3. Algebra

3.1 Historische Bemerkungen

Variable (Verwendete Literatur: Malle, Vollrath, Heidelberger Gruppe, Lehrbücher Neue Wege, Lambacher-Schweizer).

3.2 Zum **Variablenbegriff**

Was sind Variable?
In der mathematischen Literatur werden
Variable meist nur verwendet, ohne dass der Variablenbegriff reflektiert wird. In Anlehnung an ein Zitat von H. Weyl über den Funktionsbegriff könnte man sagen:
Nobody knows what a variable is.
Es gibt Variable auch in der Umgangssprache. Worte und Wortgruppen wie

- „Ding“,
- „Sache“,
- „ein“,
- „ein beliebiger“,
- „irgendwelche“ usw.
  spielen die Rolle von Variablen.
  In der Festsetzung „die Pension einer Witwe beträgt
- „60% der Pension des verstorbenen Ehemannes“
  sind
- „Pension einer Witwe“ und
- „Pension des verstorbenen Ehemannes“
  Variable.

Bereits in der babylonischen und ägyptischen Mathematik

benutzte man Begriffe wie „Haufen“, „Menschen“, „, später wurden für die Unbekannte in einer Gleichung Worte wie „Ding“ (res, cosa) verwendet.
Buchstabenvariable statt Wortvariable erlauben eine knappere, übersichtlichere und kontextfreiere Darstellung.
Das obige Beispiel der Pension einer Witwe kann man knapper so formulieren:
W = 0,6 M.
Diese Darstellung erlaubt regelhafte Umformungen wie z. B.
M = W/0,6.

3.3.2 Wir heben 4 Aspekte von Variablen an 4 Beispielen hervor:

Beispiel 1:

Denke dir eine Zahl! Addiere 10! Verdopple das Ergebnis! Subtrahiere das Doppelte der ursprünglichen Zahl! Du erhältst ??.
Die „Zahl“ spielt die Rolle eines Platzhalters (Variable als Leerstelle bzw. als Platzhalter)
Sie wird kürzer durch einen Buchstaben ersetzt, mit dem gerechnet werden kann.
Variable als unbekannte Zahl (**Gegenstandsaspekt**):

Mögliche Lösung?

Allerdings kommt in diesem Beispiel noch der **Rechenaspekt** hinzu:
Die Variable wird als Objekt behandelt, mit dem man nach bestimmten Regeln rechnen kann.

Beispiel 2:

Setze in die Gleichung $2x + 3 = 11$ der Reihe nach Zahlen von 1 bis 6 ein. Wann ergibt sich eine wahre Aussage?

$2 \cdot 1 + 3 = 11$ *f*

$2 \cdot 2 + 3 = 11$ *f*

$2 \cdot 3 + 3 = 11$ *f*

$2 \cdot 4 + 3 = 11$ ***r***

$2 \cdot 5 + 3 = 11$ *f*

$2 \cdot 6 + 3 = 11$ *f*

Einsetzungsaspekt!

Beispiel 3:

Löse $3x + 8 = 26$

Mögliche Lösung: $3x + 8 = 26 \mid -8$

$3x = 18 \mid :3$

$x = 6$

Rechenaspekt!

Beispiel 4:

1 m^3 Wasser kostet 2,80 Euro, außerdem kommt noch eine Grundgebühr von 15 Euro dazu.

Wir ordnen einem beliebigen Verbrauch v (in m^3) die Kosten (in Euro) zu:

$v \rightarrow 2{,}8v + 15.$

Zuordnungsaspekt!

In Aufgabe 1 ist **x** eine unbekannte oder nicht näher bestimmte Zahl. In der Aufgabe 2 ist **x** ein Platzhalter für Zahlen bzw. eine Leerstelle, in die man Zahlen einsetzen darf. In der Lösung von Aufgabe 3 dürfte **x** wohl ein Symbol sein, über dessen Bedeutung nicht weiter nachgedacht und

mit dem nach gewissen Regeln umgegangen wird.
Es gibt daher die folgenden 3 Aspekte des Variablenbegriffs:
(1) **Gegenstandsaspekt:** Variable als unbekannte oder nicht näher bestimmte Zahl
(2) **Einsetzungsaspekt:** Variable als Platzhalter für Zahlen bzw. Leerstellen, in die man Zahlen einsetzen darf.
(3) **Kalkülaspekt (Rechenaspekt):** Variable als bedeutungsloses Zeichen, mit dem nach bestimmten Regeln gerechnet werden darf.
(4) **Zuordnungsaspekt**
Alle 4 Aspekte spielen eine Rolle und sind meistens gleichzeitig vertreten, allerdings nicht gleich stark.

3.3.3 Einflüsse der Aspekte auf die Gleichungslehre:
Beispiel 1:
Welche Zahl ergibt um 1 vermehrt und anschließend verdoppelt 8?
Erster Gedankengang (Betonung des Gegenstandsaspekts):
Lösen durch inhaltliche Überlegungen:
Ich nenne die gesuchte Zahl x. Für diese muss gelten:
$2(x+1) = 8$
In Klammern steht eine Zahl: Das Doppelte der Klammer ist gleich 8, daher ist die Klammer gleich 4, somit
$x + 1 = 4$
Vermehrt man die ursprüngliche Zahl x um 1, so erhält man 4. Somit ist die ursprüngliche Zahl gleich 3.
Betonung des Einsetzungsaspekts:
Die gesuchte Zahl muss die folgende Aussageform
$2(x + 1) = 8$
durch Einsetzung in den Platzhalter x in eine wahre Aussageform überführen.
Die Aussageform ist äquivalent zu

$x + 1 = 4$
Die Lösungsmenge dieser Aussageform kann man unmittelbar ablesen:
$L = \{3\}$.
Betonung des Kalkülaspekts:
Die gesuchte Zahl x muss der folgenden Gleichung genügen:
$2(x + 1) = 8$
$x + 1 = 4$
$x = 3$
Bei keiner der drei Vorgehensweisen wird eine heuristische Strategie erwähnt (z. B. Lösen durch Probieren).
Die 2. Vorgehensweise enthält sprachliche Elemente einer sog. Metasprache, **Aussageform, Aussage**, **Äquivalenzumformung**.
Im ersten Gedankengang sind die Zahlen die Objekte. Es wird vorwiegend über Gleichungen und deren Beziehung untereinander gesprochen. Im ersten Gedankengang wird über die Objekte selbst gesprochen, im 2. und 3. Gedankengang über sprachliche Ausdrücke bezüglich dieser Objekte. Die Unterscheidung von Objekt- und Metasprache wird an folgenden Beispielen besprochen:
Beispiel 1
Objektsprachliche Formulierung:
Für welche rationale Zahl x gilt $2(x + 1) = 8$?
Metasprachliche Formulierung:
Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung $2(x + 1) = 8$ über der Grundmenge $\mathbb{Q}$!
Die erste Sprechweise ist einfacher! Sie ist **objektsprachlich** geprägt.
Die zweite Sprechweise beinhaltet Ausdrücke der **Metasprache**. Sie waren eine Zeit lang groß in Mode im

