

DIDAKTIK DER MATHEMATIK  
MATHEMATISCHES INSTITUT  
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT  
FREIBURG IM BREISGAU



## Mathematik jenseits des Klassenzimmers

### Ausarbeitung der Lernumgebungen

**Seminarleitung:**  
Martin Kramer

**Assistenz:**  
Andreas Sandtner  
Georg Waadt

Sommersemester 2017

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>3</b>
<b>1 Kartographie und Schatzsuche</b> <b>(Maximilian Gerhards)</b>	<b>4</b>
1.1 Herz der Sache . . . . .	4
1.2 Bezug zum Bildungsplan . . . . .	4
1.3 Konkrete Umsetzung . . . . .	5
1.3.1 Rahmenbedingungen . . . . .	5
1.3.2 Durchführung . . . . .	5
1.3.3 Anpassungsmöglichkeiten . . . . .	9
1.4 Didaktische/pädagogische Hintergründe . . . . .	10
<b>2 Bestimmung der Höhe eines Baumes</b> <b>(Michael Schwald)</b>	<b>12</b>
2.1 Herz der Sache . . . . .	13
2.2 Bezug zum Bildungsplan . . . . .	13
2.3 Konkrete Umsetzung . . . . .	13
2.3.1 Rahmenbedingungen . . . . .	13
2.3.2 Durchführung . . . . .	14
2.4 Didaktische/pädagogische Hintergründe . . . . .	15
<b>3 Wasserrakete</b> <b>(Johanna Kaiser, Judith Regenscheit)</b>	<b>17</b>
3.1 Herz der Sache . . . . .	17
3.2 Bezug zum Bildungsplan . . . . .	17
3.3 Konkrete Umsetzung . . . . .	18
3.3.1 Rahmenbedingungen . . . . .	18
3.3.2 Durchführung . . . . .	20
3.4 Didaktische/pädagogische Hintergründe . . . . .	22
<b>4 Die Mathematik im Puls</b> <b>(Ines Ayeb, Moritz Springer)</b>	<b>23</b>
4.1 Herz der Sache . . . . .	23
4.2 Bezug zum Bildungsplan . . . . .	23
4.3 Konkrete Umsetzung . . . . .	24
4.3.1 Rahmenbedingungen . . . . .	24
4.3.2 Durchführung . . . . .	24
4.4 Didaktische/pädagogische Hintergründe . . . . .	26
4.5 Anmerkungen zur Technik und Weiterführung der Lernumgebung: . . . . .	28
<b>5 Eine mathematische Symphonie</b> <b>(David Brooke, Vincent Kliem)</b>	<b>30</b>
5.1 Herz der Sache . . . . .	30
5.2 Bezug zum Bildungsplan . . . . .	30
5.3 Konkrete Umsetzung . . . . .	31
5.3.1 Rahmenbedingungen . . . . .	31

5.3.2	Durchführung . . . . .	32
5.4	Didaktische/pädagogische Hintergründe . . . . .	34
5.5	Anhang: Handout . . . . .	36

# Vorwort

Im Sommersemester 2017 konnte an der Universität Freiburg von der Abteilung Didaktik der Mathematik zum wiederholten Male das Seminar "Mathematik jenseits des Klassenzimmers" angeboten werden. Die in diesem Dokument zusammengestellten Lernumgebungen wurden im Rahmen dieses Seminars von den genannten Studentinnen und Studenten des Lehramtsstudiums Mathematik erstellt und während der einwöchigen Intensivphase des Seminars auf dem Schwarzhornhaus bei Schwäbisch Gmünd<sup>1</sup> umgesetzt und reflektiert. Ziel dieser Zusammenfassung ist es, Lehrerinnen und Lehrern des MINT-Bereichs Anregungen sowie konkrete in der Praxis erprobte Beispiele für die Gestaltung des eigenen Unterrichts zu geben.

---

<sup>1</sup>Für die Website des Hauses siehe <http://www.schwarzhornhaus.de/meta/start.html>.

# 1 Kartographie und Schatzsuche (Maximilian Gerhards)



Abbildung 1.1: Die Vermessung der Welt

## 1.1 Herz der Sache

Was macht eine Landkarte aus? Auf welche Details kommt es an, wenn sie ein anderer nutzen soll?

Die Schüler zeichnen im ersten Teil der Lernumgebung in getrennten Gruppen Landkarten; im zweiten Teil dienen diese der jeweils anderen Gruppe als Schatzkarte. Belohnt wird dabei die funktionierende Kommunikation zwischen den beiden Gruppen, die nur in Form der Karten stattfindet.

## 1.2 Bezug zum Bildungsplan

Die Lernumgebung ist eine herausfordernde Übung in Komplexitätsreduktion. In den Worten des Bildungsplans fördert sie in erster Linie die „prozessbezogene Kompetenz“ **Modellieren** im Zusammenspiel mit den „Leitideen“ **Messen, Raum und Form** sowie **funktionaler Zusammenhang**. Der Anspruch der Übung leitet sich nicht aus den verwendeten mathematischen Methoden her – für ebenes Gelände genügen Kenntnisse von Längenmessung (Klassenstufe 5/6), Winkeln (Klassenstufe 5/6), maßstäblichen Zeichnungen (Klassenstufe 5/6) sowie deren Verwendung zur Erschließung von Streckenlängen

(Klassenstufe 7/8), für Gelände mit Höhenprofil darüber hinaus trigonometrische Zusammenhänge (Klassenstufe 9/10) – sondern darin einzuschätzen, welche dieser Methoden unter den gegebenen Zeitvorgaben am effektivsten sind und wie sie in einer nicht standardisierten Umgebung eingesetzt werden können. In der Durchführung im Rahmen des Seminars kamen fortgeschrittene Mathematikstudenten an ihre Grenzen.

Der Schwierigkeitsgrad kann vom Durchführenden durch die Wahl des Geländes, des Maßstabs und der verfügbaren Zeit beeinflusst werden, sodass die Lernumgebung für jede Klassenstufe des Gymnasiums einsetzbar ist.

## **1.3 Konkrete Umsetzung**

### **1.3.1 Rahmenbedingungen**

#### **Vorbereitung**

Erkundung des Geländes (auch mit Blick auf Gefahrenpotential) und Auswahl von zwei bis drei Gebieten, die nicht direkt aneinander grenzen.

#### **Material**

Papiere, Stifte sind notwendig, Geodreiecke und Schnüre empfehlenswert, von den Schülern selbst gestellte Messgeräte optional. Zur Belohnung der Kartierung und als Schatzgut teilbare Süßigkeiten.

#### **Zeit**

Einführung in die Kartierung und Vorbereitung der Teilnehmenden 45 Minuten, Kartierung 90 Minuten, Einführung in die Schatzsuche 15 Minuten, Eintragen der Schätze 15 Minuten, Schatzsuche 10 Minuten. Dazu kommen die Wegzeiten zum und vom Gelände. Für Anwendung in der Schule mit einer angenommenen Wegzeit von weniger als 15 Minuten pro Strecke wäre eine Aufteilung wie folgt denkbar:

1. Doppelstunde: Einführung in die Kartierung 30 Minuten, Begehung des Geländes 30 Minuten  
Hausaufgabe: Vorbereitung, insbesondere Wahl der Hilfsmittel
2. Doppelstunde: Kartierung 60 Minuten
3. Doppelstunde: Einführung in die Schatzsuche 15 Minuten, Eintragen der Schätze 15 Minuten, Schatzsuche 10 Minuten

### **1.3.2 Durchführung**

Die Lernumgebung ist natürlich in zwei Teile gegliedert, die durch zwei verschiedene Spielstrukturen eingerahmt sind und optimalerweise in einem zeitlichen Abstand voneinander durchgeführt werden, aber inhaltlich aufeinander aufbauen. Der erste Teil, die Erstellung der Landkarte, ist notwendige Grundlage für den zweiten, ihre Verwendung als Schatzkarte.

Die folgende Durchführung ist die im Rahmen des Seminars mit 11 Teilnehmern durchgeführte. Anmerkungen zu Anpassungen für die Schule folgen im Anschluss.



Abbildung 1.2: Die Expedition

## Einführung

Der erste Teil wird durch eine Rahmengeschichte im 19. Jahrhundert angesiedelt. Inhaltlich ergibt sich dadurch der Vorteil, dass moderne Hilfsmittel wie GPS-Geräte, Entfernungsmessgeräte oder Taschenrechner, die die Lernumgebung zu sehr umgestalten würden, durch eine im Spiel begründete Regel ausgeschlossen werden. Der Anleitende übernimmt die Rolle eines Vertreters der fiktiven „Royal Geographic Society“, der den Teilnehmern als seinen Kartographenkollegen den Auftrag gibt, eine Expedition in zwei der letzten weißen Flecken der Erde zu unternehmen, um diese mit ihren Karten auszufüllen. Dazu finden sich die Teilnehmer selbstständig zu zwei Teams zusammen, die je eines der Gebiete zugewiesen bekommen, und die sich wiederum in je zwei Arbeitsgruppen von zwei bis drei Leuten aufteilen. Jede Arbeitsgruppe erhält den Auftrag, je eine Hälfte der beiden Gebiete auf einem vom Anleitenden zur Verfügung gestelltes A4-Papier zu kartieren, sodass sich die halben Karten jedes Gebietes in einem Streifen überlappen und damit für jedes Gebiet eine zusammengesetzte Karte ergeben. Zur Identifikation werden die Teams gebeten, sich einen Namen zu geben und eine Flagge zu gestalten.



