Bildungsstandards
im Fach Mathematik
für die
Allgemeine Hochschulreife

(Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012)

Einleitung

Die Strategie der Kultusministerkonferenz (KMK) zur Weiterentwicklung der Bildungsqualität in Deutschland sieht vor, durch die Einführung von gemeinsamen Bildungsstandards für Transparenz schulischer Anforderungen zu sorgen, die Entwicklung eines kompetenzorientierten Unterrichts zu fördern und eine Grundlage für die Überprüfung der erreichten Ergebnisse zu schaffen. Das von der KMK gewählte Konzept von Bildungsstandards legt fest, welche fachbezogenen Kompetenzen Schülerinnen und Schüler bis zu einem bestimmten Abschnitt in der Schullaufbahn entwickelt haben sollen. Unter einer Kompetenz wird dabei die Fähigkeit verstanden, Wissen und Können in den jeweiligen Fächern zur Lösung von Problemen anzuwenden. Die in den Bildungsstandards definierten Kompetenzen werden durch Beschreibungen von Anforderungen konkretisiert.

Als abschlussbezogene und in allen Ländern verbindliche Zielvorgaben bilden die Bildungsstandards der KMK eine wichtige Grundlage für die Entwicklung und Sicherung von Bildungsqualität in Schulen. Sie sollen schulische Lehr- und Lernprozesse auf eine kumulative und systematisch vernetzte Entwicklung von Kompetenzen orientieren, die auch für zukünftige Bildungsprozesse der Schülerinnen und Schüler bedeutsam sind. Weiterhin sollen sie dazu beitragen, die Durchlässigkeit von Bildungswegen und die Vergleichbarkeit von Abschlüssen sicherzustellen. Flankiert von geeigneten Implementierungs- und Unterstützungsmaßnahmen bilden Bildungsstandards eine Basis für eine systematische Weiterentwicklung des Bildungssystems.

Bei den in Deutschland eingeführten Bildungsstandards handelt es sich um Regelstandards, die angeben, welches Kompetenzniveau Schülerinnen und Schüler im Durchschnitt in einem Fach erreichen sollen. Für die Primarstufe (4. Jahrgangsstufe), den Hauptschulabschluss (9. Jahrgangsstufe) und den Mittleren Schulabschluss (10. Jahrgangsstufe) liegen bereits von der KMK verabschiedete Bildungsstandards vor. Sie beziehen sich auf die Fächer Deutsch und Mathematik sowie in der Sekundarstufe zusätzlich auf die Erste Fremdsprache (Englisch und Französisch). Für den Mittleren Schulabschluss wurden weiterhin Bildungsstandards in den naturwissenschaftlichen Fächern (Biologie, Chemie, Physik) erarbeitet.

Nun werden auch für die Allgemeine Hochschulreife Bildungsstandards in den Fächern Deutsch, Mathematik und fortgeführter Fremdsprache (Englisch/Französisch) vorgelegt, die im Auftrag der KMK entwickelt worden sind. Die Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife gehen von der allgemeinen Zielsetzung aus, wie sie in der „Vereinbarung zur Gestaltung der gymnasialen Oberstufe in der Sekundarstufe II“ (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 07.07.1972 i.d.F. vom 09.02.2012) beschrieben ist. Dort heißt es:

> "Der Unterricht in der gymnasialen Oberstufe vermittelt eine vertiefte Allgemeinbildung, allgemeine Studierfähigkeit sowie wissenschaftspropädeutische Bildung. Von besonderer Bedeutung sind dabei vertiefte Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten in den basalen Fächern Deutsch, Fremdsprache und Mathematik.
> [...]

> Der Unterricht in der gymnasialen Oberstufe ist fachbezogen, fachübergreifend und fächerverbindend angelegt. Er führt exemplarisch in wissenschaftliche Fragestellungen, Kategorien und Methoden ein und vermittelt eine Erziehung, die zur Persönlichkeitsentwicklung und -stärkung, zur Gestaltung des eigenen Lebens in sozialer Verantwortung sowie zur Mitwirkung in der demokratischen Gesellschaft befähigt.
>
> Im Unterricht in der gymnasialen Oberstufe geht es darüber hinaus um die Beherrschung eines fachlichen Grundlagenwissens als Voraussetzung für das Erschließen von Zusammenhängen zwischen Wissensbereichen, von Arbeitsweisen zur systematischen Beschaffung, Strukturierung und Nutzung von Informationen und Materialien, um Lernstrategien, die Selbständigkeit und Eigenverantwortlichkeit sowie Team- und Kommunikationsfähigkeit unterstützen."

Ausgehend von dieser allgemeinen Zielsetzung spezifizieren die Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife fachbezogene Kompetenzen, die im jeweiligen Unterricht der Fächer Deutsch, Mathematik und in der fortgeführten Fremdsprache (Englisch/Französisch) entwickelt werden.

Die Vorgaben der Einheitlichen Prüfungsanforderungen (EPA) für die Gestaltung der Abiturprüfungen wurden überarbeitet und in die Dokumentation der Bildungsstandards integriert. Damit lösen die Bildungsstandards der KMK für die Allgemeine Hochschulreife die EPA für die oben genannten Fächer vollständig ab. Sie greifen kompetenzorientierte Elemente der EPA auf und entwickeln diese weiter. Bei der Erarbeitung der Bildungsstandards leitend war im Sinne der Kumulativität schulischer Lehr- und Lernprozesse zudem das Prinzip der Anschlussfähigkeit an die Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss.

Wie bei den Bildungsstandards für den Primarbereich und für die Sekundarstufe I handelt es sich auch bei den Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife um Regelstandards, die allerdings zwischen einem grundlegenden und einem erhöhten Niveau unterscheiden. Das grundlegende Niveau soll in den Fächern Deutsch, Mathematik und fortgeführter Fremdsprache (Englisch/Französisch) mit mindestens drei, das erhöhte Niveau mit vier oder mehr Wochenstunden Unterricht erreicht werden. Die Bildungsstandards für beide Niveaus legen jeweils fest, welche Ziele Schülerinnen und Schüler, die einen entsprechenden Kurs absolviert haben, „in der Regel“ erreichen sollen. Dabei wurden die Anforderungen jeweils ausschließlich nach fachlichen und fachdidaktischen Gesichtspunkten festgelegt, sodass die Abstände zwischen beiden Niveaus je nach Kompetenzbereich unterschiedlich groß sein können. Die Regelstandards für das grundlegende Niveau können also z. B. nicht als Mindeststandards für das erhöhte Niveau interpretiert werden.
Die vorliegenden Bildungsstandards gelten für alle Bildungsgänge, die zur Allgemeinen Hochschulreife führen. Dies schließt berufliche Gymnasien sowie doppeltqualifizierende Bildungsgänge ein. Aufgrund ihres besonderen Profils wurden Berufsoberschulen (BOS) bei der Entwicklung der Bildungsstandards zunächst nicht berücksichtigt. Im Zusammenhang mit ihrer Bewährungsprüfung in den einbezogenen Schulformen soll in der

weiteren Entwicklung der Bildungsstandards jedoch geklärt werden, welche der Zielvorgaben sich auch für die BOS eignen und welche modifizierten sowie zusätzlichen Anforderungen für diese Schulform zu spezifizieren sind.

Innerhalb der Bildungsgänge, die zur Allgemeinen Hochschulreife führen, gelten die Bildungsstandards für alle Abiturientinnen und Abiturienten. Bei der Umsetzung der Bildungsstandards im Unterricht muss jedoch selbstverständlich die Heterogenität der Schülerinnen und Schüler berücksichtigt werden, die unter anderem mit ihrem sozialen und kulturellen Hintergrund, ihrer Herkunftssprache und ihrem Geschlecht verbunden ist. Ziel sollte sein, mithilfe geeigneter Strategien der Planung und Gestaltung des Unterrichts und schulischer Unterstützungsangebote die Voraussetzungen zu schaffen, dass Schülerinnen und Schüler unabhängig von ihrer Herkunft die Bildungsstandards in der Regel erreichen können.

Das vorliegende Dokument wurde vom IQB in Zusammenarbeit mit Fachexpertinnen und Fachexperten der Länder, Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftlern in den relevanten fachdidaktischen Bereichen sowie in enger Abstimmung mit einer von der KMK eingesetzten Steuerungsgruppe erstellt. Die Erarbeitung des Kapitels „Hinweise zur Prüfungsdurchführung“ erfolgte durch Mitglieder der Arbeitsgruppe „Gymnasiale Oberstufe“ der KMK. Die Abiturprüfungs- und Lernaufgaben, mit denen die Vorgaben für die Abiturprüfung und die Bildungsstandards illustriert werden, wurden unter der Leitung des IQB von Lehrkräften aus den Ländern entwickelt. Vorläufige Fassungen der einzelnen Kapitel wurden im Schulausschuss der KMK und in der Amtschefskommission „Qualitätssicherung in Schulen“ beraten und von den Ländern mehrfach kommentiert. Am 13.12.2011 fand eine Anhörung von Verbänden statt. Die Bildungsstandards und die illustrierenden Lernaufgaben wurden in diesem Rahmen sehr intensiv und konstruktiv, teilweise auch kontrovers diskutiert. Viele der Änderungsvorschläge wurden in der weiteren Überarbeitung der Bildungsstandards aufgegriffen und umgesetzt. Das Resultat dieses komplexen Verständigungsprozesses über die Kompetenzen, die Abiturientinnen und Abiturienten in den Fächern Deutsch, fortgeführter Fremdsprache (Englisch und Französisch) und Mathematik erwerben sollen, wurde im Oktober 2012 vom Plenum der KMK verabschiedet.