Rahmen der Bewegung **„New Math“**.
New Math führte zu recht kuriosen Entwicklungen.
•Es wurde den Schülern verboten, eine Variable als Unbekannte zu bezeichnen.
•Schüler wurden getadelt, wenn sie am Schluss einer Gleichungslösung $x = 3$ statt $L = \{3\}$ schrieben oder
•bekamen das Beispiel gar nicht angerechnet, weil die Lösungszahl 3 gar nicht in der „konstruierten“ Grundmenge $G = \{-3; \sqrt{2}; \pi; 2; 10758\}$ enthalten war.
Der Begriff Lösungsmenge bekommt seinen Sinn dadurch, dass eine Gleichung, vor allem Gleichungen höheren Grades gar keine, oder genau eine oder mehrere (bis hin zu unendlich vielen) Lösungen haben kann. Er ist auch nach dem Rückzug der „New Math“ -Bewegung noch in Gebrauch, wenn auch bei eindeutigen Lösungen die Schreib- und Sprechweise
$x = 3$
erlaubt und in gewisser Weise natürlicher ist.

3.2 Realisierung in Schulbüchern

3.2.1 **Prozentrechnung**

Beispiel 1 (LS neu, Bd 3):

Eine Schule wird von 640 Schülerinnen und Schülern besucht, davon sind 128 Auswärtige.
Der Anteil der Auswärtigen an der gesamten Schülerzahl wird in gewohnter Weise berechnet und in Prozent umgewandelt:
$\frac{128}{640} = 128 : 640 = 0{,}2 = 20\,\%$.

Bei dieser Berechnung nennt man
– den Zähler des Bruches **Prozentwert**,
– den Nenner des Bruches **Grundwert** und
– das Ergebnis der Rechnung **Prozentsatz**.

Kasten (Merksatz):

Der Zusammenhang zwischen Prozentwert, Grundwert und Prozentsatz wird beschrieben durch die Formel

Prozentwert $\frac{W}{G} = p\,\%$ Prozentsatz
Grundwert

Problematisch: An dieser Stelle treten zum ersten Mal Variable auf, ohne dass näher auf deren Gebrauch eingegangen wird. Man verfolgt hier die Absicht, die 3 Begriffe Prozentwert, Grundwert und Prozentsatz einzuführen und den SuS den Zusammenhang zwischen den 3 Begriffen in Form einer Gleichung anzugeben. Allerdings betont man hier nicht den Charakter der Gleichung.

Beispiel 1 Prozentsatz bestimmen
Eine weltweite Schätzung der erwachsenen Analphabeten ergab eine Gesamtzahl von 905 Millionen. Davon sind 587 Millionen Frauen.
Wie groß ist der Prozentsatz der erwachsenen weiblichen Analphabeten nach dieser Schätzung?
Lösung:
Gegeben: G = 905 Millionen Menschen; W = 587 Millionen Frauen
Gesucht: p %

$$p\,\% = \frac{W}{G} = \frac{587}{905} = 587:905 \approx 65\,\%.$$

Berechnung von Prozentwert und Grundwert:

Gegeben: Grundwert und Prozentsatz
Gesucht: Prozentwert

Aufgaben dieser Art sind bereits aus der Bruchrechnung bekannt.
Will man z.B. 20 % von 300 berechnen, so entspricht das der Bruchrechenaufgabe „Berechne $\frac{20}{100}$ von 300".

Man rechnet daher:
$\frac{20}{100} \cdot 300 = 0{,}2 \cdot 300 = 60.$
Also ergeben 20 % von 300 den Prozentwert 60.

Gegeben: Prozentwert und Prozentsatz
Gesucht: Grundwert

Gegeben sei der Prozentsatz 34 % und der Prozentwert 255. Man kann auch sagen: Dem Prozentsatz 34 % entspricht der Wert 255. Da dem Prozentsatz 100 % der gesuchte Grundwert entspricht, kann man den Grundwert mit einem Dreisatz bestimmen:

34 % entsprechen	255.
1 % entspricht	255 : 34 = 7,5.
100 % entsprechen	7,5 · 100 = 750.

Kurz: 255 : 34 · 100 = 750.
Also beträgt der Grundwert 750.

Wenn der Prozentsatz p % und der Grundwert G gegeben sind, berechnet man den Prozentwert, indem man p durch 100 dividiert und mit G multipliziert.

Wenn der Prozentsatz p % und der Prozentwert W gegeben sind, berechnet man den Grundwert, indem man W durch p dividiert und das Ergebnis mit 100 multipliziert.

Man benutzt den Formelcharakter nicht!

Zinsrechnung als Teil der Prozentrechnung:

Vokabeln aus dem Bankwesen	
Begriff	Übersetzung
Zinssatz	Prozentsatz p %
Zinsen	Prozentwert W
Guthaben oder Kapital	Grundwert G
ein Monat	30 Tage
ein Jahr	360 Tage
Nur neue Namen – Wir können rechnen wie bisher!	

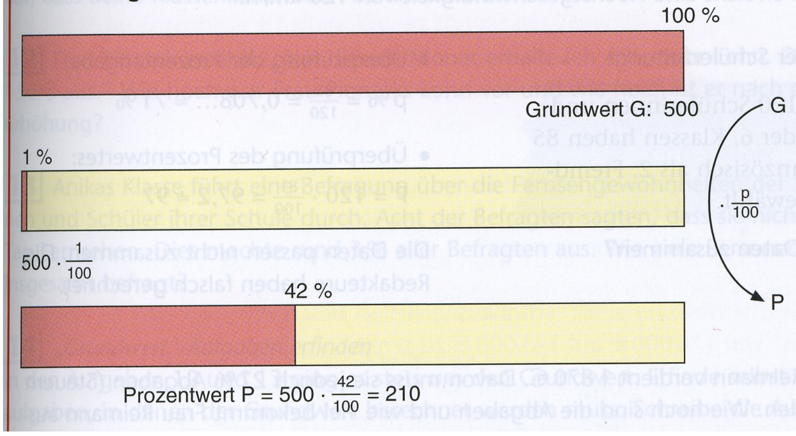
Wieder viele Begriffe!