Abbildung 1.3: Zwei Teilkarten

## Vorbereitung der Kartierung

Zur Vorbereitung wird es den Teilnehmern freigestellt, welche Hilfsmittel zusätzlich zu den vom Anleiter mitgebrachten Schnüren sie gerne verwenden würden. Diese müssen dann der „Royal Geographic Society“ zur Prüfung vorgelegt und genehmigt werden. So dann beginnt die „Expedition“. Kurz vor der Ankunft werden die Teilnehmer über die Spielregeln informiert, die sich wieder aus der Geschichte ergeben: Das Gebiet gehört gefährlichen Eingeborenen, die durch einen Vertrag ruhiggestellt werden konnten. Dieser sieht allerdings vor, dass sich zu jedem Zeitpunkt in jedem der beiden Halbgebiete nur

drei Leute, also eine der Arbeitsgruppen, aufhalten dürfen. Zur Absprache durften sich Leute der Arbeitsgruppen im gleichen Gebiet in jeder halben Stunde für eine Minute im gemeinsam kartierten Steifen treffen – auch hier höchstens drei –, was allerdings kaum für notwendig erachtet wurde.

### **Kartierung**

Dann werden die Teams in ihre Gebiete geführt, deren Mittelpunkt durch ihre in den Boden gerammte Flagge gekennzeichnet wird. Sie haben von dem Moment an 90 Minuten Zeit, eine Karte im Maßstab 1:300 auf die zur Verfügung gestellten Papiere zu zeichnen, die den Anspruch hat, danach einer fremden Person die Möglichkeit zu geben, markierte Punkte – die Schätze der zweiten Lernumgebung – aufzufinden. Nach Ablauf der 90 Minuten werden die gezeichneten Karten eingesammelt, die Teilnehmer angehalten, ihr Material mitzunehmen – wobei die Flaggen als Symbol an Ort und Stelle gelassen wurden – und nach der Rückkehr von der „Expedition“ mit Süßigkeiten für ihren „wertvollen Beitrag für die Wissenschaft“ belohnt.



Abbildung 1.4: Beim Kartographieren

### **Vorbereitung der Schatzsuche**

Der zweite Teil beginnt mit einem „Zeitsprung“ in die Jetztzeit. Als Brücke wurde eine 125-Jahr-Feier der im ersten Teil gegründeten Forschungsinstitute (Teams) verwendet. Die Teilnehmer sind nun zwei Gruppen von Archäologen dieser Forschungsinstitute, die in den kartierten Gebieten nach verborgenen Schätzen suchen sollen, wobei sie ihr Kartenmaterial wieder von der „Royal Geographic Society“ zur Verfügung gestellt bekommen.



Abbildung 1.5: Einzeichnen der Schatzposition

### **Eintragen der Schätze**

Die Gruppen werden nun wieder in ihre eigenen Gebiete geführt. Dort dürfen sie nacheinander beobachten, wo der Anleitende die Schätze (Süßigkeitenpackungen) versteckt, und ihre Positionen in ihren Karten eintragen.

### **Schatzsuche**

Danach werden die Karten den jeweils anderen mit der Anweisung gegeben, die Schätze innerhalb von 10 Minuten zu bergen. Im Erfolgsfall teilen sich die Gruppen den Schatz – als Belohnung für ihre gemeinsam erbrachte Leistung, die Zeichnung der Karte und ihre erfolgreiche Verwendung –, andernfalls verbleibt er beim Anleitenden. Als Erklärung für die begrenzte Zeit bietet sich wiederum eine spielinterne an, etwa Giftbelastung durch Rohstoffraubbau.

### **1.3.3 Anpassungsmöglichkeiten**

Für eine größere Anzahl von Teilnehmern kann die Zahl der Gebiete (und damit Teams), die Zahl der Arbeitsgruppen pro Gebiet oder die Größe der Arbeitsgruppen erhöht werden.

Bei einer Klassengröße von 24 Schülern könnten sich drei Gebiete mit je zwei Teilgebieten und Arbeitsgruppen von 4 Leuten anbieten. Bei 30 Schülern wären zwei Gebiete mit je vier Teilgebieten und Arbeitsgruppen von 3-4 Leuten denkbar.

Es kann vielleicht nützlich sein, eine Belohnung für die Kartierung schon nach der Hälfte der Zeit auszugeben, die Erfolgserlebnisse stellen sich meist erst gegen Ende der Zeit ein.

Paradoxerweise ist die Lernumgebung tendenziell leichter, wenn weniger Material zur Verfügung steht. Material verführt dazu, benutzt zu werden. Maßbänder zum Beispiel legen eine Genauigkeit im Messen nahe, die der zur Verfügung stehenden Zeit und möglichen Arbeitsgenauigkeit kein bisschen entspricht.

Die Besprechungen der verschiedenen Arbeitsgruppen innerhalb eines Teams wurden kaum als notwendig erachtet. Ihre zeitliche Beschränkung ist vielleicht nicht notwendig.

## **1.4 Didaktische/pädagogische Hintergründe**

### **Kommunikation**

Die Lernumgebung verdeutlicht das Grundprinzip der Kommunikation: Es gehören immer zwei dazu, ein Sender und ein Empfänger. Damit die Kommunikation gelingt, also die Karte als Schatzkarte erfolgreich genutzt werden kann, müssen beide ihr Teil gut machen. Die Karte muss die Umgebung gut genug abbilden und die andere Gruppe muss die Informationen so gut auswerten, dass sie das Ziel findet. Dementsprechend werden beide Gruppen in diesem Fall belohnt.

Was die Kommunikation erschwert, ist die Tatsache, dass die Gruppen nicht über die Methode der Kommunikation Einigkeit haben, bevor sie geschieht. Wie das Modell der Wirklichkeit, das die Karte darstellt, mit der Wirklichkeit selbst in Beziehung steht, ist für die „Zeichner“ vielleicht selbstverständlich, für die „Leser“ aber vielleicht überhaupt nicht. In dieser Situation erkennen die Schüler vielleicht den Nutzen standardisierter Kartensymbole für die Praxis.

### **Konstruktivismus**

Die Karten werden trotz gewisser Ähnlichkeiten sehr verschieden aussehen. Auf welche Einzelheiten die Schüler bei ihrer Erstellung Augenmerk gelegt haben, welche Abstraktionen oder Vereinfachungen sie vorgenommen haben und wie sie das zu Papier gebracht haben, wird sehr verschieden sein. Vergleichbares geschieht auf einer abstrakteren Ebene immer, wenn sich verschiedene Menschen ein Wissens„gebiet“ erschließen. Das Bild, das sie sich machen, wird nicht zweimal dasselbe sein.

Der Effekt wird in dieser Lernumgebung dadurch befördert, dass die Schüler gerade keine Schatzkarte zeichnen. Zu dem Zeitpunkt, wenn sie an der Karte arbeiten, können sie nicht wissen, wo der Schatz später liegen wird, und auf welche Bereiche oder Details es später bei der Verwendung ankommen wird. Es wäre eine vollkommen andere Übung, wenn ihnen zu dem Zeitpunkt die Position des Schatzes bereits bekannt wäre. Übertragen auf den Wissenserwerb bedeutet das: Sich mit einem Wissensgebiet zu beschäftigen ohne zu wissen, welcher Teil davon später wie angewandt werden wird, erfordert eine ganz andere Herangehensweise als die zielgerichtete Vorbereitung auf eine Abfrage durch ähnlich formulierte Übungen.

### **Freiheit und Struktur**

Vorgegeben sind das Ziel und die Spielregeln, durch das Genehmigen des Materials auch ein Teil der Hilfsmittel. Die Methoden der eigentlichen Kartographie, angefangen von der

Wahl der Messgeräte über ihre Verwendung, die Wahl der Modellparameter, den Detailgrad bis hin zur verwendeten Symbolik der Karte bleiben den Schülern überlassen. Ob die Wahl „richtig“ war, entscheidet nicht der Lehrer, sondern der Erfolg der Schatzsuche.

### **Persönlicher Bezug**

Die Flaggen als Identifikationsobjekt der Teams finden enormen Anklang bei den Teilnehmern, wenn sie zum zweiten Teil der Lernumgebung dorthin zurückkehren und sie wiederfinden, wie sie sie zurückgelassen haben, nur durch die Witterungsbedingungen „gealtert“.

