekte befinden. Interpretation: Kinder dieses Alters verfügen nicht über einen Begriff von Mengeninvarianz.
Variiert man den Versuch so, dass Bonbons verwendet werden und Kinder die ausgewählte Reihe aufessen dürfen, wird stabil die Menge mit der größeren Anzahl ausgewählt – auch dann, wenn die entsprechende Reihe kürzer ist (und dies ab dem Alter von zwei Jahren).
Neuere Versuche:

Neugeborene ab drei bis vier Tage nach der Geburt können zwischen zwei und drei unterscheiden. Dies gilt für die Anzahl von Objekten auf Dias, die Anzahl Silben in Unsinnswörtern sowie für eine Kopplung von akustischen und visuellen Reizen!

- Babys (4–5 Monate alt) wissen, dass 1+1=2, 2 – 1=1 ist!

- Unterscheidung zwischen 3 und 4 gelingt Kleinkindern (<1 Jahr) nur selten; 4, 5 oder6 wird nie unterschieden (im Gegensatz zu erwachsenen Schimpansen!).
- Hypothese: Vor dem Alter von 15 Monaten gibt es keine bemerkenswerte ordinale Kompetenz (z.B. Erkennen von 3>2), d.h. das Anzahlverständnis ist für jede Zahl isoliert.

### 2.1.2. **Zahlauffassung bei Erwachsenen**

Vielfältige Versuche ergaben: Beim Erfassen von Mengen arbeitet das Gehirn mit zwei Mechanismen: Mengen von 1 bis 3 werden unmittelbar erfasst (Subitisation, *kein* Zählvorgang, eher ein Schätzen), größere Anzahlen werden gezählt.

Verschiedene Anzahlen werden nur dann als verschieden erkannt, wenn das Verhältnis zwischen ihrer Differenz und der kleineren Anzahl eine bestimmte Schwelle überschreitet (z.B. entspricht das Erkennen von 13 > 10 dem Erkennen von 26 > 20).

Distanzeffekt bei Menschen: Die Auswahl der größeren Zahl von zwei vorgegebenen ist abhängig von der Größe der Differenz (z.B. wird 9 > 2 schneller erkannt als 9 > 8 und von der absoluten Größe der Zahlen.

## 2.3 Historische Aspekte:

### 2.3.1 Zahlen und Kulturen:

Wie zählt man große Anzahlen?

Kerbholz (Aufbewahren einer Zahl mit „Kopie")

„Auf dem Kerbholz haben"
Zahlzeichen der Ägypter (Vorstufe des Stellenwertsystems):

Additionsbeispiel:

Die Idee des Stellenwertsystems (Indien): Nur noch wenige, d. h. 10 Ziffern verwenden, die je nach Stellung verschiedene Werte haben.

Leerstelle: Wie soll man 23 von 2 3 oder 2   3 unterscheiden?
Erfindung der Null!

In D verbreitet sich das Stellenwertsystem ab etwa dem 15. Jahrhundert, vor allem durch Adam Ries.
Erste dezimal geschr. Zahl in Europa: 1138 (Münze in Sizilien)
Erste dez. geschriebene Zahl im deutschsprachigen Raum:
1424 in St. Gallen
Noch 1299 verbietet der Rat der Stadt Florenz die Verwendung der neuen Schreibweise bei Geldstrafe und verlangt im Handel Zahlenangaben in Worten, wegen der leichten Fälschbarkeit.

Die Vorgänger der Maya in Mittelamerika, die **Olmeken**, hatten bereits ein Stellenwertsystem mit 20er-Bündelung.

- So gab es die Einer (Kin),
- die 20er (Vinal),
- die 400er (Tun),
- die 8000er (Baktun).
- Die Zahl 20 geht vermutlich auf die Summe der Finger und Zehen zurück. Unsere heute noch gültige 60er-Bündelung in der Zeitrechnung geht wiederum auf das 60er-System der Babylonier zurück.

2.2.1 Nichtdezimale Stellenwertsysteme gehören nicht mehr zum Kerncurriculum. Empfehlung: **2er**- und evtl. 5er-System behandeln!
Spontanaufgabe: Wie viele Zahlen kann man im Zweiersystem mit höchstens 6 Stellen schreiben?