Weil die Umformung von Formeln noch nicht an der Reihe ist.
Realisierung in den „Neuen Wegen“:

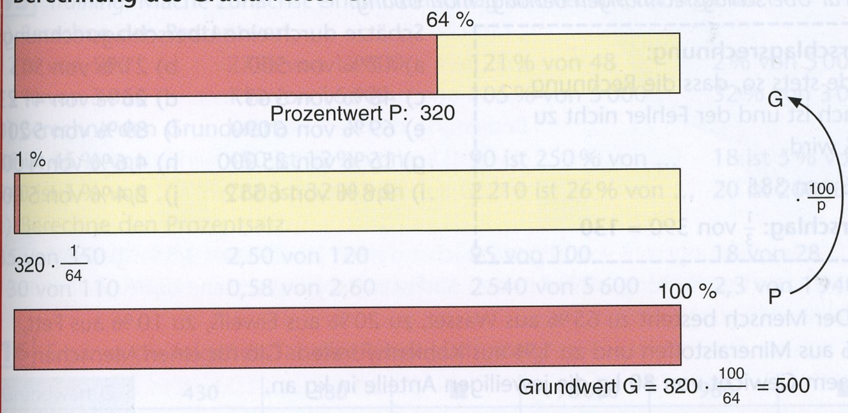
Begriffe bringen Ordnung in die Prozentrechnung: Im Satz „25 % von 40 € sind 10 €“ nennt man 40 € den **Grundwert G**; 25 % nennt man den **Prozentsatz p %**, und 10 € nennt man den **Prozentwert P.**
Der Grundwert G ist der Wert, der 100 % entspricht, der Prozentwert P entspricht dem Prozentsatz.

Und so wird gerechnet:

Gegeben sind der *Grundwert* G = 500 und der *Prozentsatz* p % = 42 %.
Berechnung des Prozentwertes P:



Gegeben sind der *Prozentwert* P = 320 und der *Prozentsatz* p % = 64 %.
Berechnung des Grundwertes G:



Graphische Veranschaulichung gut!
Aber sie braucht Zeit!

3.2.2 Zuordnungen

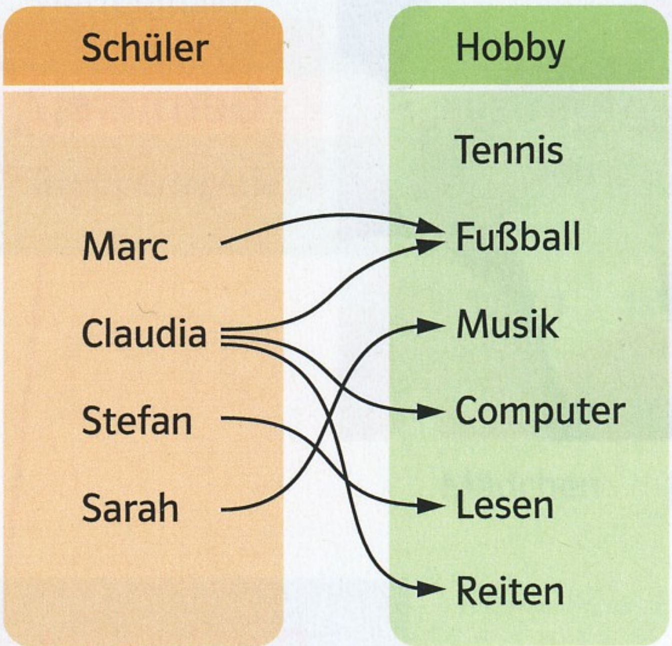
Von der Tabelle zum Schaubild

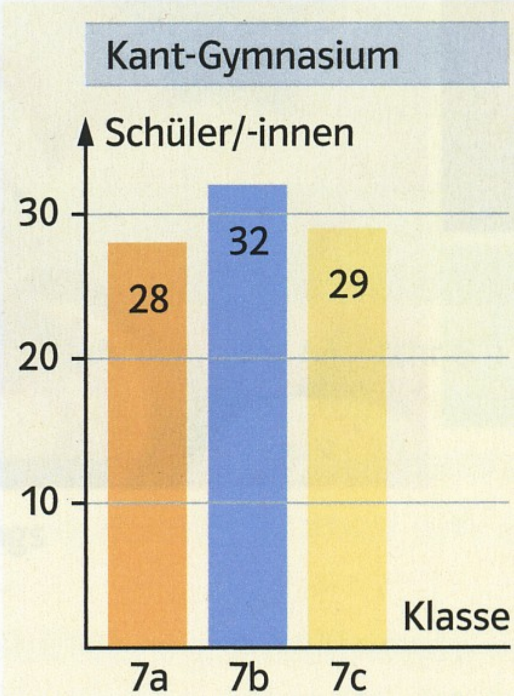
Cola	Preis
klein	0,50 €
mittel	1,00 €
groß	1,50 €

Fig. 1

Klasse	7a	7b	7c
Anzahl der Schüler/-innen	28	32	29

Fig. 2





Merksatz:

Zuordnungen können beispielsweise durch Tabellen, Grafiken, Pfeile oder Texte dargestellt werden.

Info

GTR – der grafikfähige Taschenrechner

Der grafikfähige Taschenrechner (kurz: GTR) ist ein Taschenrechner mit dem man – neben den üblichen Rechnungen – auch Wertetabellen und Graphen von Zuordnungen erstellen kann.

Das allgemeine Vorgehen und die Möglichkeiten sollen am Beispiel der Zuordnung $x \rightarrow y$, bei der sich der y-Wert mit der Gleichung $y = \frac{1}{2} \cdot x^2 - 1$ berechnen lässt, gezeigt werden.

Zunächst gibt man die Gleichung in den Rechner ein. Dazu wählt man das Fenster für die Eingabe aus (Fig. 1). Um die Wertetabelle anzuzeigen, wählt man das Tabellenfenster aus (Fig. 2).

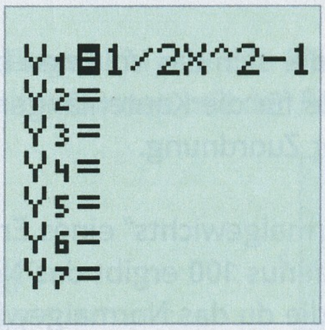


Fig. 1

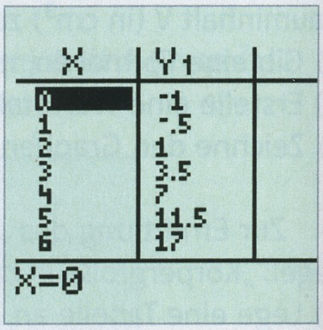


Fig. 2

Man kann die „Schrittweite“ verändern und erhält dann die Tabellenwerte in feineren Schritten (Fig. 3). Auch der Startwert der Tabelle kann eingestellt werden, oder man „rollt“ nach oben oder unten durch die Anzeige (Fig. 4).

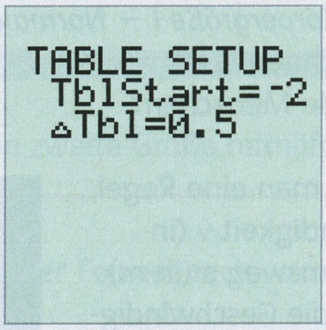


Fig. 3

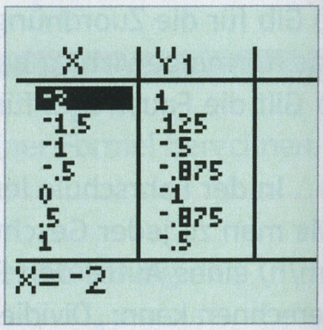


Fig. 4

Der Graph wird im Graph-Fenster angezeigt (Fig. 5). Falls der Ausschnitt zu klein oder zu groß ist, kann man die Grenzen anders einstellen (Fig. 6). Auch das „Zoomen“ wie beim Fotografieren ist möglich. Das Ablesen der y-Werte kann auch am Graphen erfolgen. Der Rechner zeigt den abgelesenen Punkt an (Fig. 7). Damit kann man leicht den Graphen in sein Heft übertragen.