Die Darstellung der Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife in den einzelnen Fächern folgt einer einheitlichen Gliederung. Soweit wie möglich wurde versucht, einheitliche Konzepte und Begriffe zu verwenden, ohne dabei jedoch die Besonderheiten der Fächer zu verkennen.

In der Fachpräambel werden zunächst die allgemeinen Ziele des jeweiligen Faches beschrieben. Dabei wird nicht nur auf die Rolle des Faches für übergreifende Ziele schulischer Bildungsprozesse eingegangen (Allgemeinbildung, Vorbereitung auf Beruf bzw. Studium, Teilhabe am gesellschaftlichen Leben, Persönlichkeitsbildung einschließlich Interessensentwicklung etc.), sondern auch auf die Frage, welche allgemeinen Kompetenzen Schülerinnen und Schüler im jeweiligen Fach entwickeln sollen (z. B. sprachliche Handlungskompetenz, interkulturelle Kompetenz, mathematische Modellierungsfähigkeit). Weiterhin wird in diesem Abschnitt erläutert, von welchen fachdidaktischen bzw. fachbezogenen bildungstheoretischen Grundlagen die Bildungsstandards im jeweiligen Fach ausgehen. Die Bildungsstandards erheben den Anspruch, sich am aktuellen Stand fachdidaktischer Forschung und Diskussionen zu orientieren und innovative Impulse zu setzen. Dies wird ebenfalls in den Fachpräambeln erläutert.

Ferner werden in den Fachpräambeln die Kompetenzbereiche und ihre Struktur beschrieben, auf die sich die Bildungsstandards beziehen. Die Kompetenzbereiche werden grafisch dargestellt und jeweils kurz definiert. Weiterhin wird auf das Verhältnis der beschriebenen Struktur, der Bezeichnungen und Definitionen der Kompetenzbereiche zu den Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss (MSA) eingegangen. Substanzielle Abweichungen vom MSA werden begründet.

Den Kern des Dokuments bildet die Darstellung der Bildungsstandards, die zunächst allgemein eingeführt werden. Es wird beschrieben, welche Aspekte des Wissens und Könnens der jeweilige Kompetenzbereich umfasst und wie diese miteinander zusammenhängen. Anschließend folgt die Auflistung der Bildungsstandards. Diese wurden in Form von Anforderungen formuliert, die Schülerinnen und Schüler am Ende der gymnasialen Oberstufe bewältigen können sollen („Könnensbeschreibungen"). In der Regel werden Bildungsstandards für das grundlegende und das erhöhte Niveau unterschieden. Für wenige Kompetenzbereiche wurde eine solche Differenzierung jedoch nicht als sinnvoll erachtet, was an entsprechender Stelle begründet wird. Insgesamt beschreiben die Bildungsstandards, über welche Kompetenzen Schülerinnen und Schüler in der Regel verfügen sollten, wenn sie die Schule mit der Allgemeinen Hochschulreife abschließen.

Im Anschluss an die Bildungsstandards werden Vorgaben für die Gestaltung der Abiturprüfung beschrieben, auf die sich die Länder geeinigt haben. Ausgehend von den EPA, die mit diesem Dokument weiterentwickelt und für die oben angegebenen Fächer abgelöst werden, legen sie Aufgabenformate fest, die in der Abiturprüfung eingesetzt werden können, geben Richtlinien für die Bewertung der Schülerleistungen vor und beschreiben Rahmenbedingungen, etwa zum zeitlichen Umfang der Prüfungen, die einzuhalten sind.

Zur Illustration der Vorgaben für die Abiturprüfung enthält das Dokument einige exemplarische Abiturprüfungsaufgaben. Diese sollen lediglich einen ersten Eindruck davon vermitteln, wie die in den Bildungsstandards formulierten Anforderungen im Abitur geprüft werde könnten. Im Rahmen der Implementierung der Bildungsstandards in den Ländern sollen weitere Abiturprüfungsaufgaben entwickelt und mit Hinweisen zu ihrer Bewertung veröffentlicht werden.

Darüber hinaus enthält das Dokument exemplarische Lernaufgaben, die ausgewählte Bildungsstandards illustrieren. Diese Aufgaben zeigen, welche Aufgabenstellungen dazu geeignet sein können, die jeweiligen Kompetenzen bei Schülerinnen und Schülern im Unterricht zu entwickeln. Die Lernaufgaben sind nicht als Prüfungsaufgaben geeignet. Sie sollen aktive Lernprozesse anstoßen und diese durch eine Folge gestufter Aufgabenstellungen steuern. Komplexere Lernaufgaben zielen überdies darauf ab, die Steuerung der Aufgabenbearbeitung auf die Lernenden zu übertragen. In den Einleitungen zu den einzelnen Lernaufgaben wird kurz dargestellt, welche Bildungsstandards sie illustrieren, wie die Aufgaben weiteren Strukturierungsmerkmalen von Kompetenzen im jeweiligen Fach zuzuordnen sind und inwiefern die Aufgaben besonders geeignet sind, die Zielkompetenzen zu entwickeln. Dabei ist zu berücksichtigen, dass es sich bei den Lernaufgaben nicht um komplette Unterrichtseinheiten handelt, die auf eine umfassende Bearbeitung des jeweiligen Materials abzielen, sondern um ausgewählte Aufgabenstellungen, die gezielt einzelne Kompetenzen in den Blick nehmen. Zu dem jeweiligen Material lassen sich zusätzliche Aufgaben erstellen, die dazu geeignet sind, weitere relevante Kompetenzen zu entwickeln, wie etwa Aufgabenstellungen, die für ein bestimmtes Profil beruflicher Gymnasien besonders relevant sind.

Damit Bildungsstandards ihre angestrebte Wirksamkeit entfalten können, müssen diese von den verschiedenen Akteuren im Bildungssystem aufgegriffen und umgesetzt werden. Dies betrifft die Bildungspolitik, die Bildungsadministration, die Lehreraus- und Lehrerweiterbildung sowie die Schulpraxis. Die Länder werden daher Strategien entwickeln und umsetzen, die darauf abzielen, die Erreichung der vereinbarten Zielvorgaben zu gewährleisten. Ab dem Schuljahr 2016/2017 sollen die Abiturprüfungen in allen Ländern auf den Bildungsstandards basieren.

Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife im Fach Mathematik

Inhalt

1 Fachpräambel ... 9

1.1 Allgemeine Ziele des Faches und fachdidaktische Grundlagen ... 9

1.2 Kompetenzbereiche ... 10

1.3 Anforderungsniveaus ... 12

1.4 Digitale Mathematikwerkzeuge ... 12

2 Bildungsstandards für die Kompetenzbereiche im Fach Mathematik ... 14

2.1 Die allgemeinen mathematischen Kompetenzen ... 14

2.2 Die mathematischen Leitideen ... 21

3 Hinweise zur Prüfungsdurchführung zum Erwerb der Allgemeinen Hochschulreife im Fach Mathematik ... 27

3.1 Allgemeines ... 27

3.1.1 Anforderungsbereiche und allgemeine Vorgaben zur schriftlichen und zur mündlichen Prüfungsaufgabe ... 27

3.1.2 Schriftliche Prüfungsaufgabe ... 28

3.1.3 Mündliche Prüfungsaufgabe ... 29

3.2 Fachspezifische Hinweise ... 30

3.2.1 Schriftliche Prüfungsaufgabe im Fach Mathematik ... 30

3.2.1.1 Struktur der Prüfungsaufgabe ... 30

3.2.1.2 Erstellung der Prüfungsaufgabe ... 30

3.2.1.3 Bewertung der Prüfungsleistung ... 30

3.2.2 Mündliche Prüfungsaufgabe im Fach Mathematik ... 31

4 Illustrierende Prüfungsaufgaben zum Erwerb der Allgemeinen Hochschulreife im Fach Mathematik ... 32

4.1 Medikamente (erhöhtes Anforderungsniveau) ... 33

4.2 Würfel (erhöhtes Anforderungsniveau) 39
4.3 Seehunde (grundlegendes Anforderungsniveau) 44
4.4 Flugbuchung 1 (grundlegendes Anforderungsniveau) 50
4.5 Flugbuchung 2 (grundlegendes Anforderungsniveau) 55

5 Illustrierende Lernaufgaben zu ausgewählten Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife 61

5.1 Änderung und Bestand 62
5.2 Kristallgitter 73
5.3 Flugbuchung 81
5.4 Kostenrechnung (Berufliches Gymnasien) 88

1 Fachpräambel

1.1 Allgemeine Ziele des Faches und fachdidaktische Grundlagen

Das Fach Mathematik leistet einen grundlegenden Beitrag zu den Bildungszielen der gymnasialen Oberstufe und der Kompetenzentwicklung der Schülerinnen und Schüler bis zur Allgemeinen Hochschulreife. Vermittelt werden eine vertiefte Allgemeinbildung, allgemeine Studierfähigkeit sowie wissenschaftspropädeutische Bildung. So werden die Grundlagen für fachliches und überfachliches Handeln mit Blick auf Anforderungen von Wissenschaft und beruflicher Bildung geschaffen.