2.4 Magische Quadrate
2.5 Zahlenmauern
2.6 Umfang des Kopfrechnens und Übungen dazu

**Schriftliches** Rechnen ist heute wegen der allgemeinen Verfügbarkeit des Taschenrechners im Alltag nicht mehr so wichtig wie früher. Man wird sich im Unterricht beschränken und im Wesentlichen die Grundgedanken der Algorithmen durchsichtig machen. Trotz TR ist aber schriftliches Rechnen zumindest in Klasse 5/6 noch notwendig.

Gerade wegen des Taschenrechners hat aber das **Kopfrechnen** nach wie vor große Bedeutung. **Jedes** Taschenrechnerergebnis sollte durch einen Überschlag oder eine Plausibilitätsüberlegung kontrolliert werden!

Es ist wichtig, dass man in den Klassen 5 - 8 immer wieder kurze spezielle Übungsphasen zum Kopfrechnen einlegt.

Wie weit sollten Kopfrechenfähigkeiten entwickelt werden?

Klasse 5:

- Addieren/ Subtrahieren von mehrstelligen Zahlen
- Kleines Einmaleins, Großes Einmaleins, Quadratzahlen bis $20^2$ und $25^2$.
- Rechnen mit Größen

## 2.7 Schwierigkeiten bei SuS: Textaufgaben und Sprachverständnis

Im Mathematikunterricht spielen **Text- oder Sachaufgaben** eine wichtige Rolle. Man versteht darunter verbal formulierte Aufgaben, bei denen die Mathematik auf ein Problem aus dem Alltag oder der Technik angewandt wird.

Schüler haben mit solchen Aufgaben oft **große Schwierigkeiten**. Bei genauerer Analyse kann man dafür folgende Gründe finden:

1. Es fehlt am nötigen **sprachlichen Verständnis** oder am **Lesevermögen**.

Laut Pisa haben fast 30% der Neunt-Klässler Probleme mit verstehendem Lesen von Alltagstexten.

Eine etwas komplizierte Satzstruktur verbunden mit einigen im Alltag wenig gebräuchlichen Worten erschwert auch bei Gymnasiasten das Verständnis enorm.

Die Konsequenz kann **nicht** darin bestehen, solche Texte zu vermeiden! Im Gegenteil wird man auch im Mathematikunterricht das Leseverständnis fördern:

· durch Nacherzählen

· eigenes Formulieren von Aufgaben

· Klärung von Fachbegriffen

Es ist allerdings auch sinnvoll und nötig, auf eine altersgemäße Sprache und Sachsituation zu achten → Forderung an Schulbuchautoren

**2. Erfahrungen und Vorkenntnisse** über den konkreten Sachzusammenhang sind nicht in ausreichendem Maße vorhanden.

Dann müssen Sie diese Kenntnisse erarbeiten!

Grundsätzlich sollten eher Aufgaben mit **altersgemäßem** Sachzusammenhang behandelt werden.

3. Die SuS Schüler sind nicht in der Lage, die für die **mathematische Behandlung wichtigen Informationen** zu erkennen.

Eine Technik besteht darin, konsequent relevante Daten zu unterstreichen und ins Heft zu übernehmen. Man kann auch redundante Daten in die Aufgabe übernehmen, damit nicht gedankenlos alle Zahlenangaben herausgesucht werden.

Die SuS haben Schwierigkeiten, das Problem zu **modellieren**, d.h. mathematisch zu beschreiben.

Hier gibt es kein Patentrezept und in der Verbesserung dieser Fähigkeiten ist sicher ein Schwerpunkt des Unterrichts zu sehen.

Eine sinnvolle Strategie besteht darin, nach schon gelösten **ähnlichen Transfer-**Aufgaben zu suchen.

Auch geometrische **Skizzen** oder reale **Modelle** können helfen.

5. Die SuS können das **mathematische Problem** nicht lösen.

Wenn dies bei vielen Schülern der Fall ist, dann liegen wahrscheinlich Defizite in den Vorkenntnissen vor, die Sie beheben sollten.

Möglich ist auch, dass zur Lösung mehrere Teilschritte sinnvoll aneinander zu reihen sind, und die SuS von dieser Komplexität überfordert sind.

Hier helfen Strategien wie vor „**Vorwärtsdenken**": ***was kann ich aus den Voraussetzungen ableiten***, bzw. „**Rückwärtsdenken**": ***was benötige ich zur Erreichung des Ziels, wie komme ich zu diesen Anforderungen?***

6. Die SuS können die Lösung des mathematischen Problems **nicht interpretieren**.

Bestehen Sie deswegen auf Antwortsätzen. Diskutieren Sie unterschiedliche Antwortsätze.

Schärfen Sie den Blick der SuS auf die Fragestellung.