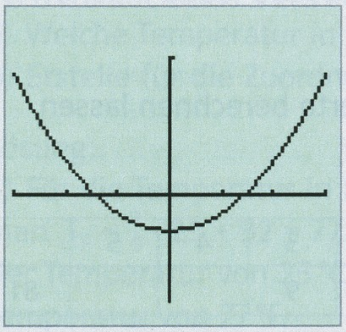


Fig. 5

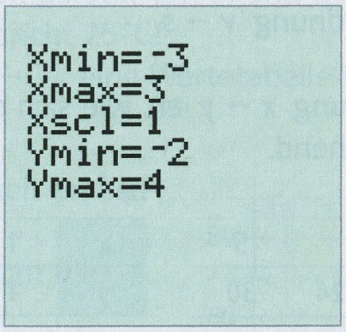


Fig. 6

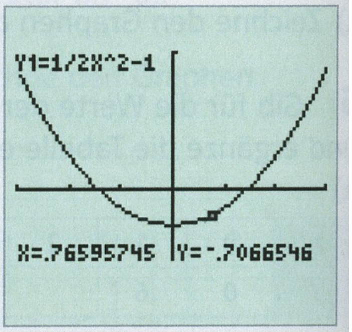


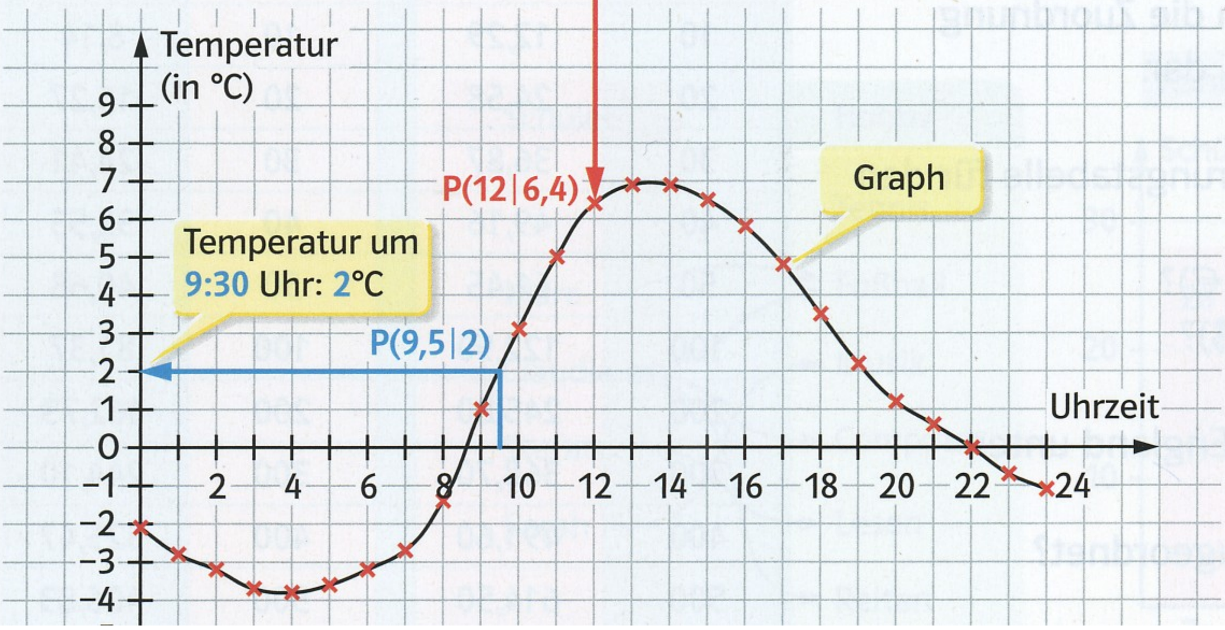
Fig. 7

Will man mehrere Zuordnungen grafisch darstellen, so müssen die dazugehörigen Gleichungen für die y-Werte im Eingabefenster (Fig. 1) unter $Y_1 =$, $Y_2 =$, $Y_3 = \ldots$ eingegeben werden.

Aufgaben, die mit dem GTR gelöst werden können, sind so gekennzeichnet.

Uhrzeit	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Temperaturen	−2,1	−2,8	−3,2	−3,7	−3,8	−3,6	−3,2	−2,7	−1,4	1,0	3,1	5,0	6,4	6,9

Wertepaare als Punkte im Koordinatensystem:
;... (6|−3,2); (7|−2,7); (8|−1,4); (9|1,0); (10|3,1); (11|5,0); (12|6,4); (13|6,9); ...



Immer auch auf Übersichtlichkeit achten!
Im Zusammenhang mit den Medien:
Folien vs. Entwicklung an der Tafel

Einsatz des grafischen Taschenrechners.
Der Einsatz muss wohlüberlegt sein!

Proportionale Zuordnung:

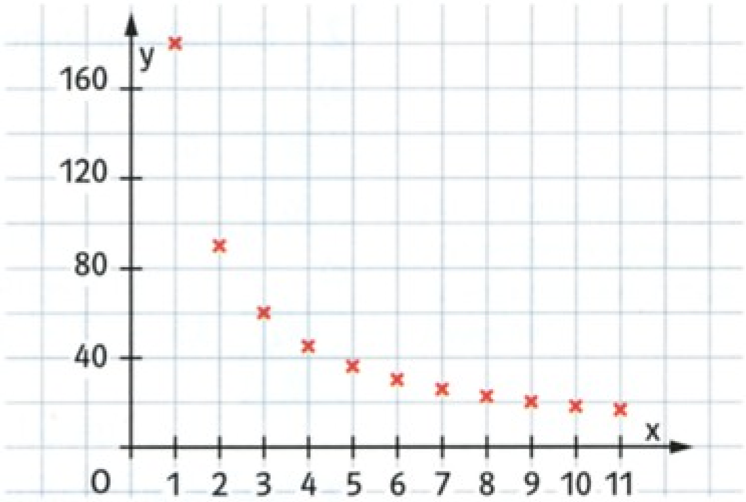
Wenn bei einer Zuordnung dem 2-, 3- bzw. n-fachen der ersten Größe jeweils das 2-, 3- bzw. n-fache der zweiten Größe zugeordnet ist, dann nennt man die Zuordnung **proportional**. In der Tabelle sind Werte der Zuordnung *Obstgewicht g → Preis p* angegeben.