Bildungstheoretische Grundlagen des Mathematikunterrichts sind der Allgemeinbildungsauftrag wie auch die Anwendungsorientierung des Unterrichtsfaches Mathematik. Demnach wird Mathematikunterricht durch drei *Grunderfahrungen* geprägt, die jeder Schülerin und jedem Schüler vermittelt werden müssen:[1]

- Mathematik als Werkzeug, um Erscheinungen der Welt aus Natur, Gesellschaft, Kultur, Beruf und Arbeit in einer spezifischen Weise wahrzunehmen und zu verstehen,
- Mathematik als geistige Schöpfung und auch deduktiv geordnete Welt eigener Art,
- Mathematik als Mittel zum Erwerb von auch über die Mathematik hinausgehenden, insbesondere heuristischen Fähigkeiten.

In der Vermittlung dieser Grunderfahrungen entwickelt der Mathematikunterricht seine spezifische bildende Kraft und leistet einen unverzichtbaren Beitrag zur Erfüllung des oben genannten Bildungsauftrags der gymnasialen Oberstufe. Mathematik kann so in ihrer Reichhaltigkeit als kulturelles und gesellschaftliches Phänomen erfahren werden.

[1] Nach Heinrich Winter, GDM-Mitteilungen, Heft 61, 1995.

1.2 Kompetenzbereiche

Die Kompetenzbereiche im Fach Mathematik haben folgende Struktur:

Allgemeine mathematische Kompetenzen	Leitideen
▪ Mathematisch argumentieren [K1] ▪ Probleme mathematisch lösen [K2] ▪ Mathematisch modellieren [K3] ▪ Mathematische Darstellungen verwenden [K4] ▪ Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen [K5] ▪ Mathematisch kommunizieren [K6]	▪ Algorithmus und Zahl [L1] ▪ Messen [L2] ▪ Raum und Form [L3] ▪ Funktionaler Zusammenhang [L4] ▪ Daten und Zufall [L5]

Tabelle 1.2-1

Die allgemeinen mathematischen Kompetenzen werden von den Lernenden nur in der aktiven Auseinandersetzung mit Fachinhalten erworben. Dabei beschreiben die drei **Anforderungsbereiche** unterschiedliche kognitive Ansprüche von kompetenzbezogenen mathematischen Aktivitäten. Die allgemeinen mathematischen Kompetenzen manifestieren sich in jedem einzelnen mathematischen Inhalt, d. h., allgemeine mathematische Kompetenzen und Inhalte sind untrennbar miteinander verknüpft (in Abbildung 1.2-1 durch ein Raster angedeutet). Man wird erst dann vom hinreichenden Erwerb einer allgemeinen mathematischen Kompetenz sprechen, wenn diese an ganz unterschiedlichen Leitideen in allen drei Anforderungsbereichen erfolgreich eingesetzt werden kann.

Die Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife sind eine direkte und organische Fortführung der Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss. Die in der Sekundarstufe I erworbenen Kompetenzen sind unverzichtbare Grundlage für die Arbeit in der Sekundarstufe II. Sie werden dort beständig vertieft und erweitert und können damit auch Gegenstand der Abiturprüfung sein. Die grafische Darstellung (Abbildung 1.2-1) schließt insofern direkt an die Darstellung der Bildungsstandards zum Mittleren Schulabschluss an.

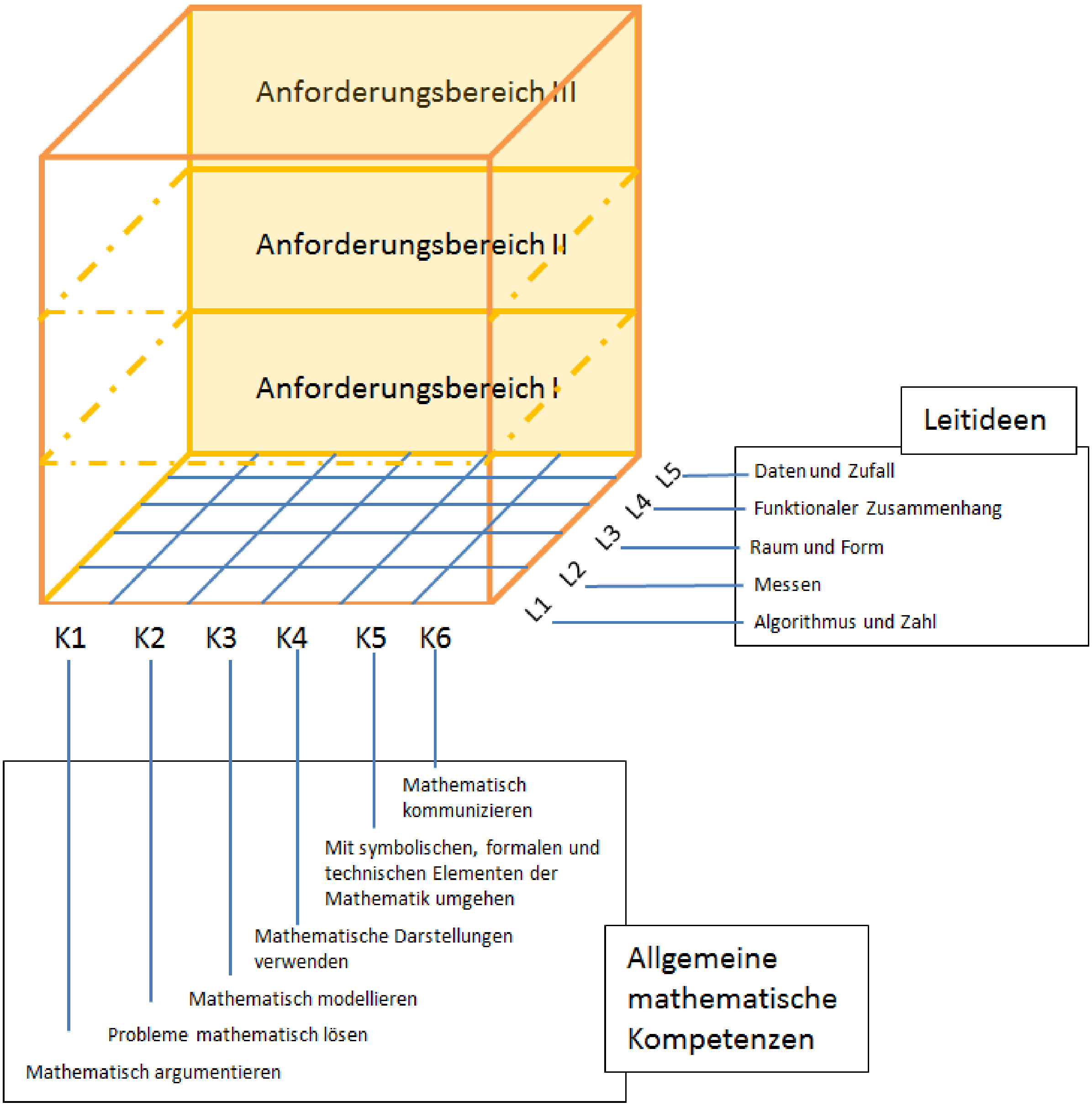


Abbildung 1.2-1: Kompetenzmodell der Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife

Für den Erwerb der Kompetenzen ist im Unterricht auf eine Vernetzung der Inhalte der Mathematik untereinander ebenso zu achten wie auf eine Vernetzung mit anderen Fächern. Aufgaben mit Anwendungen aus der Lebenswelt haben die gleiche Wichtigkeit und Wertigkeit wie innermathematische Aufgaben.

1.3 Anforderungsniveaus

Gemäß der „Vereinbarung zur Gestaltung der gymnasialen Oberstufe in der Sekundarstufe II" i. d. g. F. unterscheiden die Länder Unterricht nach **grundlegendem** und **erhöhtem Anforderungsniveau:**[2]

	Grundlegendes Anforderungsniveau	**Erhöhtes Anforderungsniveau**
Leitideen	Der Umfang an mathematischen Inhalten stellt Grundkenntnisse bereit. Diese sind in den Leitideen ausgewiesen.	Es wird ein größerer Umfang an mathematischen Inhalten behandelt, die in den Leitideen explizit ausgewiesen sind, hierzu gehört insbesondere auch ein erhöhter Komplexitäts-, Vertiefungs-, Präzisierungs- und Formalisierungsgrad.
Anforderungsbereiche bzgl. allgemeiner mathematischer Kompetenzen	Der Schwerpunkt der zu erbringenden Prüfungsleistungen liegt im Anforderungsbereich II. Darüber hinaus sind die Anforderungsbereiche I und III zu berücksichtigen. Im Prüfungsfach auf grundlegendem Anforderungsniveau sind die Anforderungsbereiche I und II stärker zu akzentuieren.	Der Schwerpunkt der zu erbringenden Prüfungsleistungen liegt im Anforderungsbereich II. Darüber hinaus sind die Anforderungsbereiche I und III zu berücksichtigen. Im Prüfungsfach auf erhöhtem Anforderungsniveau sind die Anforderungsbereiche II und III stärker zu akzentuieren.