## 2 Bestimmung der Höhe eines Baumes (Michael Schwald)



Abbildung 2.1: Der ausgewählte Baum

## 2.1 Herz der Sache

Die Höhe eines Baumes bestimmen – so simpel und alltäglich Bäume auch sind, stellt man schnell fest, dass es ohne geeignete Mittel nur schwer ist, eine solche Größe zu bestimmen, oder genauer zu schätzen. Da viele Informationen wie Gewicht, Alter und Höhe eines Baumes nur nach deren Fällung genau ermittelt werden können, gewinnt eine exakte Bestimmung der Höhe bei Erhaltung der Bäume an Relevanz.

## 2.2 Bezug zum Bildungsplan

- Leitidee Messen: Schätzen der Baumhöhe, Messen von Entfernungen und Winkelweiten in der Umgebung des Baumes (Klasse 5/6)
- Leitidee Raum und Form: Anwendung der Strahlensätze (Klasse 7/8), Anwendung der Trigonometrischen Funktionen im Alltag (Klasse 9/10)
- Kompetenz Probleme lösen: Durch Verwendung verschiedener Darstellungen das Problem durchdringen oder umformulieren; das Problem auf bekanntes zurückführen oder Analogien herstellen; kritisch prüfen, inwieweit eine Problemlösung erreicht wurde; Fehler analysieren und konstruktiv nutzen; Lösungswege vergleichen

## 2.3 Konkrete Umsetzung

### 2.3.1 Rahmenbedingungen

#### Zielgruppe

Klasse 8-10

Voraussetzung: Formeln zu rechtwinkligen Dreiecken, Winkelfunktionen oder Strahlensatz.

#### Material

Die folgenden Gegenständen können vom Lehrer oder den Schülern mitgebracht werden: Zollstöcke, Maßbänder, Geodreiecke, Taschenrechner, Formelsammlungen, Schnüre, Zettel, Stifte, Stoppuhr, Bilderrahmen, eventuell eine Decke und einen Tisch (Materialladen), etc.

Vom Lehrer mitzubringen: Gummibärchen, Lose zur Gruppeneinteilung, Gefäße für Bezahlssystem

#### Ort

In direkter Umgebung eines geeigneten Baumes (Ausgewählt vom Lehrer). Idealerweise sollte dieser sehr groß und gut einsehbar aus der Umgebung sein.

#### Zeit und Vorbereitung

Lose zu einer geeigneten Gruppenfindung à 3-4 Schüler vorbereiten (Gruppennummern oder Farbgruppen). Anschließend kann man entsprechend der Gruppenanzahl ihr Budget an Gummibärchen vorbereiten. Für die Durchführung sollten ca. 90 Minuten veranschlagt werden (An- und Abreisezeit sowie Errichtung eines Materialladens nicht eingerechnet).



Abbildung 2.2: Bezahlssystem und Materialladen

### 2.3.2 Durchführung

1. Die Schüler werden aufgefordert sich vor dem Zielort zu begeben und das mitgebrachte Material an einem zentralen Ort vor dem Baum zu platzieren (dies wird der Laden). Wenn die Schüler in einem Kreis davor versammelt sind wird die Lernumgebung mit einer Geschichte gestartet.
2. Die Lehrperson übernimmt die Rolle des Instituts für Forstwissenschaft, die Schüler sind anerkannte Wissenschaftler und Mathematiker. Sie wurden herbeirufen um die Sicherheit von Straßen und Waldwegen zu verbessern. Es wird dann erklärt dass die Baumhöhe proportional zu ihrem Gefährdungspotential sei (Blitzschlag, Sturm, etc.). Die Schüler werden um ihren Schätzwert, zur Höhe des Ausgewählten Baumes abzugeben und dann per Handzeichen (oder mündlich) abgefragt.
3. Es wird erläutert, dass das Ziel der Schüler die Gewinnung einer möglichst genauen Methode der Höhenbestimmung des Baumes ist, und sie dafür in Gruppen eingeteilt werden, direkt im Anschluss mit den vorbereiteten Losen.
4. Da die Schüler nicht unbegrenzt jedes Material verwenden können, wird an der Stelle darauf hingewiesen dass es einen Mietladen für Material gibt (der Materialtransport des Instituts ist leider noch nicht eingetroffen). Jede Gruppe erhält eine Schale mit 10 Gummibärchen, mit jedem Gummibärchen kann sich die Gruppe je einen Gegenstand für eine Minute ausleihen.
5. Um einen reibungslosen Ablauf zu ermöglichen kann an dem Punkt in den Gruppen eine Rollenverteilung in "SZeitwart", "Redeführer", "Materialwart" und "Protokollant" verteilt werden
6. . Es wird erläutert, dass Gruppen 45 Minuten Zeit bekommen, eine Methode zu entwickeln, und ein möglichst genaues Höhenergebnis zu ermitteln. Es wird darauf hingewiesen, dass sie im Voraus möglichst genau planen sollen, wie sie vorgehen wollen. Sie sollen anschließend möglichst nachvollziehbar Vorstellen, wie sie vorgegangen sind.

7. Wenn es dann keine Fragen mehr gibt werden die Gruppen in die Aufgabe geschickt. Der Lehrer kann in der Zeit beobachten und den Materialverleih betreuen.



Abbildung 2.3: Überlegungs- und Planungsphase sowie erste Messungen

8. Ist die Zeit abgelaufen und alle Schüler sind wieder zurückgekehrt, werden die Ergebnisse gesammelt. Dafür wird der Reihe nach jede Gruppe gebeten ihr Ergebnis in Metern und ihre Methode vorzutragen.
9. Anschließend werden die Gruppen gebeten einen persönlichen Gegenstand, der für sie zur Lösung der Aufgabe wichtig war, auszusuchen, und dann in einem gleichseitigen Vieleck auf die Ecken zu legen und sich als Gruppe jeweils hinter ihren Gegenstand zu stellen. Um die beste Methode zu bestimmen sollen sie, die Wissenschaftler, entscheiden welche vorgetragene Herangehensweise ihnen am sinnvollsten erschien. Dafür sollen sie sich im Vieleck positionieren, mit der Nähe zum jeweiligen Gruppengegenstand der entsprechenden Gruppe.
10. . Jetzt können einzelne Schüler angesprochen werden, warum sie sich für genau ihre Position entschieden haben. Dann gibt es ein Schlusswort des Dankes für ihre Arbeit. Die übrigen Gummibärchen werden den Gruppen überlassen und sie werden aufgefordert alles mitgebrachte Material wieder einzusammeln. Die Schüler können jetzt zum Klassenzimmer zurückgebracht werden.

## 2.4 Didaktische/pädagogische Hintergründe

### Binnendifferenzierung

Je nach Leistungsniveau ist die Aufgabe für alle Schüler zu bearbeiten. Schwächere Schüler machen sich Gedanken über Vereinfachung des Problems, stärkere versuchen es noch detaillierter zu Erfassen (Unebenheit des Bodens, unklare Baumobergrenze).

### Spielfreude

Durch Gestaltung eines Spiels lernen die Schüler Spaß an Forschung und Mathematik, die Motivation, die Gruppe mit den meisten übrigen Gummibärchen zu werden kommt von innen heraus. Der Lehrer kennt die genaue Lösung genauso wenig wie die Schüler, diese können ihre Lösung völlig frei entwickeln. Nach anfänglichen Startschwierigkeiten kann die



Abbildung 2.4: Aufstellungsarbeit der Gruppen

Lehrperson darauf vertrauen dass die Schüler mit ihrer eigenen Kreativität eine Lösung finden. Die Regeln des Spiels ergeben sich natürlich aus der Geschichte und müssen nicht explizit ausgeführt werden. Werden die Regeln verletzt wird die Geschichte zerstört.

### **Ressourcenknappheit**

Im realen Leben ist Material nicht unbegrenzt verfügbar, sondern oft sehr teuer. Durch Einführung eines Bezahlsystems gewinnt das Material an Bedeutung, und erfährt Wertschätzung. Das begrenzte Budget animiert sorgfältige Planung und improvisiertes Material zu nutzen, was nur in der Gruppe gelingt (eigene Körpergröße, Gegenstände die nicht direkt mit messen zu tun haben wie Halbleere Flaschen als Wasserwaage oder Äste mit bestimmter Länge), deshalb ist es sogar von Nutzen, wenn nicht zu viel Material verfügbar ist.

### **Delegation von Verantwortung**

Nicht nur der Lehrer, auch die Schüler bringen Material mit. Fehlt etwas, ist die ganze Gruppe dafür verantwortlich. Dadurch wird die Kompetenz der Selbstorganisation gefördert und es entsteht ein stärkerer Bezug zwischen Schüler und Material. Die Lernumgebung beginnt schon Zuhause, bei der Materialbeschaffung.

### 3 Wasserrakete (Johanna Kaiser, Judith Regenscheit)



#### 3.1 Herz der Sache

Anhand einer Wasserrakete soll der Forscherdrang der SuS geweckt werden, dabei sollen Optimierungen zur Flugstabilität und Flughöhe gefunden und umgesetzt werden.