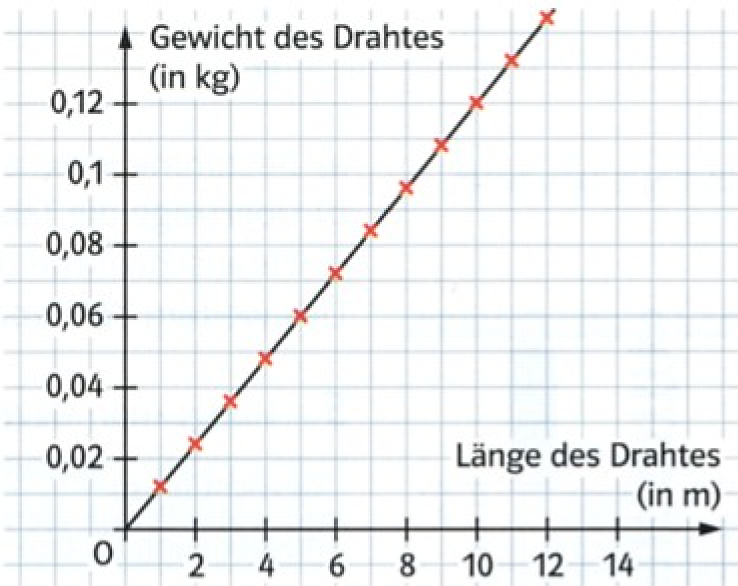
g: Gewicht (in kg)	0,5	1	2	3	5	10
p: Preis (in €)	1	2	4	6	10	20

Wenn bei einer Zuordnung dem 2-, 3- bzw. n-fache der ersten Größe jeweils der 2-te, 3-te bzw. n-te Teil der zweiten Größe zugeordnet ist, dann nennt man die Zuordnung **antiproportional**. In der Tabelle sind Werte der Zuordnung *Anzahl der Stücke a → Länge der Stücke l* angegeben.

a: Anzahl der Stücke	1	2	3	6	12	100
l: Länge der Stücke (in cm)	180	90	60	30	15	1,8

Schaubilder:

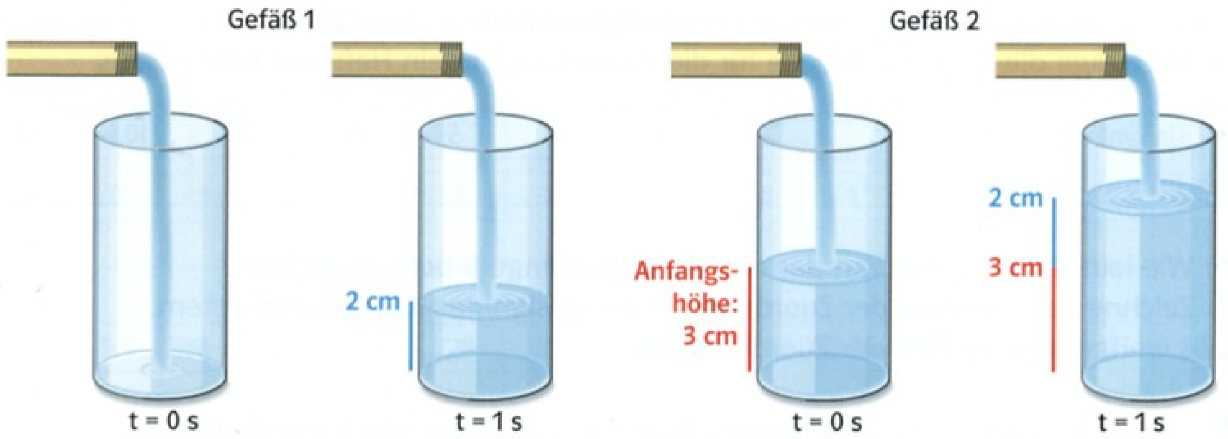




Lineare Zuordnungen:

Beispiel:

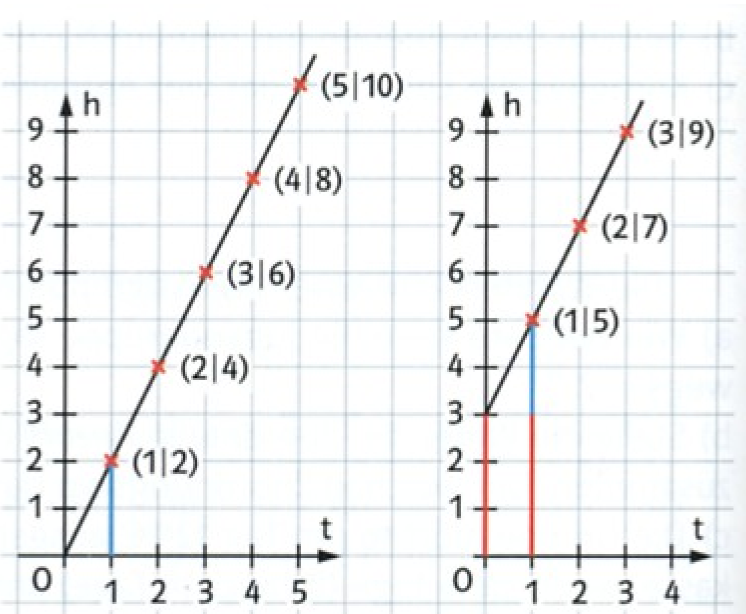
Aus einem Brunnenrohr fließt Wasser in zwei zylinderförmige Gefäße. Gefäß 1 (links) war zu Beginn leer, in Gefäß 2 (rechts) stand das Wasser zu Beginn 3 cm hoch. Pro Sekunde erhöht sich in beiden Gefäßen der Wasserstand um 2 cm.



Für die Zuordnung *Zeit t → Füllhöhe h* erhält man folgende Werte.

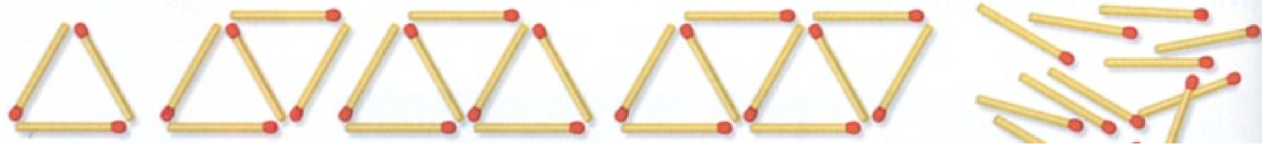
Gefäß 1						
t (in s)	0	1	2	3	4	5
h (in cm)	0	2	4	6	8	10

Gefäß 2						
t (in s)	0	1	2	3	4	5
h (in cm)	3	5	7	9	11	13



3.2.3 Aufstellen von Termen:

Wenn in einer Knobelaufgabe gefragt wird, wie viele Streichhölzer man zum Legen von 85 Dreiecken wie in Fig. 1 benötigt, wäre ein Abzählen sehr aufwändig. Man kann jedoch entdecken, dass zwischen der Anzahl der Dreiecke und der Anzahl der Streichhölzer ein Zusammenhang besteht. Dieser kann in einem **Term** formuliert werden.



Was ist ein Term?