7. Die Aufgabenstellung **interessiert** die SuS nicht.

Schlecht sind mühsam eingekleidete Scheinanwendungen, die im Grunde nur der Rechtfertigung eines Kalküls dienen.

2.7.8 Grundsätzliches zur Lösung von Textaufgaben aus LS 1, S. 95

Konkretes Aufgabenbeispiel:

**Beispiel 1**

Die Tribüne des FC Neuhof wird umgebaut. Hierdurch verringert sich die Anzahl der Sitzplätz um 20. Der Vorstand hat beschlossen, nach dem Umbau für alle Tribünenplätze den gleichen Eintrittspreis zu verlangen.

Bei voll besetzter Tribüne soll aber die gleiche Einnahme wie vor dem Umbau erzielt werden.

Wie viel Euro muss dann ein Tribünenplatz kosten?

Lösung:

Zusammenstellung der Angaben.

1. Vor dem Umbau:

| | Anzahl der Plätze | Preis pro Platz | Einnahmen |
|---|---|---|---|
| | 100 | 13 € | 1300 € |
| | 200 | 10 € | 2000 € |
| | 200 | 7,50 € | 1500 € |
| Summe | 500 | | 4800 € |


Fig. 1

*Die Angaben lassen sich gut in einer Tabelle darstellen.*

*Aus LS, Bd 5*

## 2.8 Aufgaben

Enge Aufgabenstellungen

- klar strukturierte Aufgabenstellung
- häufig schon mathematisierte Aufgabenfelder
- genau die Daten, die man benötigt
- eindeutig formulierte, mathematisch motivierte Fragen
- es wird meist genau ein Lösungsweg erwartet

**Offene Aufgaben:**

- Realitätsnähe bei der Aufgabenstellung
- auch außermathematische, oft zu Wertungen herausfordernde Fragestellungen
- redundante Daten
  - mehrere unterschiedliche Lösungswege werden angestrebt

Beispiel 1 aus LS 1, S. 96

## Aufgaben

**1** Die Klassen 5a (27 Kinder) und 5c (30 Kinder) machen einen Ausflug zu einem Aussichtsturm. Es gibt zwei Fahrstühle zur Aussichtsplattform. Der eine kann zwölf, der andere neun Personen gleichzeitig befördern. Wie oft müssen die Fahrstühle mindestens fahren, bis alle Schülerinnen und Schüler oben sind?

**2** Der Sportverein hat die Mitglieder der Jugendfußballmannschaft zum Essen in die Dorfschenke eingeladen. Die Mitglieder können unter drei verschiedenen Menüs wählen: Menü I kostet 7,50 €, Menü II 8 € und Menü III 8,50 €. Fünf Spieler bestellen Menü I, 17 Menü II und vier Menü III. Ferner werden acht Gläser Cola zu je 1,50 €, 15 Gläser Mineralwasser zu je 1,20 € und zwölf Gläser Fruchtsaft zu je 2 € getrunken.
Wie viel Euro muss der Sportverein bezahlen?

**3** Die elektrische Energie für 10 Minuten Haareföhnen kostet ca. 2 Cent.
Frau Meier föhnt sich 3-mal in der Woche die Haare, sie benötigt hierzu jeweils 15 Minuten. Ihre Tochter föhnt sich ihre Haare alle 5 Tage jeweils 20 Minuten lang. Ihr Sohn föhnt sich jeden Monat 20-mal die Haare, er braucht jedes Mal 10 Minuten. Herr Meier hat eine Glatze. Berechne die Energiekosten, die Familie Meier jährlich fürs Haareföhnen entstehen.

**4** a) Schätze, wie viel Euro die Fahrräder, die in deiner Schule stehen, kosten.
b) Schätze das Gesamtgewicht aller Schülerinnen und Schüler deiner Schule.

**5** a) Schätze die Anzahl der Autos in der Stadt Stuttgart.
b) Diese Autos werden hintereinander gestellt. Welche Länge hätte diese Autoschlange?
c) Welche Länge hätte die Autoschlange aller PKWs in Deutschland?
Vergleiche die Länge der Autoschlange mit der Länge der gesamten Autobahnen.