Tabelle -1.3-1

1.4 Digitale Mathematikwerkzeuge

Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen wird durch den sinnvollen Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge unterstützt. Das Potenzial dieser Werkzeuge entfaltet sich im Mathematikunterricht

- beim **Entdecken** mathematischer Zusammenhänge, insbesondere durch interaktive Erkundungen beim Modellieren und Problemlösen,

[2] Anforderungsniveaus sind streng von den Anforderungsbereichen zu unterscheiden.

- durch **Verständnisförderung** für mathematische Zusammenhänge, nicht zuletzt mittels vielfältiger Darstellungsmöglichkeiten,
- mit der **Reduktion** schematischer Abläufe und der **Verarbeitung größerer Datenmengen,**
- durch die Unterstützung individueller Präferenzen und Zugänge beim Bearbeiten von Aufgaben einschließlich der reflektierten Nutzung von **Kontrollmöglichkeiten.**

Einer durchgängigen Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge im Unterricht folgt dann auch deren Einsatz in der Prüfung.

2 Bildungsstandards für die Kompetenzbereiche im Fach Mathematik

2.1 Die allgemeinen mathematischen Kompetenzen

In den Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife werden sechs allgemeine mathematische Kompetenzen unterschieden, die das Spektrum mathematischen Arbeitens in der Sekundarstufe II in hinreichender Breite erfassen. Dabei ist es weder möglich noch beabsichtigt, diese Kompetenzen scharf voneinander abzugrenzen. Es ist vielmehr typisch für mathematisches Arbeiten, dass mehrere Kompetenzen im Verbund benötigt werden. Dies trifft auch auf die Aufgabenbeispiele zu.

Im Folgenden werden die sechs allgemeinen mathematischen Kompetenzen näher beschrieben, insbesondere auch durch ihre jeweiligen Ausprägungen in den drei Anforderungsbereichen. Wie in 1.2 betont, sind diese Kompetenzen immer untrennbar mit den – in den Leitideen konkretisierten – mathematischen Inhalten verbunden.

Die Kompetenz „Mathematisch argumentieren“ (K1)

Zu dieser Kompetenz gehören sowohl das Entwickeln eigenständiger, situationsangemessener mathematischer Argumentationen und Vermutungen als auch das Verstehen und Bewerten gegebener mathematischer Aussagen. Das Spektrum reicht dabei von einfachen Plausibilitätsargumenten über inhaltlich-anschauliche Begründungen bis zu formalen Beweisen. Typische Formulierungen, die auf die Kompetenz des Argumentierens hinweisen, sind beispielsweise „Begründen Sie!“, „Widerlegen Sie!“, „Gibt es?“ oder „Gilt das immer?“.

Die drei Anforderungsbereiche zu dieser Kompetenz lassen sich wie folgt beschreiben:

Anforderungsbereich I: Die Schülerinnen und Schüler können …

- Routineargumentationen (bekannte Sätze, Verfahren, Herleitungen, usw.) wiedergeben und anwenden
- einfache rechnerische Begründungen geben oder einfache logische Schlussfolgerungen ziehen
- Argumentationen auf der Basis von Alltagswissen führen

Anforderungsbereich II: Die Schülerinnen und Schüler können …

- überschaubare mehrschrittige Argumentationen und logische Schlüsse nachvollziehen, erläutern oder entwickeln

Anforderungsbereich III: Die Schülerinnen und Schüler können …

- Beweise und anspruchsvolle Argumentationen nutzen, erläutern oder entwickeln
- verschiedene Argumente nach Kriterien wie Reichweite und Schlüssigkeit bewerten

Die Kompetenz „Probleme mathematisch lösen“ (K2)

Diese Kompetenz beinhaltet, ausgehend vom Erkennen und Formulieren mathematischer Probleme, das Auswählen geeigneter Lösungsstrategien sowie das Finden und das Ausführen geeigneter Lösungswege. Das Spektrum reicht von der Anwendung bekannter bis zur Konstruktion komplexer und neuartiger Strategien. Heuristische Prinzipien, wie z. B. „Skizze anfertigen“, „systematisch probieren“, „zerlegen und ergänzen“, „Symmetrien verwenden“, „Extremalprinzip“, „Invarianten finden“ sowie „vorwärts und rückwärts arbeiten“, werden gezielt ausgewählt und angewendet.

Die drei Anforderungsbereiche zu dieser Kompetenz lassen sich wie folgt beschreiben:

Anforderungsbereich I: Die Schülerinnen und Schüler können …

- einen Lösungsweg einer einfachen mathematischen Aufgabe durch Identifikation und Auswahl einer naheliegenden Strategie, z. B. durch Analogiebetrachtung, finden

Anforderungsbereich II: Die Schülerinnen und Schüler können …

- einen Lösungsweg zu einer Problemstellung, z. B. durch ein mehrschrittiges, strategiegestütztes Vorgehen, finden

Anforderungsbereich III: Die Schülerinnen und Schüler können …

- eine Strategie zur Lösung eines komplexeren Problems, z. B. zur Verallgemeinerung einer Schlussfolgerung, durch Anwenden mehrerer Heurismen oder zur Beurteilung verschiedener Lösungswege, entwickeln und anwenden

Die Kompetenz „Mathematisch modellieren“ (K3)

Hier geht es um den Wechsel zwischen Realsituationen und mathematischen Begriffen, Resultaten oder Methoden. Hierzu gehört sowohl das Konstruieren passender mathematischer Modelle als auch das Verstehen oder Bewerten vorgegebener Modelle. Typische Teilschritte des Modellierens sind das Strukturieren und Vereinfachen gegebener Realsituationen, das Übersetzen realer Gegebenheiten in mathematische Modelle, das Interpretieren mathematischer Ergebnisse in Bezug auf Realsituationen und das Überprüfen von Ergebnissen im Hinblick auf Stimmigkeit und Angemessenheit bezogen auf die Realsituation. Das Spektrum reicht von Standardmodellen (z. B. bei linearen Zusammenhängen) bis zu komplexen Modellierungen.

Die drei Anforderungsbereiche zu dieser Kompetenz lassen sich wie folgt beschreiben:

Anforderungsbereich I: Die Schülerinnen und Schüler können ...

- vertraute und direkt erkennbare Modelle anwenden
- eine Realsituation direkt in ein mathematisches Modell überführen
- ein mathematisches Resultat auf eine gegebene Realsituation übertragen

Anforderungsbereich II: Die Schülerinnen und Schüler können ...

- mehrschrittige Modellierungen mit wenigen und klar formulierten Einschränkungen vornehmen
- Ergebnisse einer solchen Modellierung interpretieren
- ein mathematisches Modell an veränderte Umstände anpassen

Anforderungsbereich III: Die Schülerinnen und Schüler können ...

- eine komplexe Realsituation modellieren, wobei Variablen und Bedingungen festgelegt werden müssen
- mathematische Modelle im Kontext einer Realsituation überprüfen, vergleichen und bewerten

Die Kompetenz „Mathematische Darstellungen verwenden“ (K4)

Diese Kompetenz umfasst das Auswählen geeigneter Darstellungsformen, das Erzeugen mathematischer Darstellungen und das Umgehen mit gegebenen Darstellungen. Hierzu zählen Diagramme, Graphen und Tabellen ebenso wie Formeln. Das Spektrum reicht von Standarddarstellungen – wie Wertetabellen – bis zu eigenen Darstellungen, die dem Strukturieren und Dokumentieren individueller Überlegungen dienen und die Argumentation und das Problemlösen unterstützen.

Die drei Anforderungsbereiche zu dieser Kompetenz lassen sich wie folgt beschreiben:

Anforderungsbereich I: Die Schülerinnen und Schüler können ...

- Standarddarstellungen von mathematischen Objekten und Situationen anfertigen und nutzen

Anforderungsbereich II: Die Schülerinnen und Schüler können ...

- gegebene Darstellungen verständig interpretieren oder verändern
- zwischen verschiedenen Darstellungen wechseln

Anforderungsbereich III: Die Schülerinnen und Schüler können ...

- mit unvertrauten Darstellungen und Darstellungsformen sachgerecht und verständig umgehen
- eigene Darstellungen problemadäquat entwickeln
- verschiedene Darstellungen und Darstellungsformen zweckgerichtet beurteilen

Die Kompetenz „Mit Mathematik symbolisch/formal/technisch umgehen“ (K5)

Diese Kompetenz beinhaltet in erster Linie das Ausführen von Operationen mit mathematischen Objekten wie Zahlen, Größen, Variablen, Termen, Gleichungen und Funktionen sowie Vektoren und geometrischen Objekten. Das Spektrum reicht hier von einfachen und überschaubaren Routineverfahren bis hin zu komplexen Verfahren einschließlich deren reflektierender Bewertung. Diese Kompetenz beinhaltet auch Faktenwissen und grundlegendes Regelwissen für ein zielgerichtetes und effizientes Bearbeiten von mathematischen Aufgabenstellungen, auch mit eingeführten Hilfsmitteln und digitalen Mathematikwerkzeugen.