Ein Term ist eine **Rechenvorschrift in Kurzform!**

1. Schritt: Man untersucht einfache Beispiele.

Anzahl der Streichhölzer		Bild der Kette
– für 1 Dreieck:	3	
– für 2 Dreiecke:	$3+2$	
– für 3 Dreiecke:	$3+2+2 = 3+2\cdot 2$	
– für 4 Dreiecke:	$3+3\cdot 2$	

Nun sieht man: Anzahl der Streichhölzer = 3 + (Anzahl der Dreiecke − 1) · 2.

2. Schritt: Man führt eine geeignete Variable ein.

d bezeichnet die Anzahl der Dreiecke

3. Schritt: Man schreibt die Rechenschritte der einfachen Beispiele mit der Variable auf.

Anzahl der Streichhölzer: $3 + (d - 1) \cdot 2$

Bezeichnet man die Anzahl der Streichhölzer mit S, erhält man die Formel $S = 3 + (d - 1) \cdot 2$. Setzt man für d die Anzahl der zu legenden Dreiecke ein, kann leicht die Anzahl der Streichhölzer berechnet werden: $S = 3 + (85 - 1) \cdot 2 = 171$. Für 85 Dreiecke werden 171 Streichhölzer benötigt.

Vom Term zur Formel!

Beim **Aufstellen von Formeln** ist folgendes Vorgehen oft hilfreich:
1. einfache Beispiele betrachten
2. Variable einführen und
3. einen Term formulieren.

Mit dem Term kann eine Formel aufgeschrieben werden.

3.2.4 Rechnen mit Termen

Beim Umformen bzw. Vereinfachen von Termen muss man sich an Regeln halten, damit ein äquivalenter (gleichwertiger) Term entsteht.
Im Wesentlichen muss man dabei drei Regeln beachten. Das Assoziativ- und Kommutativgesetz hast du in der vergangenen Lerneinheit geübt, und das Distributivgesetz wird jetzt behandelt.

Anknüpfen an bekannte Regeln:

Die Termumformung $2 \cdot (5 + 3) = 2 \cdot 8 = 16$ ist sofort einsichtig. Diese Umformung kann bei $2 \cdot (x + 3)$ nicht gemacht werden. Aufgrund der Rechenregeln für rationale Zahlen gilt: $2 \cdot (5 + 3) = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 3$ – das **Ausmultiplizieren**. Da bei einem Term für die Variable Zahlen eingesetzt werden können, sind diese Regeln auch auf Terme mit Variablen übertragbar: $2 \cdot (x + 3) = 2 \cdot x + 2 \cdot 3$.

Hier tritt der **Rechenaspekt** deutlich in Vordergrund!

Merksatz:

Die Rechengesetze für Terme leiten sich von den Rechenregeln für Zahlen ab:
$2 \cdot (3 + 4) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$ bzw. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
$2 \cdot (3 - 4) = 2 \cdot 3 - 2 \cdot 4$ bzw. $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$ heißen **Distributivgesetze**.
Darüber hinaus gelten die Rechenregeln
$2 + (3 + 4) = (2 + 3) + 4$ bzw. $a + (b + c) = (a + b) + c$
$2 \cdot (3 \cdot 4) = (2 \cdot 3) \cdot 4$ bzw. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ heißen **Assoziativgesetze**,
$2 + 3 = 3 + 2$ bzw. $a + b = b + a$
$2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$ bzw. $a \cdot b = b \cdot a$ heißen **Kommutativgesetze**.

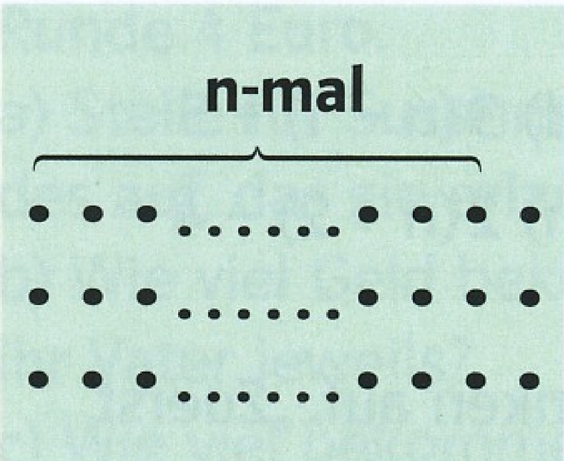
Äquivalenz begründen!

Beispiel 1 Äquivalenz begründen
Begründe die Äquivalenz der beiden Terme $3(n+1)$ und $3n+3$ zur Berechnung der Anzahl der Punkte in Fig. 1 a) anschaulich und b) rechnerisch.

Begründungen sind in diesem Zusammenhang eher Plausibilitätsbetrachtungen!

Man muss Begründungen kritisch betrachten:
Einerseits müssen mathematische Gesetze begründet werden, andererseits ist eine strenge Begründung nicht möglich!

a) anschaulich



$3(n+1)$
In einer Reihe sind $n+1$ Punkte. Davon gibt es 3 Reihen.