Offene Aufgaben:

- Offene Aufgaben sind solche, bei denen die Lösungswege nicht fest vorgezeichnet sind und eine eindeutige Lösung nicht notwendig ist
- Auch Irrwege dürfen zunächst beschritten werden
- Die Aufgaben sollen zu grundlegenden Überlegungen anregen und möglichst Diskussionen entfachen
- Ihre Lösung soll inhaltliche und qualitative Argumentationen erfordern und damit den Lehrstoff vertiefen
- Offene Aufgaben erlauben mehrere Vorgehensweisen, die Lösungswege sind nicht vorgegeben, lassen Raum für eigene Fragestellungen und Lösungswege

- Die SuS sollen ermuntert werden, eigene Wege zu finden, diese in eigene Worte zu fassen und mit MitSuS und Lehrpersonen darüber zu diskutieren.

Beispiel 2 (Abbildungen aus LS, Bd. 5)

Der brasilianische Regenwald wird immer kleiner. Durch Abholzung und Brandrodung geht jedes Jahr eine riesige Waldfläche verloren. Anhand von Satellitenbildern konnten Forscher die Größe dieser Fläche bestimmen. Sie berichteten im Internet: „Die Waldvernichtung betrug in den Jahren 1995 bis 2000 fast immer um die zwei Millionen Hektar jährlich. Das entspricht sieben Fußballfeldern pro Minute."
Der Vergleich ist sehr anschaulich, aber stimmt er auch?

Mithilfe des Taschenrechners erhält man:
Abnahme pro Tag: 2 000 000 ha : 365 ≈ 5500 ha
Abnahme pro Stunde: 5500 ha : 24 ≈ 230 ha
Abnahme pro Minute: 230 ha : 60 ≈ 4 ha
Ein Fußballfeld ist ungefähr 100 m lang und 60 m breit. Es hat also den Flächeninhalt 6000 $m^2$, sieben Fußballfelder haben einen Flächeninhalt von 42 000 $m^2$ = 4,2 ha.
Der anschauliche Vergleich ist also richtig.

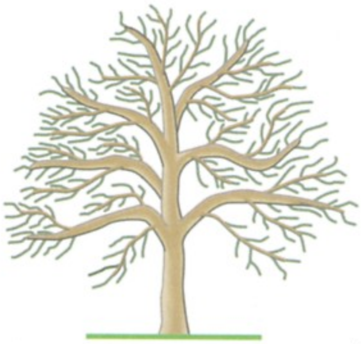


Fig. 1

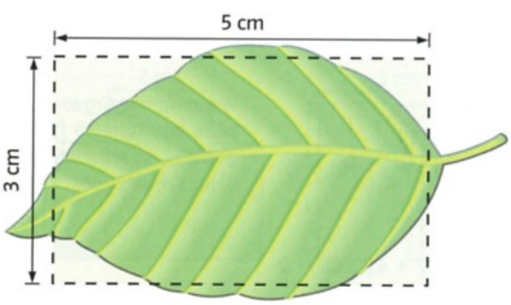



Fig. 2

Bäume erzeugen in ihren grünen Blättern Sauerstoff, den wir zum Atmen brauchen. Sie benötigen dazu Luft, Wasser und Sonnenlicht. An einem sonnigen Tag erzeugt eine Buche mit jedem Quadratmeter Blattfläche etwa 11 g Sauerstoff.
Will man **berechnen**, wie viel sie an einem solchen Tag insgesamt produziert, so muss man den Flächeninhalt aller Blätter zusammen ermitteln. Dazu braucht man die Gesamtzahl der Blätter und den Flächeninhalt eines Blattes.
Die Anzahl der Blätter einer jungen Buche (Fig. 1) kann man auf folgende Weise **schätzen**:
- Die Buche hat sieben große Äste.
- An jedem der großen Äste befinden sich etwa vier kleine Äste.
- Ein kleiner Ast hat ungefähr sieben Zweige.
- Ein Zweig hat ungefähr 20 Knospen mit jeweils zehn Blättern.

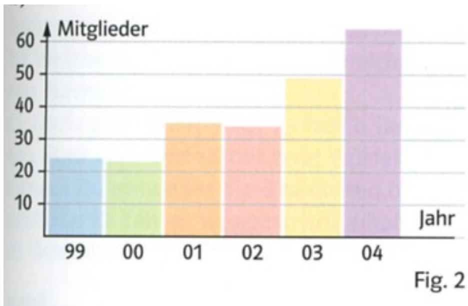
Insgesamt sind das etwa $7 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 20 \cdot 10$ Blätter ≈ 40 000 Blätter.
Ein Buchenblatt (Fig. 2) hat ungefähr denselben Flächeninhalt wie ein Rechteck mit den Seitenlängen 5 cm und 3 cm, also 15 $cm^2$. Alle Blätter zusammen haben damit den Flächeninhalt $40\,000 \cdot 15\,cm^2 \approx 600\,000\,cm^2 \approx 60\,m^2$.
An einem sonnigen Tag erzeugt die junge Buche also $60 \cdot 11\,g = 660\,g$ Sauerstoff. Das ist beinahe der Tagesbedarf eines Menschen.