#### 3.2 Bezug zum Bildungsplan

1. Prozessbezogene Kompetenzen:

- **Argumentieren und Beweisen:** Die SuS entwickeln eine mathematische Begründung, weshalb ihre Rakete am höchsten fliegt. Sie erlernen dabei das Begründen von Vermutungen und versuchen diese zu beweisen.
- **Probleme lösen:** Die SuS analysieren nach dem ersten Raketentest die Probleme und versuchen diese systematisch zu lösen. Durch einen weiteren Raketentest kann die Lösung überprüft und reflektiert werden.
- **Kommunizieren:** Die SuS führen Dialoge und Diskussionen über mathematische und physikalische Themen, wie zum Beispiel das Verhältnis von Wasser

und Luft in der Flasche, sowie die Abhängigkeit des Gewichts für die Flugstabilität und die Flughöhe. Sie dokumentieren ihre Überlegungen in einem Protokollheft und setzen sich kritisch mit den mathematischen Themen und deren Lösung auseinander.

## 2. MINT-Förderung:

Die Lernumgebung vereint die Teilgebiete und fördert das Interesse an naturwissenschaftlichem Arbeiten und Forschen. Technisches Geschick ist gefordert und wird gefördert durch die Konstruktion einer Rakete aus Alltagsgegenständen.

## 3. Leitideen:

### **Klasse 5/6**

- **Funktionaler Zusammenhang:**
  - Die SuS können einfache funktionale Zusammenhänge in verbaler, tabellarischer, ikonischer und graphischer Form darstellen und zwischen Darstellungsformen wechseln, indem sie die ermittelten Werte der Flughöhe gegenüber der Wasserfüllmenge bestimmen und veranschaulichen.
  - Die SuS können den dynamische Zusammenhang zwischen Größen in einfachen Situationen erläutern. Beispielsweise erkennen die SuS, dass je näher man der optimalen Wasserfüllmenge kommt, desto höher fliegt die Rakete.
- **Daten und Zufall:**
  - Die SuS können zu einer statistischen Fragestellung Datenerhebungen planen und durchführen und dabei Urlisten, Strichlisten und Häufigkeitstabellen anfertigen, beispielsweise bei der Datenerhebung zur Bestimmung der optimalen Wasserfüllmenge.

### **Klasse 7/8**

- **Funktionaler Zusammenhang:**
  - Die SuS können Zusammenhänge durch Tabellen, Gleichungen, Graphen oder Texte darstellen und situationsgerecht zwischen den Darstellungen wechseln, beispielsweise die Messdaten in einer Tabelle aufschreiben und dann in eine graphische Darstellung überführen, um zu veranschaulichen, bei welcher Wasserfüllmenge die maximale Flughöhe erreicht wird.
  - Die SuS können Proportionalität und Antiproportionalität in verschiedenen Darstellungsformen erkennen und für Berechnungen benutzen, beispielsweise ob in der graphischen Darstellung der Flughöhe zur Wasserfüllmenge eine Proportionalität erkennbar ist.

## **3.3 Konkrete Umsetzung**

### **3.3.1 Rahmenbedingungen**

#### **Zielgruppe**

Diese Lernumgebung ist in jeder Altersstufe durchführbar und kann durch Variation der Aufgaben erschwert oder vereinfacht werden.

## Zeit

1. Vorbereitungszeit: Da einiges an Material benötigt wird und man zuvor selbst ein paar Starts ausprobieren sollte, benötigt man mindestens fünf Stunden Vorbereitungszeit.
2. Durchführungszeit: Die Lernumgebung benötigt mindestens vier Stunden, kann aber auch auf eine Projektwoche ausgebaut werden, je nachdem wie genau gemessen, konstruiert und variiert werden soll.

## Ort

Die Raketenstarts müssen draußen durchgeführt werden, alles andere kann auch drinnen erarbeitet werden.

## Material

- Startrampe entweder aus Holz oder aus Metallrohren
- Gartenschlauch
- Gardenaufsatz
- Luftpumpe mit Druck-Anzeige
- Ventil und Schelle
- Mehrweg-Pfandflaschen
- Aufsatz für Flaschen<sup>2</sup>
- Verschiedene Bastelmaterialien, um die Flaschen zu verschönern und zu optimieren (Schere, Farbkarton, Filzstifte, Heißklebepistole, Tennisbälle etc.)
- Protokollheft

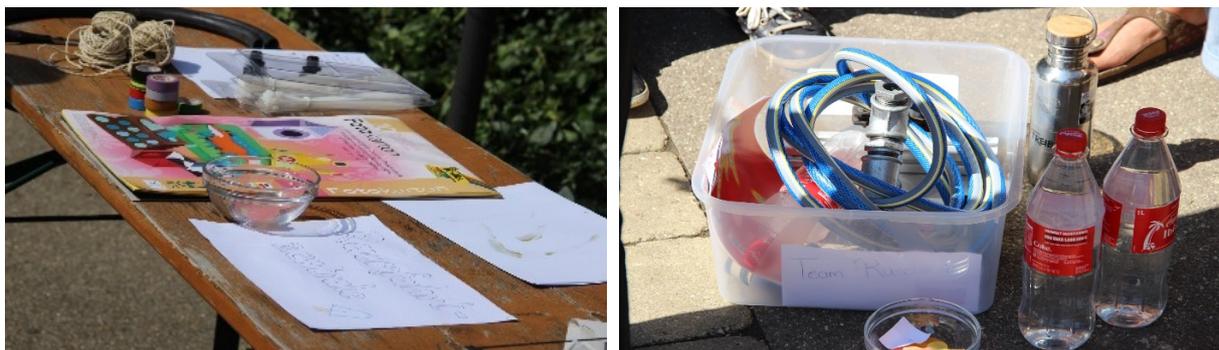


Abbildung 3.1: Raumfahrtzentrale (Materialshop) sowie Grundausstattung

---

<sup>2</sup>Bestellbar über die Internetseite <http://www.raketenmodellbau-klima.de/Raketenmodellbau/Wasser-Luftraketen/Wasserraketen-Anschluss-Adapter.htm?shop=raketenklima&SessionId=&a=article&ProdNr=6043&t=23&c=34&p=34>

### 3.3.2 Durchführung

#### Umsetzung

Sie können die Klasse mit Hilfe einer Geschichte in die Situation versetzen, dass eine neuartige Wasserrakete entwickelt werden soll, da der Treibstoff für Raketen knapp wird. Teilen Sie ihre Klasse für die weitere Bearbeitung in Gruppen von 5-6 Personen ein, dabei können Sie Teams aus verschiedenen Ländern (Russland, USA, China, Japan etc.) entstehen lassen. Die Teams richten anschließend ihre Ingenieurbüros so ein, dass sie von den anderen nicht gesehen werden können, da sie aus verschiedenen Ländern kommen. Zusatzmaterial wird an der unabhängigen Raumfahrtzentrale verkauft (Währung sind Gummibärchen). Führen Sie nun die Sicherheitseinweisung durch.

Weiterhin gibt es in jedem Team eine klare Rolleneinteilung, welche deutlich sichtbar auf Klebeband geschrieben und am Körper aufgeklebt wird. Es gibt 6 Rollen: Protokollant, Zeitmanager, Gesprächsleitung, Materialwart, Sicherheitsbeauftragter und Spion (bei einer 5 köpfigen Gruppe wird eine Person zwei Rollen einnehmen müssen). Nun haben die Teams 2-3 Stunden Zeit ihre Rakete zu bauen und Tests durchzuführen, damit ihre Rakete am Ende der 2-3 Stunden am höchsten fliegt. Die Teststarts werden hierbei bei 2 Bar durchgeführt und der Endvergleich bei 4 Bar. Die Luftpumpen werden dabei jeweils 3 mal für 10 Minuten ausgehändigt. Währenddessen wird kontrolliert, ob die Sicherheitsmaßnahmen eingehalten werden.

#### Besondere Rollen

- **SPION:** Der Spion darf sich heranschleichen und die anderen Teams bespitzeln. Wird ein Spion entdeckt, darf dieser für 3 Minuten ausgefragt werden und muss ehrlich alle Fragen beantworten. Zur Befragung dürfen die Klebestreifen abgenommen werden, damit der Spion nicht herausfindet wer im anderen Team der Spion ist. Ein entlarvter Spion muss sein Klebestreifen entfernen und durchreißen, seine Rolle existiert dann nicht mehr.
- **SICHERHEITSBEAUFTRAGTER:** Dieser sorgt für die Sicherheit des Teams und gibt beim Raketenstart die Kommandos an.

#### Sicherheitshinweise: (sehr wichtig)

- Kopf schützen
- Klar und deutlich den Start anzählen
- Der Sicherheitsbeauftragte strukturiert den Start und gibt die Anweisung (Kopf schützen, Start in 3,2,1 los, etc.)
- Vorsicht! Es können auch Fehlzündungen passieren



### Hilfreiche Tipps und Ideen:

Folgende Internetseiten haben sich als hilfreich und nützlich erwiesen:

- <http://www.raketfuedrockets.com/index.htm>
- <https://www.nantu.de/wasserrakete-selber-bauen>

## 3.4 Didaktische/pädagogische Hintergründe

### Spion als pädagogische Rolle:

Der Spion dient im Spiel dazu, die „Länder“ einander näher zu bringen, um so die gesamte Klasse als Gruppe zusammen zu halten. Durch die Rolle wird die Geschichte realer und man möchte unbedingt wissen, was die andere Gruppe gerade macht. Die Spione halten die verschiedenen Teams „zusammen“ und sorgen so für einen minimalen Kontakt zwischen ihnen.