Die drei Anforderungsbereiche zu dieser Kompetenz lassen sich wie folgt beschreiben:

Anforderungsbereich I: Die Schülerinnen und Schüler können …

- elementare Lösungsverfahren verwenden
- Formeln und Symbole direkt anwenden
- mathematische Hilfsmittel und digitale Mathematikwerkzeuge direkt nutzen

Anforderungsbereich II: Die Schülerinnen und Schüler können …

- formale mathematische Verfahren anwenden
- mit mathematischen Objekten im Kontext umgehen
- mathematische Hilfsmittel und digitale Mathematikwerkzeuge je nach Situation und Zweck gezielt auswählen und effizient einsetzen

Anforderungsbereich III: Die Schülerinnen und Schüler können …

- komplexe Verfahren durchführen
- verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren bewerten
- die Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Verfahren, Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge reflektieren

Die Kompetenz „Mathematisch kommunizieren“ (K6)

Zu dieser Kompetenz gehören sowohl das Entnehmen von Informationen aus schriftlichen Texten, mündlichen Äußerungen oder sonstigen Quellen als auch das Darlegen von Überlegungen und Resultaten unter Verwendung einer angemessenen Fachsprache. Das Spektrum reicht von der direkten Informationsentnahme aus Texten des Alltagsgebrauchs bzw. vom Aufschreiben einfacher Lösungswege bis hin zum sinnentnehmenden Erfassen fachsprachlicher Texte bzw. zur strukturierten Darlegung oder Präsentation eigener Überlegungen. Sprachliche Anforderungen spielen bei dieser Kompetenz eine besondere Rolle.

Die drei Anforderungsbereiche zu dieser Kompetenz lassen sich wie folgt beschreiben:

Anforderungsbereich I: Die Schülerinnen und Schüler können ...

- einfache mathematische Sachverhalte darlegen
- Informationen aus kurzen Texten mit mathematischem Gehalt identifizieren und auswählen, wobei die Ordnung der Informationen im Text die Schritte der mathematischen Bearbeitung nahelegt

Anforderungsbereich II: Die Schülerinnen und Schüler können ...

- mehrschrittige Lösungswege, Überlegungen und Ergebnisse verständlich darlegen
- Äußerungen (auch fehlerhafte) anderer Personen zu mathematischen Aussagen interpretieren
- mathematische Informationen aus Texten identifizieren und auswählen, wobei die Ordnung der Informationen nicht unmittelbar den Schritten der mathematischen Bearbeitung entsprechen muss

Anforderungsbereich III: Die Schülerinnen und Schüler können ...

- eine komplexe mathematische Lösung oder Argumentation kohärent und vollständig darlegen oder präsentieren
- mathematische Fachtexte sinnentnehmend erfassen
- mündliche und schriftliche Äußerungen mit mathematischen Gehalt von anderen Personen miteinander vergleichen, sie bewerten und ggf. korrigieren

2.2 Die mathematischen Leitideen

Die Bewältigung mathematischer Problemsituationen erfordert das permanente Zusammenspiel von prozess- und inhaltsbezogenen Kompetenzen. Insofern sind die folgenden – in der Sekundarstufe II verbindlichen – Inhalte immer im Kontext allgemeiner mathematischer Kompetenzen und deren Anforderungsbereichen zu sehen. Unter „Inhalten" werden dabei insbesondere auch adäquate Grundvorstellungen verstanden, die ein Verständnis dieser Inhalte erst konstituieren. Die inhaltsbezogenen Kompetenzen werden jeweils übergreifenden Leitideen zugeordnet, die nicht auf bestimmte klassische mathematische Themenbereiche (Analysis, Lineare Algebra & Analytische Geometrie, Stochastik) begrenzt sind. Die Leitideen tragen damit zur Vernetzung dieser traditionellen klassischen Sachgebiete bei.

Bei allen Leitideen wird zuerst ein inhaltlicher Kernbereich beschrieben, der das *grundlegende* Anforderungsniveau charakterisiert. Danach werden die *zusätzlichen* Inhalte für das *erhöhte* Anforderungsniveau aufgeführt.

Innerhalb der Leitideen können die Länder den Schwerpunkt alternativ auf die Beschreibung mathematischer Prozesse durch Matrizen (Alternative A1) oder die vektorielle Analytische Geometrie (Alternative A2) setzen.

Ebenso können die Länder den Schwerpunkt auf die Schätzung von Parametern (B1) oder auf die Testung von Hypothesen (B2) setzen.

Leitidee: Algorithmus und Zahl (L1)

Diese Leitidee verallgemeinert zum einen den Zahlbegriff der Sekundarstufe I zu Tupeln und Matrizen einschließlich zugehöriger Operationen. Die Leitidee erweitert zum anderen die Vorstellungen von den reellen Zahlen durch Approximationen mittels infinitesimaler Methoden. Weiter umfasst die Leitidee die Kenntnis, das Verstehen und das Anwenden mathematischer Verfahren, die prinzipiell automatisierbar und damit einer Rechnernutzung zugänglich sind.

Die darauf bezogenen mathematischen Sachgebiete der Sekundarstufe II sind die Anfänge der *Analysis* und die *Lineare Algebra*.

Grundlegendes und erhöhtes Anforderungsniveau

Die Schülerinnen und Schüler können ...

- geeignete Verfahren zur Lösung von Gleichungen und Gleichungssystemen auswählen
- ein algorithmisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme erläutern und es anwenden
- Grenzwerte auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs insbesondere bei der Bestimmung von Ableitung und Integral nutzen
- einfache Sachverhalte mit Tupeln oder Matrizen beschreiben
- mathematische Prozesse durch Matrizen unter Nutzung von Matrizenmultiplikation und inverser Matrizen beschreiben (A1)

Erhöhtes Anforderungsniveau

Die Schülerinnen und Schüler können darüber hinaus ...

- Potenzen von Matrizen bei mehrstufigen Prozessen nutzen (A1)
- Grenzmatrizen sowie Fixvektoren interpretieren (A1)

Leitidee: Messen (L2)

Diese Leitidee erweitert das Bestimmen und Deuten von Größen aus der Sekundarstufe I um infinitesimale, numerische und analytisch-geometrische Methoden. Dies betrifft sowohl funktionale Größen wie Änderungsraten und (re-)konstruierte Bestände als auch Größen im Koordinatensystem wie Winkel, Längen, Flächeninhalte und Volumina. Weiter umfasst die Leitidee stochastische Kenngrößen, die als Ergebnisse von Messprozessen im weiteren Sinne aufgefasst werden.

Die darauf bezogenen mathematischen Sachgebiete der Sekundarstufe II sind die *Analysis*, die *Analytische Geometrie* und die *Stochastik*.

Grundlegendes und erhöhtes Anforderungsniveau

Die Schülerinnen und Schüler können …

- Streckenlängen und Winkelgrößen im Raum[3] auch mithilfe des Skalarprodukts bestimmen
- Sekanten- und Tangentensteigungen an Funktionsgraphen bestimmen
- Änderungsraten berechnen und deuten
- Inhalte von Flächen, die durch Funktionsgraphen begrenzt sind, bestimmen
- Bestände aus Änderungsraten und Anfangsbestand berechnen
- Lage- und Streumaße einer Stichprobe bestimmen und deuten
- Erwartungswert und Standardabweichung diskreter Zufallsgrößen bestimmen und deuten

Erhöhtes Anforderungsniveau

Die Schülerinnen und Schüler können darüber hinaus …

- Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen bestimmen (A2)
- das Volumen von Körpern bestimmen, die durch Rotation um die Abszissenachse entstehen

[3] Kein Raumwinkel.

Leitidee: Raum und Form (L3)

Diese Leitidee ist auf die Weiterentwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens aus der Sekundarstufe I gerichtet. Sie beinhaltet den Umgang mit Objekten im Raum. Es geht hier sowohl um Eigenschaften und Beziehungen dieser Objekte als auch um Darstellungen mit geeigneten Hilfsmitteln einschließlich Geometriesoftware. Das zugehörige mathematische Sachgebiet der Sekundarstufe II ist die *Analytische Geometrie*.

Grundlegendes und erhöhtes Anforderungsniveau

Die Schülerinnen und Schüler können ...

- geometrische Sachverhalte in Ebene und Raum koordinatisieren
- elementare Operationen mit geometrischen Vektoren ausführen und Vektoren auf Kollinearität untersuchen
- das Skalarprodukt geometrisch deuten
- Vektoren beim Arbeiten mit geradlinig bzw. ebenflächig begrenzten geometrischen Objekten anwenden (A2)
- Geraden und Ebenen analytisch beschreiben und die Lagebeziehungen von Geraden untersuchen (A2)

Erhöhtes Anforderungsniveau

Die Schülerinnen und Schüler können darüber hinaus ...

- die Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen untersuchen (A2)

Leitidee: Funktionaler Zusammenhang (L4)

Diese Leitidee ist darauf gerichtet, die funktionalen Vorstellungen aus der Sekundarstufe I mit Begriffen und Verfahren der elementaren Analysis zu vertiefen und den Funktionsbegriff durch vielfältige Beispiele zu erweitern, auch in stochastischen Kontexten. Es geht hier um funktionale Beziehungen zwischen Zahlen bzw. Größen sowie deren Darstellungen und Eigenschaften, auch unter Nutzung infinitesimaler Methoden und geeigneter Software.

Die darauf bezogenen mathematischen Sachgebiete der Sekundarstufe II sind in erster Linie die *Analysis* und die *Stochastik*.