## 2.9 Diagramme

Alle Zeitungen und Medien sind voll von Diagrammen, die dem Ziel dienen, komplexere Datensätze zu veranschaulichen. Daher ist das Thema **Daten** auch als Leitidee im Mathematikunterricht verankert (zusammen mit Zufall). Die Verarbeitung von Daten, ihre geeignete Veranschaulichung wird auch SuS der Klassenstufe 5 behutsam nahe gebracht.

Beispiel (aus LS 1, S. 11):
Zahl der Mitglieder in der Jugendabteilung eines Sportvereins

| Jahr | 1999 | 2000 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Mitgl. | 24 | 23 | 35 | 34 | 49 | 64 |




Säulendiagramm

Pädagogisch-didaktisch-methodische Frage:

***Sollen mit SuS der Klassenstufe 5 Diagramme mit Stift und Papier zeichnen oder Tabellen und Diagramme mit Tabellenkalkulation erstellt werden?***

## 2.10 **Teilbarkeit und Primzahlen**

Das Thema „Primzahlen“ ist nicht mehr im Kerncurriculum verankert. Das Bestreben der Lehrbuchautoren geht dahin, die Teilbarkeit und die Primzahlen nur mehr untergeordnet zu behandeln. Das Thema „Primzahlen“ sollte aber m. E. auf jeden Fall behandelt werden. Es wird z. T. bereits in der Grundschule angesprochen.

### 2.10.1 **Mögliche Themen bei Primzahlen**

- Teilbarkeitsregeln (ggt und kgv, Endstellenregeln)

- Sieb des Eratosthenes
- Fundamentalsatz (Zerlegung einer nat. Zahl in Primfaktoren)
- Große Primzahlen
- Evtl. Häufigkeit von Primzahlen
- Nicht gelöste Probleme (Primzahlzwillinge, Vermutung von Goldbach)
- Anwendungen von Primzahlen

2.10.2 Sieb des Eratosthenes

Zum Fundamentalsatz der Zahlentheorie (nach LS 1, S. 32)

Wenn man eine Zahl wie 60 als Produkt schreibt und die Faktoren so klein wie möglich wählt, ergibt sich am Ende immer ein Produkt von Primzahlen.

$60 = 6 \cdot 10$ $\quad$ $60 = 4 \cdot 15$ $\quad$ $60 = 5 \cdot 12$

$60 = \overbrace{2 \cdot 3} \cdot \overbrace{2 \cdot 5}$ $\quad$ $60 = \overbrace{2 \cdot 2} \cdot \overbrace{3 \cdot 5}$ $\quad$ $60 = 5 \cdot \overbrace{2 \cdot 2 \cdot 3}$

Man erhält stets die gleichen Faktoren 2 (zweimal), 3 (einmal) und 5 (einmal). Nur die Reihenfolge ist anders. Die Faktoren 2; 3; 5 heißen die **Primfaktoren** von 60. Das Produk $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ heißt **Primfaktordarstellung** von 60.

2.10.3 Große Primzahlen

2.10.4 Verschlüsselung (macht SuS der Kl. 5 Spaß!)
(nach Cäsar, RSA-Algorithmus mit einfachen Primzahlen)

## 2.11 **Negative Zahlen**

2.11.1 Historische Bemerkungen
(Nach Hefendehl-Hebeker 2007)

### 2.11.1 Was sind und was sollen die negativen Zahlen?

*Wie wurde mir zumute, als ich merkte,*
*dass kein Mensch mir erklären konnte,*
*wieso minus mal minus gleich plus ergibt!*
Stendhal (Henri Beyle) 1835

### Ein Blick in die Geschichte

Rückblick: (Freudenthal 1967)

! „Die erste mathematische Wirklichkeit, derer man sich bewusst wurde und die man sprachlich fasste, war die der natürlichen Zahlen.“

! Ihnen folgten die Größen (Längen, Flächen- und Rauminhalte, Gewichte, Zeitspannen, Geldwerte). Um Größen zu messen, erfand man die Brüche.