Fig. 1

b) rechnerisch

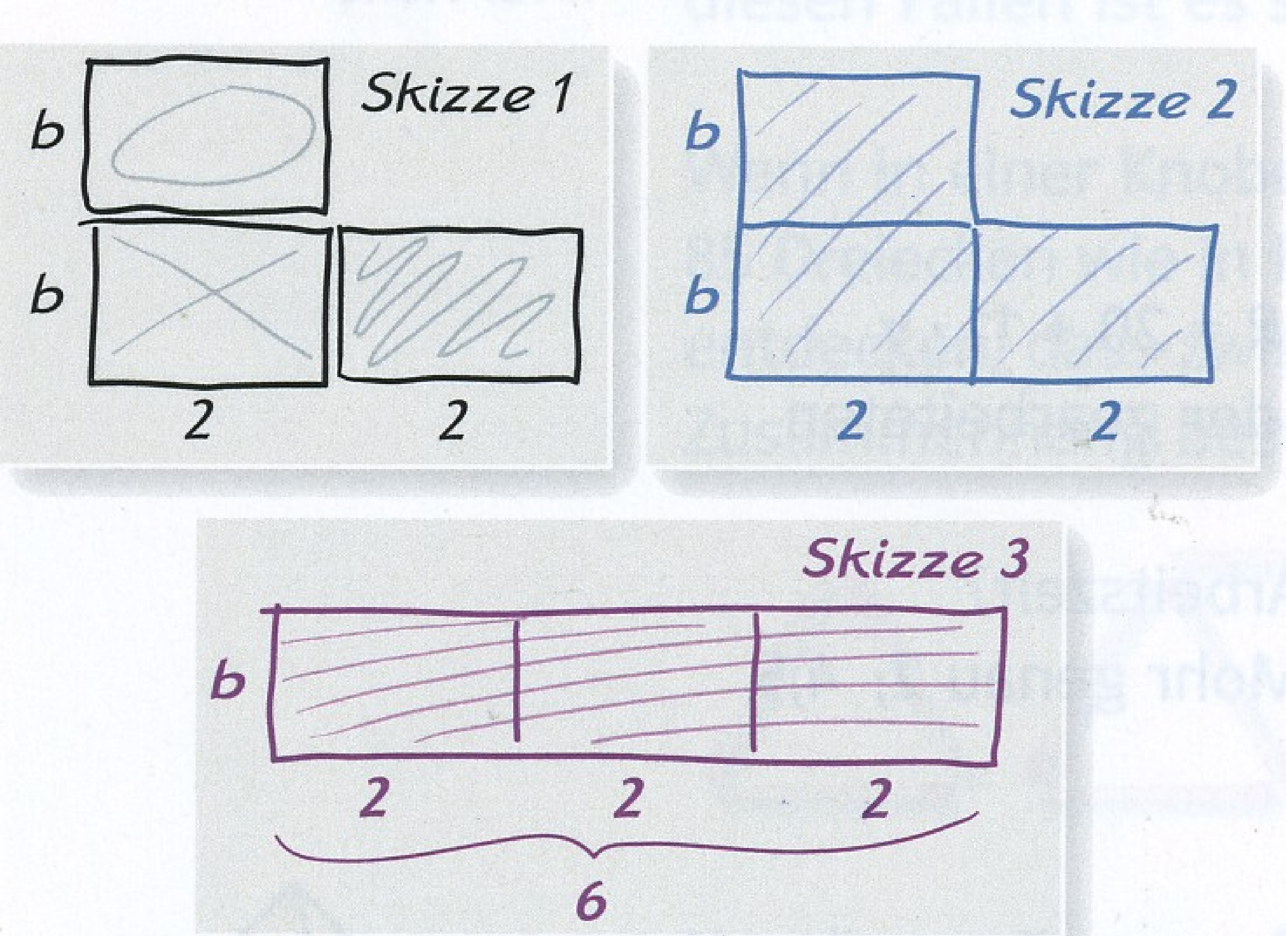
$3(n+1) = 3n + 3 \cdot 1 = 3n + 3$

oder

$3n + 3 = 3n + 3 \cdot 1 = 3(n+1)$

3.2.3 **Termumformung (Vereinfachen von Termen)**

In den vergangenen Jahrzehnten ist dieser Teil wochenlang geübt worden. Unter dem Zwang der Schulzeitverkürzung muss auch dies reduziert werden.



nach Skizze 1 mit $2 \cdot b + 2 \cdot b + 2 \cdot b$,
Tom nach Skizze 2 mit $3 \cdot (2 \cdot b)$ und
Lisa nach Skizze 3 mit $6 \cdot b$.

Die Terme geben verschiedene Rechenwege an. Bei jeder Einsetzung für b ergeben sie aber trotzdem jeweils denselben Wert.

$$2 \cdot b + 2 \cdot b + 2 \cdot b = 3 \cdot (2 \cdot b) = 6 \cdot b$$

Äquivalenz !

Merksatz:

Wenn ein Term nach den gültigen Rechengesetzen umgeformt wird, erhält man einen äquivalenten Term. Durch Umformen kann man Terme oft zielgerichtet vereinfachen.

Übungen:

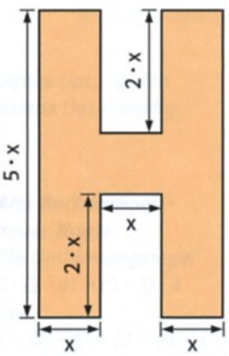


Fig. 1

7 Die Freunde Horst, Helmut und Hanna finden in einer Zeitschrift eine Skizze für ein Drahtmodell des Buchstaben H (Fig. 1) mit dem Titel: Für jeden die gewünschte Größe. Jeder überlegt sich einen Plan zum Nachbauen und stellt einen Term für die benötigte Drahtlänge auf.

Horst: $2 \cdot x + 2 \cdot 2 \cdot x + x + 2 \cdot x + 2 \cdot 2 \cdot x + x + 2 \cdot 5 \cdot x$

Helmut: $x + 2 \cdot x + x + 2 \cdot x + x + 5 \cdot x + x + 2 \cdot x + x + 2 \cdot x + x + 5 \cdot x$

Hanna: $2 \cdot (3 \cdot x) + 4 \cdot 2 \cdot x + 2 \cdot 5 \cdot x$

a) Erläutere mithilfe einer Skizze, welche Überlegungen sich Horst, Helmut und Hanna beim Aufstellen ihres Terms jeweils gemacht haben müssen.

b) Begründe, dass die Terme äquivalent sind.

c) Findest du einen einfacheren Term zur Berechnung der Drahtlänge?

Zaubertricks:

den Ziffern. Bilde aus den drei Ziffern die größtmögliche und die kleinstmögliche Zahl. Subtrahiere nun die kleinstmögliche Zahl von der größtmöglichen Zahl und merke dir das Ergebnis. … Simsalabim …: Es ist 198."

größtmögliche Zahl: $(z + 1) \cdot 100 + z \cdot 10 + (z - 1) \cdot 1$ wie $4 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 2 \cdot 1$

kleinstmögliche Zahl: $(z - 1) \cdot 100 + z \cdot 10 + (z + 1) \cdot 1$ wie $2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 1$

Suchen Sie attraktive Aufgaben!