### Sicherheitsbeauftragter als pädagogische Rolle:

Durch die Einführung eines Sicherheitsbeauftragten wird den SuS automatisch die Gefahr vor Augen geführt, die die Raketenstarts mit sich bringen. Eine gewisse Grundsicherung ist damit gewährleistet und der Lehrer hat die Verantwortung den SuS übertragen. Der Lehrer muss so nur den Sicherheitsbeauftragten im Auge haben und diesen gegebenenfalls auf seine Rolle hinweisen.

### Riemann-Thomann-Modell

Die Lernumgebung vereint die vier Grundstrebungen, die im Riemann Thomann Modell beschrieben werden:

- **Nähe:**Die SuS kennen die Materialien aus ihrem Alltag; Angewiesensein auf die Gruppe bei den Raketenstarts; starkes WIR-Gefühl durch die Nationenzuordnung; die Gruppen werden durch die Spione mit einander verbunden.
- **Distanz:** Die einzelnen Gruppen arbeiten isoliert voneinander.
- **Dauer:** Alle Gruppen haben die gleiche Aufgabe; die Aufgabe kann auf eine Projektwoche ausgeweitet werden, dabei bleibt die Aufgabe und das Material an jedem Tag dasselbe.
- **Wechsel:**Die Raketentests werden bei 2 bar, der Raketenstart bei 4 bar durchgeführt; die Variation von Wasserfüllmenge und Form zur Optimierung der Rakete.

## 4 Die Mathematik im Puls (Ines Ayeb, Moritz Springer)

### 4.1 Herz der Sache

Bei einer Bergrettung mit medizinischer Erstversorgung darf der Puls der Bergretter nicht zu hoch sein, um Zittern zu vermeiden. Doch wie sollte die Strecke zum verschütteten Bergsteiger am besten zurückgelegt werden, sodass sie mit einem ausreichend niedrigen Puls in einer bestimmten Zeit am Unfallort sind? Die Schüler gehen dieser Fragestellung als Auszubildende der Bergrettung und anhand ihres eigenen Pulses nach.

### 4.2 Bezug zum Bildungsplan

Während der Lernumgebung werden die Schüler mehrfach mit dem Umgang der eigenen Ressourcen konfrontiert. Die Leitperspektive Prävention und Gesundheitsförderung aus dem Bildungsplan spiegelt sich darin wieder, dass die eigene Energie und Kraft eine endliche Ressource darstellt. Die Schüler müssen also Probleme erkennen und lösen, da durch die körperlich begrenzten Ressourcen nur endlich viele Versuche bis zum Entwickeln der Laufstrategie zur Verfügung stehen. Durch das Wahrnehmen und Sichtbarmachen des eigenen Pulses wird das eigene Handeln zusätzlich sehr gut reflektiert. Durch das optionale Nutzen von Pulsuhr und App-Anbindung rückt auch die Medienbildung in das Zentrum. Die Schüler werden mit Daten konfrontiert, die sie zunächst bewerten müssen, ehe sie ihnen eine Bedeutung zuschreiben. Wie misst die Pulsuhr den Puls? Stimmt dieser mit meiner eigenen Messung überein? Kann ich den Daten vertrauen?

Bei den prozessbezogenen Kompetenzen wird die Fähigkeit zum **Argumentieren** und Beweisen gefördert. Die Schüler stellen Theorien auf, was sich in welchem Ausmaß auf den Verlauf des Pulses auswirkt und überprüfen diese Theorien anhand von Beispielen in der Trainingsphase. Beispielsweise können sich die Höhenmeter, das Lauftempo, das Wetter, oder sogar die persönliche Ernährung auf den eigenen Puls auswirken. Des Weiteren findet sich die **Problemlösekompetenz** sowie die **Modellierung** in der Lernumgebung. Die Schüler werden mit einem realen Problem konfrontiert, suchen nach Strukturen und vereinfachen Sachverhalte, um ein Modell zur Erklärung zu entwerfen. Die Schüler definieren in diesem Prozess beispielsweise Hauptfaktoren für die Beeinflussung des Pulses wie Höhenmeter und Lauftempo. Wie sich die Hauptfaktoren auf den Puls auswirken, betrachten und berechnen sie über das Modell. In einem weiteren Schritt müssen sie die gewonnenen Daten und Erkenntnisse interpretieren und entscheiden, ob das Modell für die Suche nach der besten Laufstrategie geeignet ist.

Im Rahmen der inhaltsbezogenen Kompetenzen bietet die Lernumgebung eine Gelegenheit, die mathematische **Optimierung** einer Funktion nach einem Parameter vertieft zu behandeln. Auch das Erkennen und der Umgang mit funktionalen Zusammenhängen werden besonders beim Verwenden der App geschult.

Im Matheunterricht bietet diese Lernumgebung die Möglichkeit, Schülern einen neuen Zugang zur Mathematik zu bieten. Bestehende negative Selbstkonzepte zur Mathematik können neu definiert werden, da auch Fähigkeiten wie sportliche Betätigung und eine for-

schende Kompetenz im Fokus stehen. Außerdem werden die sozialen Kompetenzen in der Klassengemeinschaft gefördert, weil die Gruppenarbeit durch die klare Rollenverteilung Sinn macht. Zuletzt ist die Binnendifferenzierung der Lernumgebung ein großer Vorteil, um Schüler auf unterschiedlichem Niveau angemessen zu fördern.

## 4.3 Konkrete Umsetzung

### 4.3.1 Rahmenbedingungen

#### Material

- Große Sticker in Herzform (Farben und Anzahl entsprechend der Kleingruppengröße und -anzahl), Eddings zum Beschriften der Sticker, Pläne der Einsatz- und Trainingsstrecke, Markierung für das Ziel des Einsatzes, Papier und Stifte zum Skizzieren
- Nicht unbedingt notwendig: Pulsuhren, Strava-App
- Von den Teilnehmern: Sportkleidung und Sportschuhe

#### Ort

draußen, mindestens eine Laufstrecke einer Länge von ca. 1 km

#### Zeit

- für die Vorbereitung: Geländebegehung (Laufversuche)
- optional: App installieren und kennen lernen, Pulsuhren organisieren
- für die Durchführung: 2 Stunden (20 min: Einführung, Schätzen und Messen des Ruhepulses; 1h: Trainingscamp; 15 min: Lagebesprechung des Einsatzes; 10 min: Einsatz; 15 min: Gibt es eine optimale Laufstrategie? Beantwortung der Leitfrage)

#### Zielgruppe

Schüler der 8. Klasse bis K2

### 4.3.2 Durchführung

Die Schüler werden als Auszubildende des Medizinreferates der Bergwacht begrüßt. Die Auszubildenden sollen ihren Ruhepuls schätzen. Wenn sie sich für einen Wert entschieden haben, verschränken sie die Arme. Haben alle die Arme verschränkt, werden nacheinander die Schätzwerte genannt. Anschließend wird der Puls gemessen, der in diesem Moment nahe am Ruhepuls liegen sollte. Dazu können die Pulsuhren verwendet werden oder die Schüler messen mit zwei Fingern an der Hauptschlagader am Hals. Der Wert wird auf die herzförmigen farbigen Sticker geschrieben. Über die Farben werden die späteren Gruppen festgelegt. Ideal sind drei Personen pro Gruppe. Der eigene Puls ist etwas sehr Persönliches. Durch den Sticker wird er öffentlich. Dem Schüler kann man deshalb bewusst die Gelegenheit geben sich rauszuhalten, indem er selbst die Höhe des Pulses notiert. Nun zeigen die Schüler an, ob der gemessene Ruhepuls höher (Daumen hoch), gleich (Daumen quer) oder niedriger (Daumen runter) als der Schätzwert ist. Durch die Einführung



Abbildung 4.1: Ausprobieren mit zwei verschiedenen Pulsuhren

wird für die Schüler direkt ein Kontakt zum Problem geschaffen. Die Beziehung zum Thema ist sehr persönlich. Es geht um den eigenen Puls. Nach dieser Phase kann zuerst das Alarmierungssignal vorgestellt werden. Anschließend wird den Auszubildenden des Medizinreferates der Bergwacht erklärt, dass der Puls für sie zentral ist, weil sie bei der medizinischen Versorgung des Verschütteten nicht zittern dürfen. Das Ziel ist es daher herauszufinden, ob es einen optimalen Laufstil bei der Bergrettung gibt. Optimal bedeutet, dass die Bergretter mit maximal 150% ihres Ruhepulses am Einsatzort in der vorgegebenen Zeit ankommen. Nun findet in den Gruppen die Vergabe der sozialen Rollen statt. Sie legen intern fest, wer der Läufer ist und wer die Coaches sind. Außerdem bestimmen sie ein Zeitmanager, ein Materialverantwortlichen und ein Gesprächsführer. Letzter ist verantwortlich dafür, dass die Gruppenmitglieder gegenseitig voneinander wissen, wo sie gerade sind. So soll vermieden werden, dass die Gruppen sich auf dem großen Gebiet verlieren. Anschließend werden die Schüler mit dem Plan der Trainingsstrecke für eine Stunde ins Trainingslager entlassen.