Grundlegendes und erhöhtes Anforderungsniveau

Die Schülerinnen und Schüler können ...

- die sich aus den Funktionen der Sekundarstufe I ergebenden Funktionsklassen zur Beschreibung und Untersuchung quantifizierbarer Zusammenhänge nutzen
- in einfachen Fällen Verknüpfungen und Verkettungen von Funktionen zur Beschreibung quantifizierbarer Zusammenhänge nutzen
- die Ableitung insbesondere als lokale Änderungsrate deuten
- Änderungsraten funktional beschreiben (Ableitungsfunktion) und interpretieren
- die Funktionen der Sekundarstufe I ableiten, auch unter Nutzung der Faktor- und Summenregel
- die Produktregel zum Ableiten von Funktionen verwenden
- die Ableitung zur Bestimmung von Monotonie und Extrema von Funktionen nutzen
- den Ableitungsgraphen aus dem Funktionsgraphen und umgekehrt entwickeln
- das bestimmte Integral deuten, insbesondere als (re-)konstruierten Bestand
- geometrisch-anschaulich den Hauptsatz als Beziehung zwischen Ableitungs- und Integralbegriff begründen
- Funktionen mittels Stammfunktionen integrieren
- Zufallsgrößen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen zur Beschreibung stochastischer Situationen nutzen

Erhöhtes Anforderungsniveau

Die Schülerinnen und Schüler können darüber hinaus ...

- die Ableitung mithilfe der Approximation durch lineare Funktionen deuten
- Kettenregel zum Ableiten von Funktionen verwenden
- die ln-Funktion als Stammfunktion von $x \to \frac{1}{x}$ und als Umkehrfunktion der e-Funktion nutzen

Leitidee: Daten und Zufall (L5)

Diese Leitidee vernetzt Begriffe und Methoden zur Aufbereitung und Interpretation von statistischen Daten mit solchen zur Beschreibung und Modellierung von zufallsabhängigen Situationen. In Ausweitung und Vertiefung stochastischer Vorstellungen der Sekundarstufe I umfasst diese Leitidee insbesondere den Umgang mit mehrstufigen Zufallsexperimenten, die Untersuchung und Nutzung von Verteilungen sowie einen Einblick in Methoden der beurteilenden Statistik, auch mithilfe von Simulationen und unter Verwendung einschlägiger Software.

Das darauf bezogene mathematische Sachgebiet der Sekundarstufe II ist die *Stochastik*.

Grundlegendes und erhöhtes Anforderungsniveau

Die Schülerinnen und Schüler können ...

- exemplarisch statistische Erhebungen planen und beurteilen
- Sachverhalte mithilfe von Baumdiagrammen oder Vierfeldertafeln untersuchen und damit Problemstellungen im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten lösen
- Teilvorgänge mehrstufiger Zufallsexperimente auf stochastische Unabhängigkeit anhand einfacher Beispiele untersuchen
- die Binomialverteilung und ihre Kenngrößen nutzen
- Simulationen zur Untersuchung stochastischer Situationen verwenden
- in einfachen Fällen aufgrund von Stichproben auf die Gesamtheit schließen

Erhöhtes Anforderungsniveau

Die Schülerinnen und Schüler können darüber hinaus ...

- für binomialverteilte Zufallsgrößen Aussagen über die unbekannte Wahrscheinlichkeit sowie die Unsicherheit und Genauigkeit dieser Aussagen begründen (B1)
- Hypothesentests interpretieren und die Unsicherheit und Genauigkeit der Ergebnisse begründen (B2)
- exemplarisch diskrete und stetige Zufallsgrößen unterscheiden und die „Glockenform“ als Grundvorstellung von normalverteilten Zufallsgrößen nutzen
- stochastische Situationen untersuchen, die zu annähernd normalverteilten Zufallsgrößen führen

3 Hinweise zur Prüfungsdurchführung zum Erwerb der Allgemeinen Hochschulreife im Fach Mathematik

3.1 Allgemeines

Unter Berücksichtigung der „Vereinbarung über die Abiturprüfung der gymnasialen Oberstufe in der Sekundarstufe II" i. d. g. F. und auf der Grundlage der in den Bildungsstandards festgelegten Kompetenzen, über die die Schülerinnen und Schüler am Ende der gymnasialen Oberstufe verfügen sollen, werden die nachfolgenden Regelungen für die Abiturprüfung festgelegt. Ausgehend von den verbindlichen Bereichen, in denen in den jeweiligen Fächern in der Abiturprüfung Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten nachzuweisen sind, wird im Folgenden insbesondere benannt, welche Arten von Aufgaben in der Abiturprüfung gestellt werden können, in welcher Weise die erwarteten Schülerleistungen zu beschreiben und nach welchen Kriterien die erbrachten Abiturprüfungsleistungen zu bewerten sind.

3.1.1 Anforderungsbereiche und allgemeine Vorgaben zur schriftlichen und zur mündlichen Prüfungsaufgabe

Die Prüfungsaufgabe ist so zu stellen, dass sie Leistungen in den folgenden drei Anforderungsbereichen erfordert:

- **Anforderungsbereich I** umfasst das Wiedergeben von Sachverhalten und Kenntnissen im gelernten Zusammenhang, die Verständnissicherung sowie das Anwenden und Beschreiben geübter Arbeitstechniken und Verfahren.
- **Anforderungsbereich II** umfasst das selbstständige Auswählen, Anordnen, Verarbeiten, Erklären und Darstellen bekannter Sachverhalte unter vorgegebenen Gesichtspunkten in einem durch Übung bekannten Zusammenhang und das selbstständige Übertragen und Anwenden des Gelernten auf vergleichbare neue Zusammenhänge und Sachverhalte.
- **Anforderungsbereich III** umfasst das Verarbeiten komplexer Sachverhalte mit dem Ziel, zu selbstständigen Lösungen, Gestaltungen oder Deutungen, Folgerungen, Verallgemeinerungen, Begründungen und Wertungen zu gelangen. Dabei wählen die Schülerinnen und Schüler selbstständig geeignete Arbeitstechniken und Verfahren zur Bewältigung der Aufgabe, wenden sie auf eine neue Problemstellung an und reflektieren das eigene Vorgehen.

Die Stufung der Anforderungsbereiche dient der Orientierung auf eine in den Ansprüchen ausgewogene Aufgabenstellung und ermöglicht so, unterschiedliche Leistungsanforderungen in den einzelnen Teilen einer Aufgabe nach dem Grad des selbstständigen Umgangs mit Gelerntem einzuordnen.

Der Schwerpunkt der zu erbringenden Prüfungsleistungen liegt im Anforderungsbereich II. Darüber hinaus sind die Anforderungsbereiche I und III zu berücksichtigen. Im Prüfungsfach auf grundlegendem Anforderungsniveau sind die Anforderungsbereiche I und

II, im Prüfungsfach auf erhöhtem Anforderungsniveau die Anforderungsbereiche II und III stärker zu akzentuieren.

Die Prüfungsaufgabe muss aus dem Unterricht in der Qualifikationsphase erwachsen sein und darf sich nicht nur auf ein Schulhalbjahr beschränken. Die Gesamtheit der Bildungsstandards muss durch die Prüfungsaufgabe nicht erfasst sein. Die Prüfungsaufgabe muss eine Beurteilung ermöglichen, die das gesamte Notenspektrum umfasst. Eine Prüfungsaufgabe, die diesen Anforderungen nicht genügt, ist nicht zulässig.

Unterschiedliche Anforderungen in der Prüfungsaufgabe auf grundlegendem und auf erhöhtem Anforderungsniveau ergeben sich vor allem im Hinblick auf die Komplexität des Gegenstands, im Grad der Differenzierung und der Abstraktion der Inhalte, im Anspruch an die Beherrschung der Fachsprache und der Methoden sowie an die Selbstständigkeit bei der Lösung der Aufgaben.

Die in den Arbeitsaufträgen verwendeten Operatoren müssen in einen Bezug zu den Anforderungsbereichen gestellt werden, wobei die Zuordnung vom Kontext der Aufgabenstellung und ihrer unterrichtlichen Einordnung abhängig ist und damit eine eindeutige Zuordnung zu nur einem Anforderungsbereich nicht immer möglich ist.

Zugelassene Hilfsmittel sind anzugeben.

Eine Bewertung mit „gut“ (11 Punkte) setzt voraus, dass annähernd vier Fünftel der Gesamtleistung erbracht worden sind, wobei Leistungen in allen drei Anforderungsbereichen erbracht worden sein müssen. Eine Bewertung mit „ausreichend“ (05 Punkte) setzt voraus, dass über den Anforderungsbereich I hinaus auch Leistungen in einem weiteren Anforderungsbereich und annähernd die Hälfte der erwarteten Gesamtleistung erbracht worden sind.

3.1.2 Schriftliche Prüfungsaufgabe

Jeder Prüfungsaufgabe wird eine Beschreibung der erwarteten Leistungen beigegeben einschließlich der Angabe von Bewertungskriterien, die auf die Anforderungsbereiche bezogen sind (Erwartungshorizont). Der Erwartungshorizont enthält auch Hinweise auf die curricularen und – bei dezentraler Aufgabenstellung – die unterrichtlichen Voraussetzungen und weist aus, mit welchem Gewicht die Teilaufgaben in die Bewertung der Gesamtleistung eingehen.