! Die Erkenntnis, dass die Brüche zum theoretisch genauen Messen nicht ausreichen, führte zur Entdeckung des Inkommensurablen (s. Kap. 7).

## Ursprung der negativen Zahlen

!Die Einführung der negativen Zahlen erfolgte in der Renaissance. Vorläufer gab es in Indien (Brahmagupta).

!Der Ursprung war nicht die Beschreibung der Wirklichkeit, sondern das *formalalgebraische Bedürfnis*, einheitliche Lösungsschemata von Gleichungen zu haben (del Ferro, Tartaglia, Cardano).

## Beispiel: quadratische Gleichungen

! Diophant unterschied 5 Typen von quadratischen Gleichungen und behandelte sie getrennt:

! Bei Verfügbarkeit negativer Koeffizienten kann man alle diese Typen zu einer einzigen Normalform zusammenfassen und mit einem einheitlichen Algorithmus lösen :

$ax^2 = bx$, $ax^2 = b$, $ax^2 + bx = c$, $ax^2 + c = bx$,

$ax^2 = bx + c$

$ax^2 + bx + c = 0$.

## Inhaltlich folgenreiche Konsequenz

!Die negativen Zahlen eröffneten die Möglichkeit, geometrische Figuren generell (unabhängig vom speziellen Problem) mit Hilfe eines Koordinatensystems algebraisch zu beschreiben.

!Ihre Bewährung in der Geometrie war ein wesentlicher Grund für ihren durchschlagenden Erfolg.

## Akzeptanzprobleme

! Die neuen Zahlen beschrieben in dieser Rolle keine Größen mehr. Das bewirkte, dass es 300 Jahre dauerte, bis sie nicht nur mathematisch, sondern auch philosophisch akzeptiert waren.

- Typische Äußerungen:
  - Stifel: Negative Zahlen sind „fingierte Zahlen unter Null.“
  - Cardano: Es sind fiktive Lösungen (d.h. Hilfslösungen, durch die man zu wahren Lösungen von Gleichungen gelangt).
  - Descartes. „racines fausses“ (falsche Lösungen)
  - Vieta: Vermeidungsstrategien (Problemstellungen möglichst so umformulieren, dass sie positive Lösungen haben).

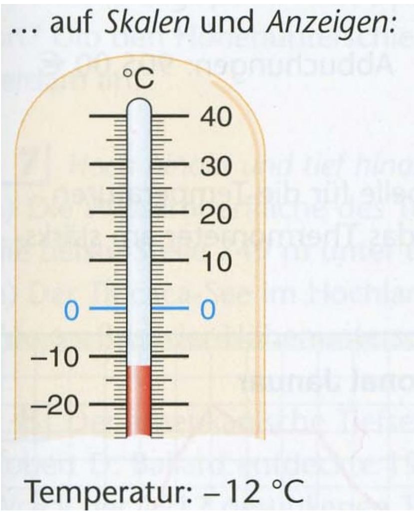
Sichtwechsel bei Hankel (1867)

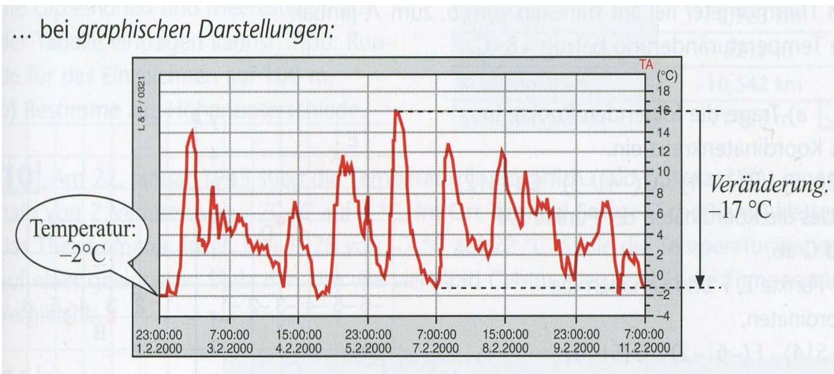
- Übergang vom konkreten zum formalen Standpunkt: den Begriff der Zahl rein formal ohne Rücksicht auf den der Größe fassen.
- Der Ausdruck „Erweiterung des Zahlensystems“ wird Leitgedanke für das Verständnis der rationalen und der komplexen Zahlen.
- Jedoch soll ein formal festgelegtes Zahlensystem so beschaffen sein, dass es dazu angetan ist, die reale und die mathematische Wirklichkeit zu beschreiben.