Die Schüler sind in der folgenden Phase frei in der Einteilung ihrer Zeit und werden unterschiedliche Methoden ausprobieren, um die zeitliche Änderung des eigenen Pulses besser zu verstehen. Die Lehrkraft kann sich hier gezielt herausnehmen und beobachten wie die Schüler das Problem angehen. Sollten Pulsuhren zum Einsatz kommen, ist eine kurze technische Einführung in die Funktionsweise seitens der Lehrperson notwendig. Die Alarmierung läutet den Einsatz ein. Die Auszubildenden bekommen Einsatzpläne mit der neuen Strecke ausgehändigt. In einer viertelstündigen Lagebesprechung können sie die Er-



Abbildung 4.2: Laufversuche in der Trainingsphase

kenntnisse aus dem Trainingslager in eine Laufstrategie für den Einsatz umwandeln. Die Bergretter starten gemeinsam auf die Strecke. Beim Verschütteten angekommen, wird am Ende der vorgegebenen Zeit der Puls gemessen. Falls 2/3 der Läufer mit maximal 150% ihres Ruhepulses das Ziel in vorgegebener Zeit erreichen, kann der verunglückte Bergsteiger gerettet werden und die ganze Gruppe hat gewonnen. Es kann für die Schüler überraschend und authentischer sein, wenn am Ziel beispielsweise ein Kuscheltier als Verschütteter auf sie wartet.

Am Ende der Lernumgebung wird mit einer Aufstellungsarbeit ein Fazit gezogen. Die Schüler sollen sich in einem Koordinatensystem bestehend aus zwei Achsen positionieren. Die horizontale Achse reicht dabei von der Aussage „Ich habe nichts Neues über meinen Puls gelernt.“ bis „Ich habe meinen Puls komplett verstanden.“ Auf der vertikalen Achse polarisieren die Aussagen „Es gibt eine optimale Laufstrategie.“ und „Es gibt keine optimale Laufstrategie.“ Die Auszubildenden argumentieren dann ihren Standpunkt. Hierbei kann das Kuscheltier als Redestab dienen.

#### 4.4 Didaktische/pädagogische Hintergründe

##### Riemann-Thomann: Nähe und Distanz

Die Idee von Nähe und Distanz aus dem Kommunikationsmodell von Riemann-Thomann findet sich an mehreren Stellen in der Lernumgebung wieder. Distanz entsteht, weil die Großgruppe in Kleingruppen aufgeteilt wird. Die Schüler arbeiten sehr lange Zeit in ihrer



Abbildung 4.3: : Ankommen beim Verschütteten

Kleingruppe und stehen wenig in Austausch mit den anderen Gruppen. In jeder der Kleingruppen hingegen überwiegt die Nähe und auch die Rettung ist vor allem bei Nähe zu verorten. Die Großgruppe rettet den Verschütteten und im Sinne des kooperativen Spiels müssen nur 2/3 der Bergretter mit ihrem 150%-igen Ruhepuls ankommen. Bezogen auf die Fachinhalte entsteht Nähe für den Läufer, wenn es um den eigenen Puls geht. Für die Coaches ist die Beziehung zum Puls weiter entfernt. Sie lernen die Änderung des Pulses eines anderen Menschen gut kennen, aber nicht ihren eigenen.

### **Regeln durch die Geschichte festgelegt**

Durch den direkten Einstieg in die Geschichte und das Einflechten von Regeln, werden diese nicht als Einschränkung durch die Lehrperson, sondern vielmehr als authentische Gegebenheiten in der Bergrettung verstanden. Das Trainingsgelände hat eine gewisse Größe und es stehen aus finanziellen Gründen nur eine begrenzte Anzahl an Pulsuhren zur Verfügung. Auch das Ziel, beim Einsatz mit maximal 150% des Ruhepulses beim Verunglückten anzukommen, wird durch die Geschichte glaubwürdig. Die Schüler werden im Spiel motiviert durch das Gefühl, etwas Wichtiges zu tun – die Rettung eines Verunglückten.

## Freiheit und Struktur

Das Verhältnis von Freiheit und Struktur in der Lernumgebung ist wichtig für das Gelingen. Zum einen sollten die Schüler selbst nachdenken dürfen und eigene Strategien entwickeln und testen können. Durch eine Struktur soll aber auch der Rahmen, in dem geforscht wird, festgelegt werden. Zeitliche und materielle Beschränkungen verändern die Herangehensweise der Gruppe an die Aufgabenstellung und ihre Ergebnisse. Eine vorgegebene Struktur ist der genaue zeitliche Ablauf von Einführung/Schulung, gefolgt von einer Trainingsphase und dem abschließenden Einsatz. Die Größe und die Zusammensetzung der Gruppen wird vorgegeben, genauso wie die zeitliche und materielle Beschränkung in der Trainingsphase (1h, 2 Pulsuhren). Innerhalb der Kleingruppen dürfen die Schüler sich aber selbst Rollen und Aufgaben zuweisen. Auch in der Trainingsphase besteht die komplette Freiheit, was wann ausprobiert wird, um das vorgegebene Ziel zu erreichen.

### 4.5 Anmerkungen zur Technik und Weiterführung der Lernumgebung:

Die Nutzung von Pulsuhren und den entsprechenden Apps kann die Lernumgebung bereichern. Höhenprofile sowie Pulskurve und Geschwindigkeitskurve werden dort als Graphen angezeigt. Falls die Verfügbarkeit der Pulsuhren gegeben ist, so sind der hohe Wert des Materials und die Abhängigkeit von der Technik, insbesondere auch vom Internetempfang, kritisch zu sehen.

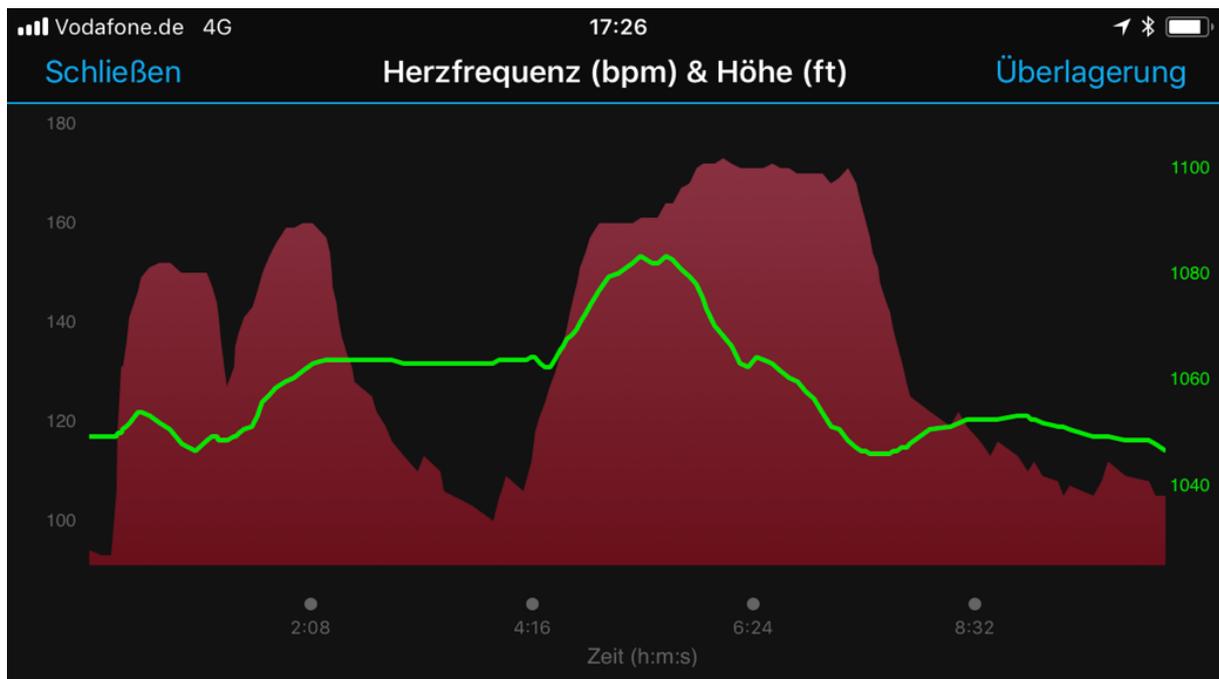


Abbildung 4.4: Mögliche App-Ansicht (Herzfrequenz: rot, Höhenprofil: grün)

Die Fragestellung kann weiterverfolgt werden. Auch das Trainingscamp kann mit einem Optimierungsgedanken betrachtet werden. Welche Veränderungen müssten vorgenommen werden, um die Frage nach der Existenz einer optimalen Laufstrategie zu klären? Das Trainingscamp kann noch einmal durchgeführt werden mit den Änderungsvorschlägen der

Schüler. Kann nun eine optimale Laufstrategie formuliert werden? Wahrscheinlich wird es wieder Ideen geben, mit welchen anderen Verfahren man die Frage besser beantworten kann. Die Schüler lernen dadurch wissenschaftliche Optimierungs- und Modellierungsprozesse kennen, die in der Regel unabgeschlossen bleiben.