Die Bewertung erfolgt über die Randkorrekturen und ein abschließendes Gutachten oder einen vergleichbaren Bewertungsbogen, der auch eine Würdigung der Gesamtleistung beinhaltet.

Zur Begründung der Leistungsbewertung ist es erforderlich, dass die Aufgabenstellung, die Anspruchshöhe der Anforderungen und die Selbstständigkeit der Prüfungsleistung, die Darstellung der unterrichtlichen Voraussetzungen, die Beschreibung der Anforderungen im Erwartungshorizont, die Randkorrektur und das Gutachten bzw. der Bewertungsbogen deutlich aufeinander bezogen sind.

Schwerwiegende und gehäufte Verstöße gegen die sprachliche Richtigkeit oder gegen die äußere Form führen zu einem Abzug von bis zu zwei Punkten in einfacher Wertung. Ein Abzug für Verstöße gegen die sprachliche Richtigkeit soll nicht erfolgen, wenn diese bereits Gegenstand der fachspezifischen Bewertungsvorgaben sind.

3.1.3 Mündliche Prüfungsaufgabe

Bei der mündlichen Prüfung sollen die Prüflinge im ersten Teil, der mindestens ein Drittel der gesamten Prüfungszeit umfasst, Gelegenheit erhalten, selbstständig eine Aufgabe zu lösen und nach entsprechender Vorbereitungszeit in einem zusammenhängenden Vortrag zu präsentieren. In einem zweiten Teil sollen größere fachliche und ggf. fachübergreifende Zusammenhänge in einem Prüfungsgespräch erörtert werden. Die mündliche Prüfung wird in der Regel als Einzelprüfung durchgeführt. Wird die Form der Partner- oder Gruppenprüfung gewählt, ist sicherzustellen, dass die individuelle Prüfungsleistung eindeutig bewertet werden kann. Ein Erwartungshorizont ist schriftlich vorzulegen oder mündlich vorzutragen. Der Gang der mündlichen Prüfung wird protokolliert.

3.2 Fachspezifische Hinweise

3.2.1 Schriftliche Prüfungsaufgabe im Fach Mathematik

Die Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife weisen für das Fach Mathematik Leitideen und allgemeine mathematische Kompetenzen (vgl. Abschnitt 1.2 der Fachpräambel) aus. Kennzeichnend für die Anforderungen in der schriftlichen Abiturprüfung ist, dass sie in komplexer Weise Bezug nehmen auf die unterschiedlichen Kompetenzbereiche der Bildungsstandards im Fach Mathematik.

3.2.1.1 Struktur der Prüfungsaufgabe

Die Prüfungsaufgabe für die schriftliche Prüfung hat mehrere unabhängig voneinander bearbeitbare Aufgaben. Jede Aufgabe kann in Teilaufgaben gegliedert sein, die jedoch nicht beziehungslos nebeneinander stehen sollen. Eine Ausnahme hiervon bilden „hilfsmittelfreie“ Aufgaben. Deren Umfang darf jedoch ein Drittel der gesamten Prüfungsaufgabe nicht überschreiten. Die Teilaufgaben einer Aufgabe sollen so unabhängig voneinander sein, dass eine Fehlleistung – insbesondere am Anfang – nicht die weitere Bearbeitung der Aufgabe stark erschwert. Falls erforderlich, können Zwischenergebnisse in der Aufgabenstellung enthalten sein. Die Aufgliederung in Teilaufgaben soll nicht so detailliert sein, dass dadurch ein Lösungsweg zwingend vorgezeichnet wird.
Zugelassene Hilfsmittel sind anzugeben.

3.2.1.2 Erstellung der Prüfungsaufgabe

Die Prüfungsaufgabe bezieht sich auf mindestens zwei der in den Bildungsstandards genannten mathematischen Sachgebiete Analysis, Lineare Algebra/Analytische Geometrie und Stochastik. Mindestens ein Drittel der Anforderungen muss sich auf Analysis beziehen. Keines der beiden anderen Sachgebiete wird über mehrere Jahre von den Prüfungsaufgaben ausgeschlossen. Die Prüfungsaufgabe ist so zu gestalten, dass mehrere Leitideen und allgemeine mathematische Kompetenzen berücksichtigt werden, sodass mathematisches Arbeiten in der gymnasialen Oberstufe hinreichend erfasst wird. Auf ein ausgewogenes Verhältnis zwischen formalen und anwendungsbezogenen (innermathematischen oder realitätsnahen) Prüfungsanforderungen ist zu achten.

3.2.1.3 Bewertung der Prüfungsleistung

Aus Korrektur und Beurteilung der schriftlichen Arbeit soll hervorgehen, wie die Ausführungen des Prüflings in Bezug auf die beschriebene erwartete Leistung einzuordnen sind. Liefern Prüflinge Lösungen, die in der Beschreibung der erwarteten Prüfungsleistungen nicht erfasst werden, so sind diese angemessen zu berücksichtigen.

Für die Beurteilung der Prüfungsleistungen sind sowohl die rein formale Lösung als auch das zum Ausdruck gebrachte mathematische Verständnis maßgebend. Daher sind erläuternde, kommentierende und begründende Texte unverzichtbare Bestandteile der Prüfungsleistung. Dies gilt auch für die Dokumentation des Einsatzes elektronischer Werkzeuge. Mangelhafte Gliederung, Fehler in der Fachsprache, Ungenauigkeiten in Zeichnungen oder unzureichende oder falsche Bezüge zwischen Zeichnungen und Text sind als fachliche Fehler zu werten. Die Beurteilung schließt mit einer Bewertung der von den Prüflingen erbrachten Leistung ab.

3.2.2 Mündliche Prüfungsaufgabe im Fach Mathematik

Die mündliche Prüfung bezieht sich auf mindestens zwei der in den Bildungsstandards genannten mathematischen Sachgebiete. Die Prüfungsaufgabe ist so zu gestalten, dass mehrere Leitideen und allgemeine mathematische Kompetenzen berücksichtigt werden, sodass mathematisches Arbeiten in der gymnasialen Oberstufe hinreichend erfasst wird. Die Aufgabenstellung muss einen einfachen Einstieg erlauben und muss so angelegt sein, dass unter Beachtung der Anforderungsbereiche, die auf der Grundlage eines Erwartungshorizontes zugeordnet werden, grundsätzlich jede Note erreichbar ist.

Die Aufgabenstellung für die mündliche Prüfung unterscheidet sich von der für die schriftliche Prüfung. Umfangreiche Rechnungen und zeitaufwändige Konstruktionen sind zu vermeiden. Vielmehr sollen die Prüflinge mathematische Sachverhalte im freien Vortrag darstellen und im Gespräch zu mathematischen Fragen Stellung nehmen. Besonders geeignet sind Aufgabenstellungen, die sich auf die Erläuterung eines Lösungswegs beziehen, ohne dass die zugehörigen Rechnungen im Einzelnen auszuführen sind und solche, bei denen Ergebnisse, Skizzen, Lösungswege usw. vorgegeben werden, an denen wesentliche Gedankengänge zu erläutern sind.

Aufgaben, die sich in Teilaufgaben zunehmend öffnen, bieten dem Prüfling eine besondere Chance, den Umfang seiner Fähigkeiten und die Tiefe seines mathematischen Verständnisses darzustellen. Für den Prüfungsausschuss ermöglichen sie die differenzierte Beurteilung der Leistungsfähigkeit des Prüflings.

Bei der Bewertung sollen vor allem folgende Kriterien berücksichtigt werden:

- Umfang und Qualität der nachgewiesenen mathematischen Kompetenzen,
- sachgerechte Gliederung und folgerichtiger Aufbau der Darstellung, Beherrschung der Fachsprache, Verständlichkeit der Darlegungen, adäquater Einsatz der Präsentationsmittel und die Fähigkeit, das Wesentliche herauszustellen,
- Verständnis für mathematische Probleme sowie die Fähigkeit, Zusammenhänge zu erkennen und darzustellen, mathematische Sachverhalte zu beurteilen, auf Fragen und Einwände einzugehen und gegebene Hilfen aufzugreifen,
- Kreativität, Reflexionsfähigkeit und Selbstständigkeit im Prüfungsverlauf.

4 Illustrierende Prüfungsaufgaben zum Erwerb der Allgemeinen Hochschulreife im Fach Mathematik

Die folgenden Aufgabenbeispiele sollen illustrieren, wie Prüfungsaufgaben zum Erwerb der Allgemeinen Hochschulreife im Fach Mathematik konzipiert sein könnten, die auf den in Kapitel 2 dargestellten Bildungsstandards basieren und den in Kapitel 3 beschriebenen Hinweisen zur Prüfungsdurchführung zum Erwerb der Allgemeinen Hochschulreife entsprechen. Mit den Aufgaben soll geprüft werden, inwieweit die Schülerinnen und Schüler die Anforderungen von ausgewählten Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife erfüllen können. Dabei handelt es sich um Beispiele möglicher Aufgabentypen, die weder als Prototypen für die Entwicklung von Abiturprüfungsaufgaben in den Ländern dienen sollen noch den Anspruch erheben, in allen 16 Ländern in dieser Form eingesetzt werden zu können. Sie sind lediglich als Anregungen zu sehen, nicht als verbindliche Muster. Prüfungsaufgaben zum Erwerb der Allgemeinen Hochschulreife, die prototypischen Charakter haben sollen, werden mit dem Aufgabenpool vorgelegt, der laut Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 8./9.3.2012 ab 2013 entwickelt und kontinuierlich aufwachsen soll, um ab 2016/2017 den Ländern als Orientierung und Angebot für den möglichen Einsatz im Abitur zur Verfügung zu stehen.