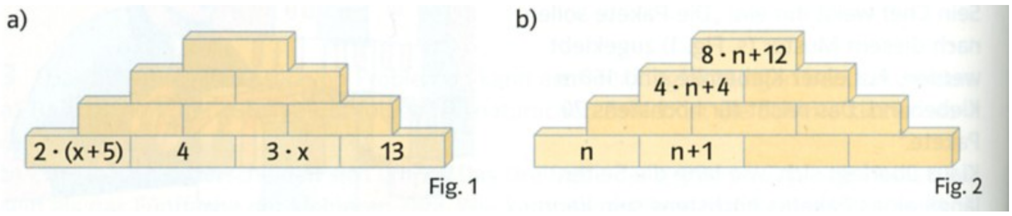


Fig. 1 Fig. 2

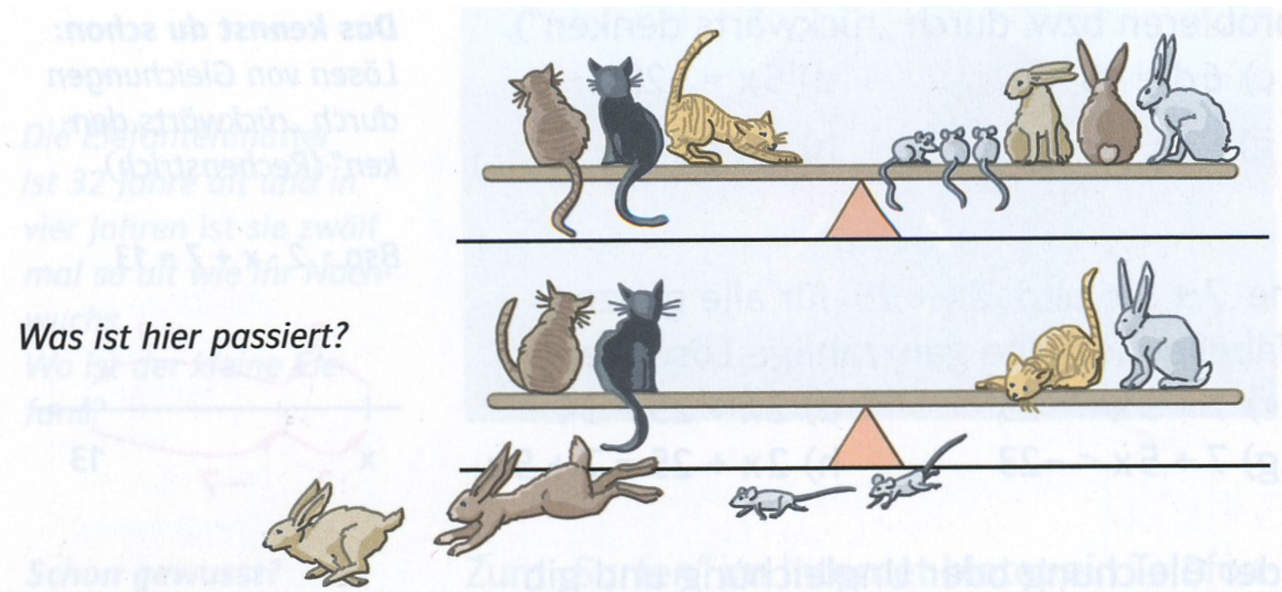
3.2.5 Gleichungen und Ungleichungen

Gleichungen

Was sind Lösungen einer Gleichung?

Alle Zahlen, die beim Einsetzen für x eine Gleichung wie
$4{,}5x + 6{,}5 = 20$ erfüllen, heißen Lösung dieser Gleichung.

Äquivalenzumformungen:



Vorstellung bei einer Gleichung: Waage

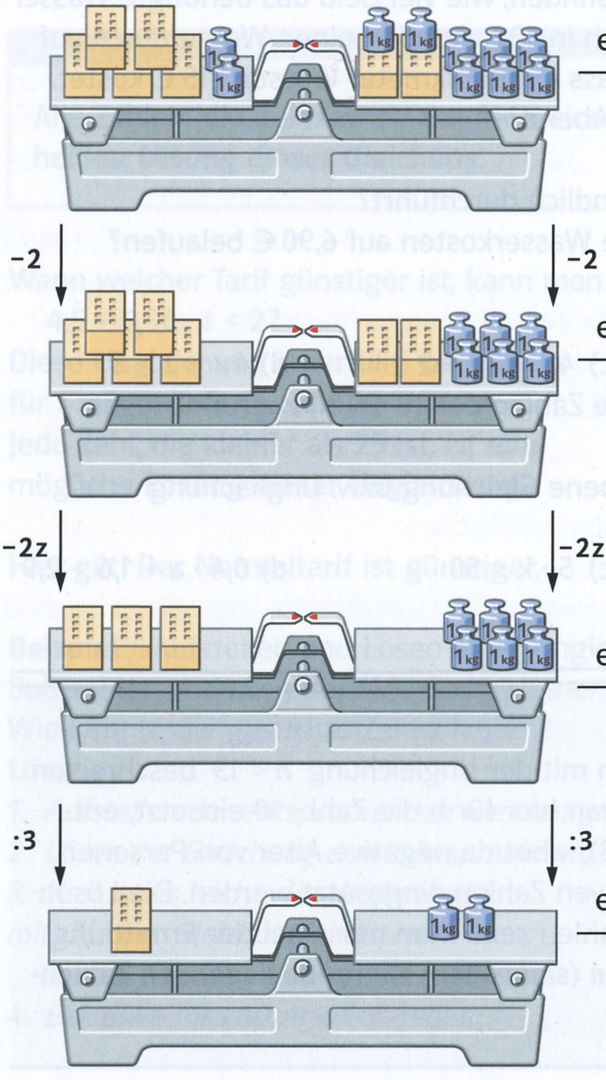
Was ist eine **Äquivalenzumformung**?

Grundsätzlich: Eine Äquivalenzumformung ist eine Umformung, bei der alle Lösungen erhalten bleiben und keine neuen hinzukommen.

Wichtige Äquivalenzumformungen sind
Beidseitige Addition oder Subtraktion einer Zahl oder eines Terms
Beidseitige Mult. oder Division mit einer Zahl ungleich 0.

Bei der Waage darf man auf beiden Seiten Steine und Gewichte so wegnehmen, dass das Gleichgewicht erhalten bleibt:

Bei der Gleichung darf man auf beiden Seiten solche Umformungen durchführen, bei denen alle Lösungen erhalten bleiben bzw. keine Lösungen hinzukommen:



entspricht $5z + 2 = 2z + 8$

Zuerst wird auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens die gleiche Anzahl von Gewichten subtrahiert – hier 2 mal 1 kg:

entspricht
$$5z + 2 = 2z + 8$$
$$5z = 2z + 6$$

Anschließend kann man auf beiden Seiten die gleiche Anzahl Ziegelsteine subtrahieren – hier jeweils 2 Steine:

entspricht
$$5z = 2z + 6$$
$$3z = 6$$

Abschließend kann man auf beiden Seiten alles durch 3 dividieren:

entspricht
$$3z : 3 = 6 : 3$$
$$z = 2$$

Lösung:
Ein Ziegelstein wiegt demnach 2 kg.

Fig. 1

3.3 Nichtlineare Terme mit mehreren Variablen

Man unterscheidet Terme mit einer und mit mehreren Variablen, sowie lineare und nichtlineare Terme.
Linearer Term mit mehreren Variablen:
$2a + 4b - 5c + 1{,}2$ (Klasse 7)
Nichtlinearer Term mit mehreren Variablen:
$3a - 0{,}5ab^2 + 8b^2c^3 - 4$ (Klasse 8)

Systematik der Termumformungen:

1. Umformen von Summen:
   $3a - 7 + 4b - 5a + 1$
2. Umformen von Produkten:
   $3b^2ca^3ba$
3. Addieren von Produkten:
   $2ab - 3a + 4b + ab$
4. Addieren von Produkten mit Potenzen
   $x^2y + 3xy^2 - xy - xyx + 4xy - 3yxy$
5. Multiplizieren von Summen:
   $(a + b)(u + v)$
   Unbedingt Farben verwenden und grafisch darstellen!
6. Spezialfall: Binomische Formeln
   $(a + b)^2 = \ldots$
   $(a - b)^2 = \ldots$
   $(a + b)(a - b) = \ldots$

   wird jetzt weniger stark thematisiert, insbesondere wird nicht mehr verlangt, die Formeln auswendig zu lernen.
   Die Formeln sollen aus dem Distributivgesetz hergeleitet werden. Allerdings halte ich insbesondere die 3. binomische Formel für so wichtig, dass diese die SuS auswendig können sollten. Denn es kommt nicht nur auf die Richtung von **links nach rechts**, sondern auch auf die von **rechts nach links** an.