## 5 Eine mathematische Symphonie (David Brooke, Vincent Kliem)



### 5.1 Herz der Sache

In der Lernumgebung übersetzen die Schülerinnen und Schüler (SuS) in Gruppen mathematische Themen in die Sprache der Musik. Die in den Gruppen entstandenen Kompositionen werden zu einem Gesamtwerk in Form einer mathematischen Symphonie auf eine CD gebrannt.

### 5.2 Bezug zum Bildungsplan

Da bei der Lernumgebung die SuS entscheiden können, welche mathematischen Themen sie musikalisch umsetzen, entscheiden auch die SuS über den konkreten Bezugspunkt zum Bildungsplan Mathematik. Trotzdem lassen sich einige allgemein gültige Bezugspunkte finden.

#### Prozessbezogene Kompetenzen

Um ein mathematisches Thema in Musik „übersetzen“ zu können, sind besonders Prozessbezogene Kompetenzen wichtig. Die SuS müssen während des kreativen Prozesses innerhalb Gruppe *kommunizieren* und *mathematisch argumentieren*. Zudem setzen sie sich mit *symbolischen* und *formalen Elementen* der Mathematik auseinander, um diese in die Sprache der Musik übersetzen zu können.

#### Leitidee Funktionaler Zusammenhang

Die SuS müssen *Muster* innerhalb eines mathematischen Themas finden und sich überlegen, wie sie diese Muster musikalisch abbilden können.

#### Leitidee Medienbildung

Die SuS *produzieren* und *präsentieren* mit Hilfe von Laptops ihr Werk. Sie bekommen eine Einführung und einen Einblick in die Funktionsweise einer Anwendungssoftware zur Musikproduktion. Durch die Produktion einer CD werden auch die Themen *Urheber-* und *Lizenzrecht* relevant.

## **Bezug zum Bildungsplan Musik**

Natürlich enthält diese Lernumgebung auch viele Bezugspunkte zum Bildungsplan Musik. Besonders sticht hier die Schulung der *Hörkompetenz* heraus. Die SuS kreieren nicht nur Formen und Strukturen, sondern hören diese auch in den Stücken der anderen und können versuchen mathematische Muster zu erkennen.

Insbesondere gehört zum Bildungsplan der Klassen 9/10 folgendes:

*Musik unter besonderer Berücksichtigung kontrastierender Phänomene wie Ordnung und Freiheit, Kontrolle und Zufall entwerfen und gestalten.*

Diese Lernumgebung bietet eine Möglichkeit dies fächerübergreifend umzusetzen.

## **5.3 Konkrete Umsetzung**

### **5.3.1 Rahmenbedingungen**

Es bietet sich fächerübergreifender Unterricht mit Musik aber auch Informatik an. Die Lernumgebung ist so konzipiert, dass sie sich am besten für Projektwochen oder Schulandheime eignet.

### **Zielgruppe**

Ab 10. Klasse

### **Material**

- Laptops oder optional Tablets
- Anwendungssoftware zur Musikproduktion (z.B. GarageBand)
- Keyboards und weiter Instrumente nach Verfügbarkeit
- Mikrophone
- Musikanlage
- Kamera
- Beamer

### **Ort**

Für die Produktion ist es unverzichtbar, dass jede Gruppe an einem ruhigen Ort für sich arbeiten kann.

### **Zeit**

- Vorbesprechung und Einführung in das Programm: 1h
- Komposition und Produktion in Gruppen: 3h
- Vorstellen der Ergebnisse, Zusammenstellen der Sätze und Gestaltung des Covers: 1h

### 5.3.2 Durchführung

#### Hinführung

Zu Beginn der Lernumgebung hören die SuS unkommentiert und ohne Erklärung den Song „What Pi sounds like.“ (<https://youtu.be/wK7tq7LON8E?t=46s>). Anschließend werden sie in das Szenario eingeführt:

*Der Unterrichtsraum wird zu einem Aufnahmestudio. Der Lehrer wird zum Produzenten und die SuS bekommen den Auftrag eine mathematische Symphonie zu komponieren, die im Anschluss veröffentlicht und vermarktet werden soll. Jedoch ist das Aufnahmestudio für nur 3 Stunden Produktionszeit angemietet.*

Um den SuS die Aufgabenstellung greifbarer zu machen wird nun der mathematische Hintergrund des Songs „What Pi sounds like“ durch Zeigen des kompletten Videos aufgelöst.

#### Gruppeneinteilung und Rollenvergabe

Durch blindes Ziehen von farbigen Süßigkeiten werden die SuS in Dreiergruppen eingeteilt, die jeweils isoliert voneinander einen eigenen Satz für die Symphonie entwickeln werden. Die Süßigkeiten werden später als Währung verwendet. Die Gruppen haben nun kurz Zeit folgende Rollen unter sich zu verteilen:

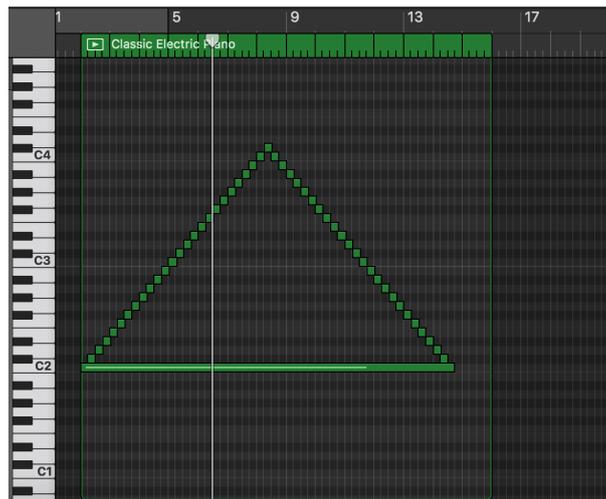
- Materialwart
  - sorgt für vorsichtigen und bedachten Umgang mit dem Equipment
  - ist zuständig für das Anmieten von zusätzlichem Equipment
- Zeitmanager
  - behält den Blick auf die Uhr
- Gleichstellungsbeauftragte(r)
  - behält einen Blick darauf, dass sich alle in der Gruppe ähnlich einbringen können
  - schreitet ein, falls jemand zu lange am Laptop ist

#### Einführung in das Programm

Jede Gruppe bekommt nun einen Laptop, wobei der Bildschirm einer Gruppe exemplarisch per Beamer an die Wand projiziert wird. Nun wird Step by Step in das Programm eingeführt. Dabei wird folgendermaßen vorgegangen: Die Gruppe am Beamer setzt das Erklärte direkt enaktiv um, während die anderen Gruppen ohne ihren Laptop benutzen zu dürfen aufmerksam zuhören. Ist der Schritt erklärt, bekommen auch die anderen Gruppen die Möglichkeit, die gezeigten Programmfunktionen umzusetzen und mit den neu erworbenen Fähigkeiten zu experimentieren. Die schrittweise Erklärung ist folgendermaßen aufgebaut:

1. Erstellen eines neuen Projektes
2. Erstellen einer neuen MIDI-Spur

3. Wahl eines Instrumentes
4. Einspielen einer Melodie
5. Bearbeiten einer Melodie (Quantisieren, Töne verschieben und vervielfältigen)
6. Geometrisch Figuren durch Melodieverläufe „malen“ (siehe Abbildung)



Während der Einführung in das Programm werden weitere mathematisch-musikalische Anknüpfungspunkte (z.B. Rhythmik, „malen“ von geometrischen Figuren, Tempo und Dynamik...) angeschnitten.

### **Komposition und Produktion**

Die Gruppen beziehen nun jeweils ihr eigenes „Studio“ an einem ruhigen Ort, isoliert von den anderen. Dazu nehmen sie den Laptop und ein nun ausgeteiltes Handout (siehe Anhang) mit einer Übersicht der elementaren Programmfunktionen mit. Die Gruppen haben nun 3 Stunden Zeit ein mathematisches Thema ihrer Wahl musikalisch umzusetzen und dem entstandenen Satz einen aussagekräftigen Titel zu verleihen. Während dieser Zeit ist es ihnen nicht gestattet mit den anderen Gruppen in Austausch zu treten. Mit ihrer Süßigkeitenwährung können sie beim Produzenten (Lehrer) zeitlich beschränkt vorhandenes Zusatzequipment leihen. Während dieser Zeit steht der Produzent als Hilfe bei technischen Fragen und Problemen zur Verfügung, darf dabei aber keinesfalls auf den kreativ-schöpferischen Prozess Einfluss nehmen.