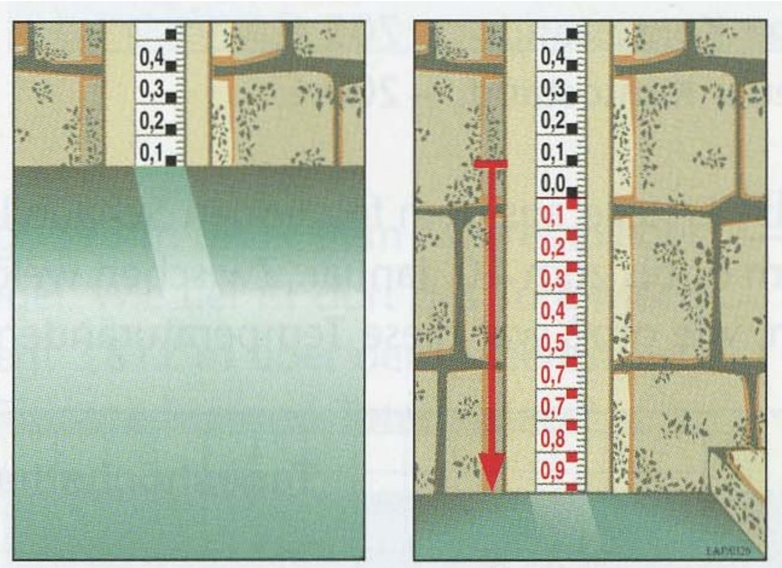
- *Insbesondere sollen die Rechenregeln im erweiterten Zahlenbereich so festgesetzt werden, dass die Grundregeln der Arithmetik natürlicher Zahlen möglichst weiter gelten (Prinzip der Permanenz formaler Gesetze).*

2.11.2 Wo kommen negative Zahlen vor?

Beispiele (aus Neue Wege):

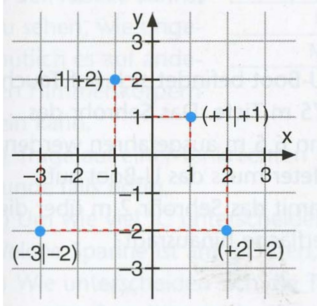





*Wasserstandsänderung:* –1 m


… bei *Koordinaten:*




… auf *Kontoauszügen:*

| Buchungstag/Wert/Vorgang | | Soll | Haben |
|---|---|---|---|
| | Alter Kontostand EUR | | 252,75 |
| 03.10. 04.10. Möbelhaus Johann | | 355,00 | |
| | Neuer Kontostand EUR | -102,25 | |

Alter Kontostand: 252,75 €
Neuer Kontostand: –102,25 €

*Kontostandsänderung:* –355,00 €

## 2.11.3 **Rechenregeln**

Erweiterung des Zahlenstrahls zur Zahlengeraden
Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren, Dividieren

Wichtig: Die Regeln für das Addieren und Subtrahieren lassen sich handlungsorientiert plausibel machen:
***Wird addiert, so bewegt man sich auf der Zahlengeraden nach rechts.***
***Wird subtrahiert, so bewegt man sich auf der Zahlengeraden nach links.***

Die Regeln für das Multiplizieren lassen sich nur durch Analogieüberlegungen plausibel machen.

Auch hier: **Kopfrechenübungen!**

**Abstrakt-formale Begründung der Rechenregeln:**

Ein wichtiges Prinzip der Zahlbereichserweiterung $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ (wie auch aller weiteren Zahlbereichserweiterungen) ist das **Permanenzprinzip**:
*Die Rechengesetze, die im alten Zahlbereich gelten, sollen auch im erweiterten gültig sein (insbesondere das Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz).*
Formal-abstrakt kann unter diesem Gesichtspunkt des **Permanenzprinzips** die Zahlbereichserweiterung und die Begründung der Rechengesetze im erweiterten Bereich vollzogen werden, wird aber den SuS gegenüber wegen der hohen Abstraktion nicht erwähnt bzw. in Vordergrund gestellt.

Das Konzept dieser formal-abstrakten Zahlbereichserweiterung soll hier nur angedeutet werden:
Dazu definiert man im Bereich der natürlichen Zahlen Zahlenpaare (a;b) und eine Äquivalenzrelation:
2 Zahlenpaare (a,b) und (c,d) sind äquivalent, wenn $a + b = c – d$ gilt.

2. 11.4 **Spiele für Klasse 5 (siehe auch ml 43, ml 66):**

a) Flop: Spiel zur Teilbarkeit. Die SuS sitzen im Stuhlkreis und zählen nacheinander von 1 an hoch und sagen bei Zahlen, die z. B. durch 3 oder 4 teilbar sind, „Flop“. Also 1, 2, flop, flop, 5, flop, 7, flop, flop, 10, 11, flop usw.

Variation: Das Spiel kann in ähnlicher Weise für **Primzahlen** benutzt werden. Beim Hochzählen wird statt der entsprechenden Primzahl „flop“ gesagt.

b)

## Partnerspiel

Wer hat zuerst die Zahlen 1 bis 30 getilgt?
Gespielt wird mit drei Würfeln. Jeder Spieler schreibt die Zahlen 1 bis 30 auf. In jeder Runde versucht man, eine Zahl zu tilgen.
Im Rechenausdruck muß jede gewürfelte Zahl auftreten und sie darf nur einmal auftreten. Die Rechenarten darf man beliebig wählen.
Klammern setzen ist erlaubt.

~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ ~~5~~
~~6~~ ~~7~~ ~~8~~ ~~9~~ 10
~~11~~ ~~12~~ ~~13~~ ~~14~~ ~~15~~
~~16~~ ~~17~~ ~~18~~ ~~19~~ ~~20~~
~~21~~ ~~22~~ ~~23~~ ~~24~~ ~~25~~
~~26~~ ~~27~~ ~~28~~ ~~29~~ ~~30~~

Gewonnen! $(6-4) \cdot 5 = 10$

*Kasten 5* *Quelle: Kurs Mathematik 6, Diesterweg Nr. 2392, S. 60*

c)

## Partnerspiel

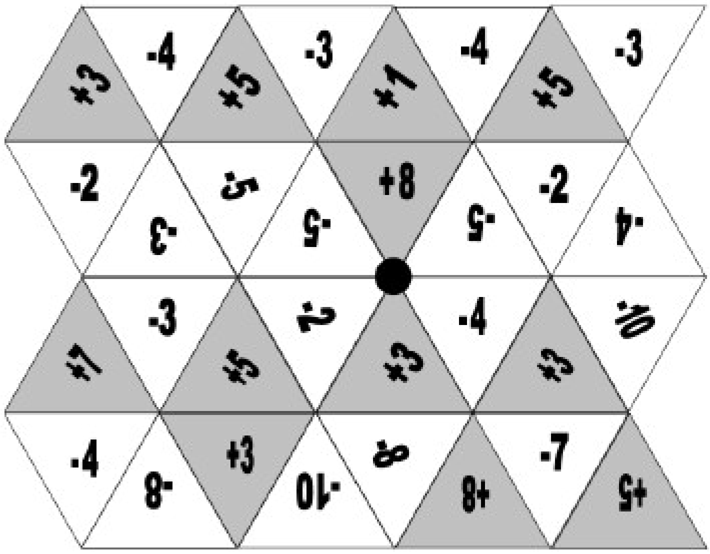
Bei Spielbeginn hat jeder Spieler 100 schlechte Punkte. Es wird abwechselnd mit zwei Würfeln gespielt. Die beiden erwürfelten Zahlen müssen mit dem jeweiligen Kontostand in beliebiger Reihenfolge verrechnet werden; die Rechenarten können beliebig gewählt werden. Wer zuerst exakt die Zahl 0 erreicht, ist Sieger.

Beispiel:

**100**
↓ - 3
↓ - 6
91
↓ - 1
↓ : 6
15
↓ : 3
↓ -3
2
↓ x 3
↓ -6
0

*Kasten 6* *Quelle: Kurs Mathematik 6, Diesterweg Nr. 2392, S. 96*

d) Saldix (ml 43)



Das Spiel „Saldix“ wurde im Heft 43 von „mathematik lehren“ vorgestellt. Zwei bis vier Spieler benötigen insgesamt 25 gleichartige Spielsteine (Knöpfe, Männchen, o.ä.), von denen der erste auf den schwarzen Punkt gesetzt wird und die übrigen auf die Spieler gleichmäßig verteilt werden. Reihum werden Steine auf die Eckpunkte der Dreiecke gesetzt. Wer am Zug ist, muss setzen. Werden bei einem Zug eines Spielers ein oder mehrere Dreiecke ganz eingeschlossen, so erhält dieser Spieler die entsprechende Punktzahl auf sein Konto gutgeschrieben oder abgezogen.
Sieger ist, wer am Spielende die höchste Punktzahl hat.