### **Vorstellen der Ergebnisse**

Nach Ablauf der Zeit versammeln sich die Gruppen wieder in einem Raum und präsentieren die entstandenen Werke. Dabei wird folgendermaßen vorgegangen: Zunächst wird der Satz blind gehört. Die anderen Gruppen haben dabei die Aufgabe, die Mathematik hinter dem Satz zu entschlüsseln und ihre Vermutungen im Plenum zu diskutieren. Anschließend wird der Satz von der Gruppe vorgestellt und die mathematischen Hintergründe erläutert.



### **Zusammenstellen der Sätze**

Da aus den einzelnen Sätzen ein rundes Gesamtwerk entstehen soll, haben die SuS Zeit, eine passende Reihenfolge der Sätze zu finden und der nun entstandenen Symphonie einen passenden Titel zu geben.

### **Gestaltung des Covers**

Zur Produktion einer CD gehört auch die Gestaltung eines Covers. Dafür bekommen die SuS 15 Minuten Zeit, ein passendes Fotomotiv zu kreieren. Dazu steht der Lehrer als Fotograf zur Verfügung.

## **5.4 Didaktische/pädagogische Hintergründe**

### **Riemann-Thomann-Modell**

Durch die räumliche Trennung arbeiten die Gruppen isoliert voneinander (Distanz), die jeweiligen Sätze sind jedoch Teil eines Gesamtwerkes (Nähe), das am Ende zusammengefügt wird. Dadurch dass an einem einzigen gemeinsamen Produkt gearbeitet wird, überwiegt in der Lernumgebung prinzipiell die Nähe, welche zunächst jedoch durch Distanz geschaffen werden muss.

### **Ressourcenknappheit**

Dadurch dass der ohnehin schon materialintensiven Lernumgebung Ressourcengrenzen gesetzt werden, nehmen die SuS wahr welches Material welche Vor- und Nachteile bringt und was tatsächlich unverzichtbar ist. Es bringt die SuS dazu ihr Material zu hinterfragen



und über Sinn oder Unsinn ihrer Vorgehensweise nachzudenken. Zudem wird nebenbei auch der wertschätzende Umgang mit dem teuren Equipment geschult.

### **Nachhaltigkeit**

Am Ende des Lernprozesses steht das fertige Produkt. Damit bleibt die Lernumgebung in Form der CD nachhaltig in Erinnerung. Zudem bietet die Lernumgebung ein vielseitiges Belohnungssystem, das sich beispielsweise beim Hörerfolg nach dem ersten Ausprobieren oder durch das fertige Stück am Ende äußert. Die SuS belohnen ihre Arbeit durch das Hören ihrer eigenen Musik, woraus Motivation und daraus resultierende Nachhaltigkeit entsteht.

### **Mathematik durch die Dimensionen**

Die SuS bringen die mathematischen Inhalte in neue Kontexte. Es entstehen Fragen wie „Passt das Glockenspiel zur Fibonacci Reihe?“ oder „Wie klingt der Sinus?“. Die Mathe-

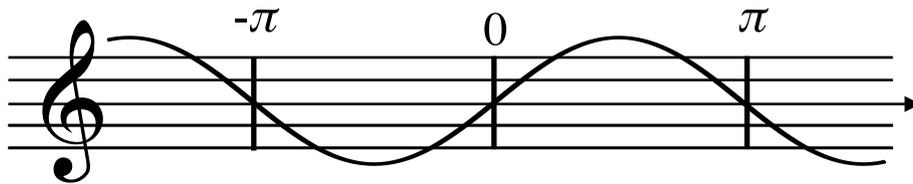
matik präsentiert sich von einer ganz neuen Seite und schafft die Transformation vom Visuellen ins Auditiv. Auch dadurch bleibt der Stoff nachhaltig hängen, da der SuS sein Thema aus einem neuen Blickwinkel betrachtet.

### **Spielfreude durch innere Binnendifferenzierung**

Den SuS wird maximale künstlerische Freiheit eingeräumt, sie dürfen das zu vertonende mathematische Thema sogar selbst wählen, was innere Binnendifferenzierung gewährleistet. Dadurch dass es kein Richtig oder Falsch gibt, sondern ästhetische Fragestellungen zu Klang, Instrumentierung oder Rhythmik u.v.a. großes Gewicht haben, können sich die SuS künstlerisch austoben und viel experimentieren. Dies zusammen mit der intuitiven Bedienbarkeit des Programms erzeugt bei den SuS eine große Spielfreude. Diese kann jedoch nur systemintern entstehen, somit sollte der Lehrer gut abwägen, ob er eingreifen kann ohne die Lernumgebung zu zerstören. Außerdem kommt die Spielfreude auch zum Tragen, wenn die Sätze bei ihrer Vorstellung eine Bühne bekommen. Die Diskussion der Vermutungen über die zugrundeliegende Mathematik steigert die Spannung auf die Präsentation und bringt gleichzeitig die SuS der Musik näher. die Präsentation und bringt gleichzeitig die Gruppe der Musik näher.

## **5.5 Anhang: Handout**

Zur Einführung in das Programm *GarageBand* siehe Handout auf den folgenden zwei Seiten.



# Eine mathematische Symphonie

## Aufgabenstellung

Entwickelt zu einem (im weitesten Sinne) **mathematischen Thema** eurer Wahl einen **Satz für unsere mathematische Symphonie**.

Dafür habt ihr drei Stunden Zeit. Behaltet euer Thema zunächst für euch, denn im Anschluss dürft ihr es den anderen präsentieren. Zusätzliches Equipment könnt ihr zeitweise bei uns ausleihen.

## Die wichtigsten Funktionen von Garageband zusammengefasst:

### EIN NEUES PROJEKT ERSTELLEN

1. Öffne Garage Band
2. Gehe auf **Ablage** → **Neu**
3. Wähle **Spurtyp** → **Software-Instrument**
4. In der **Steuerungsleiste** lässt sich Tempo und Taktart einstellen.

### EINE NEUE SPUR HINZUFÜGEN

1. Klicke links oben in der **Partitur** auf „+“!
2. Nun kannst du unter anderem zwischen einer neuen **Audiospur** (zum Aufnehmen mit Mikrophon) oder einer **Softwarespur** (zum einspielen von Melodien) wählen.
3. Falls eine neue **Softwarespur** hinzugefügt wurde, kann du links in der **Bibliothek** das Instrument deiner Wahl aussuchen.

### EINE MELODIE EINSPIELEN

1. In der **Steuerungsleiste** lässt sich nach Belieben **Metronom** und „**Einzählen**“ vor einer Aufnahme ein- und ausschalten. Oft empfiehlt sich auch das **Tempo** zum einspielen von Melodien zu verlangsamen.
2. Gehe an die Stelle im Stück, an der die Aufnahme starten soll.
3. Das Keyboard lässt sich einblenden unter: **Fenster** → **Musik-Tastatur einblenden**
4. Nun kann man durch klicken des **roten Knopfes** in der **Steuerungsleiste** eine Aufnahme in der ausgewählten Spur starten. (Achtung: eventuell Einzählen abwarten!)
5. Die Aufnahme lässt sich durch drücken der Leertaste stoppen.

### EINE MELODIE BEARBEITEN

1. Um eine Melodie zu bearbeiten, kann man einfach in der **Partitur** auf diese doppelklicken, oder man klickt links oben in der **Leiste** auf **Editor ein-/ausblenden**.
2. Nun wählt man im **Editor** „**Pianorolle**“ aus. Hier lassen sich die einzelnen Töne am besten bearbeiten.
3. In der linken Spalte lassen sich die einzelnen Töne **quantisieren**. So kann man sie auf den Takt „zwingen“. Markiere dazu eine beliebige Anzahl Noten im **Editor** und wähle links unterhalb von Zeitquantisierung aus, auf welche Notenwerte du quantisieren möchtest.
4. Zusätzlich lassen sich die einzelnen Notenwerte intuitiv per Drag & Drop verschieben oder verlängern. Ebenso kannst du sie kopieren und vervielfältigen.

**STEUERUNGSLISTE:**

Hier kannst du auf alle wichtigen Funktionen schnell zugreifen.

Bibliothek ein-/ausblenden

Editor ein-/ausblenden

Neue Spur

Stop

Play

Aufnahme

Tempo

Taktart

Einzählen

Metronom

**PARTITUR:**

Hier hast du eine Übersicht über alle deine Spuren.

The screenshot shows a music production software interface. At the top is a control panel with buttons for 'Neue Spur', 'Stop', 'Play', 'Aufnahme', 'Tempo' (120), 'Taktart' (4/4 C-Dur), 'Einzählen', and 'Metronom'. Below this is a track list with three tracks: 'Steinway Grand Piano', 'Bebop Organ', and 'Gesang'. The 'Bebop Organ' track is selected, and its editor is open, showing a piano roll with notes and various parameters like 'Zeitquantisierung', 'Stärke', and 'Transposition'. A red arrow points from the 'PARTITUR' label to the piano roll area.

**BIBLIOTHEK:**

Hier kannst du für eine ausgewählte Spur das passende Instrument aussuchen.

**EDITOR:**

Hier hast du eine Detailsicht für eine ausgewählte Spur. Eine eingespielte Melodie kannst du hier bearbeiten.