In den vorliegenden Versionen der Aufgaben können jeweils zwei Aufgaben zu einer Prüfungsaufgabe zusammengesetzt werden. Damit werden dann auch mindestens zwei Sachgebiete geprüft. Falls die Prüfungsaufgabe drei Aufgaben enthalten soll, müssen die Aufgaben jeweils entsprechend verkürzt werden.

Die in den Lösungsskizzen angegebenen Punktzahlen für die Bewertung der einzelnen Teilaufgaben sind als Anregungen zu verstehen.

Einfache wissenschaftliche Taschenrechner (nicht programmierbar, ohne numerische Funktionen wie z. B. Gleichungslösen, Differenzieren, Integrieren, Matrizenmultiplikation, aber mit Binomial- und Normalverteilungen), Tabellenwerk und Formelsammlung (ohne ausführliche Musterbeispiele) sind zur Bearbeitung der folgenden Aufgaben generell zugelassen. Zusätzliche Hilfsmittel wie wissenschaftliche Taschenrechner mit erweitertem Funktionsumfang, GTR (grafikfähige Taschenrechner mit numerischen Funktionen, aber ohne Computeralgebrasystem), CAS (Computeralgebrasysteme) oder weitere Programme werden ggf. genannt. Die Zulassung grafikfähiger Taschenrechner und CAS als Hilfsmittel für die schriftliche Abiturprüfung ist in den Ländern unterschiedlich geregelt.

4.1 Medikamente (erhöhtes Anforderungsniveau)

Sachgebiet: Analysis

Leitidee: Funktionaler Zusammenhang [L4]

wesentliche Kompetenzen: K3, K5, K6

Hilfsmittel: wissenschaftlicher Taschenrechner

Bearbeitungszeit: 75 min

Anmerkungen: Diese Aufgabe aus der Analysis ist eine Modellierungsaufgabe mit realistischen Zahlenwerten. Zur erfolgreichen Bearbeitung müssen hier einzelne Aspekte des Medikamentenabbaus mathematisch nachvollzogen werden. Dabei kommen wissenschaftliche Termini, wie beispielsweise Halbwertszeit, zur Sprache, die korrekt in mathematische Begriffe umgesetzt werden müssen.

Aufgabe

Für eine Studie wird nach der Verabreichung eines Medikaments jeweils die Konzentration k des im Blut vorhandenen Wirkstoffes (in Milligramm pro Liter) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden) gemessen.

Das Medikament wird mithilfe einer Spritze direkt in den Blutkreislauf gebracht. Kurz nach Verabreichung der Spritze erfolgt die erste Messung der Wirkstoffkonzentration im Blut, was den Beginn der Messreihe festlegt ($t=0$). Es stellt sich heraus, dass der zeitliche Verlauf der Wirkstoffkonzentration k im Blutkreislauf in den ersten 5 Stunden nach der Verabreichung des Medikaments durch folgende Funktion f modelliert werden kann: $f(t)=a\cdot e^{-bt}$ mit $a,b\in\mathbb{R}^+$, $t\in[0;5]$.

Für den Probanden A ergeben sich folgende Messwerte:

Zeit t in Stunden	0	1,5	3,0	5,0
Konzentration k in $\frac{mg}{l}$	10,20	5,68	3,17	1,45

Tabelle 4.1-1

Die folgenden Aufgabenteile a) bis f) beziehen sich ausschließlich auf die Messwerte für den Probanden A.

a)
Zeigen Sie mithilfe der Messwerte zu den Zeiten $t=0$ und $t=3,0$, dass sich für die Funktion f die Werte $a=10,20$ und $b\approx 0,39$ ergeben.

b)
Unter der *Halbwertszeit* des Medikamentenabbaus versteht man die Zeitspanne, in der sich die Wirkstoffkonzentration k im Blut halbiert. Berechnen Sie diese Halbwertszeit.

c)
Zu welchem Zeitpunkt nimmt die Wirkstoffkonzentration k am stärksten ab? Begründen Sie Ihre Antwort mithilfe der Eigenschaften der Funktion f.

d)
Ermitteln Sie, um wie viel Prozent die Wirkstoffkonzentration k in einer Stunde und in einer halben Stunde abnimmt.

e)
Weisen Sie nach, dass die Funktion f eine Gleichung der Form $f'(t) = c \cdot f(t)$ erfüllt. Interpretieren Sie die Gleichung im Sachzusammenhang. Gehen Sie auch auf die Bedeutung von c ein.

f)
Der Einfachheit halber soll angenommen werden, dass ab dem Zeitpunkt $t = 5{,}0$ die Abnahme der Wirkstoffkonzentration k durch eine lineare Funktion g beschrieben werden kann. Der Graph von g liegt auf der Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt $\left(5 \middle| f(5)\right)$. Stellen Sie die Gleichung dieser Tangente auf.

Geben Sie einen im Sachzusammenhang sinnvollen Definitionsbereich von g an. Begründen Sie Ihre Wahl.

Der folgende Aufgabenteil g) bezieht sich auf mehrere Probanden.

g)
Im Rahmen der Studie wurden bei den Probanden auch unterschiedliche Anfangskonzentrationen und unterschiedliche Halbwertszeiten gemessen. Geben Sie den Funktionsterm des zeitlichen Verlaufs der Wirkstoffkonzentration in den ersten Stunden des exponentiellen Abbaus an, wenn bei einem Probanden B zum Zeitpunkt $t = 0$ die Wirkstoffkonzentration um p Prozent größer ist als bei Proband A und die Halbwertszeit um q Prozent wächst.

h)
Bei dieser Studie ist auch die mittlere Wirkstoffkonzentration $\overline{k}$ innerhalb der ersten fünf Stunden von Interesse.

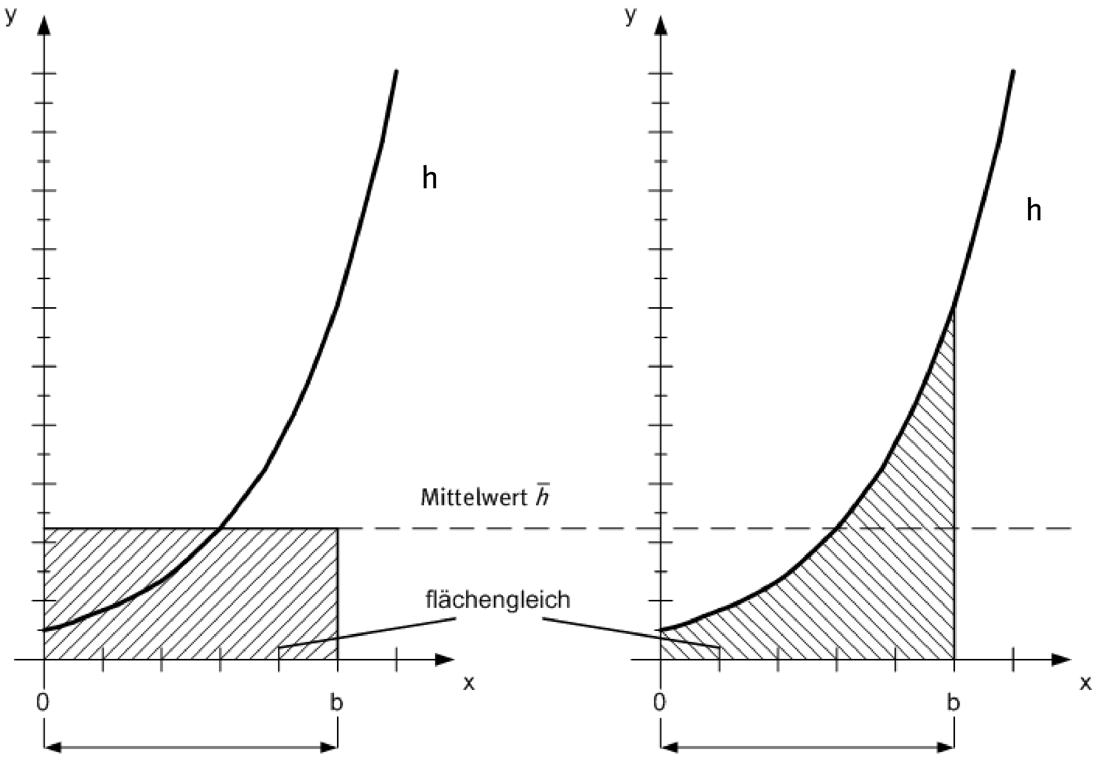


Abbildung 4.1-1

Der Mittelwert $\bar{h}$ einer positiven Funktion h über einem Intervall $[0;b]$ kann durch die Höhe eines Rechtecks veranschaulicht werden, das wie in der Abbildung 4.1-1 skizziert liegt. Dieses Rechteck hat denselben Inhalt wie die Fläche, die zwischen dem Graphen von h und der x-Achse eingeschlossen ist.

Berechnen Sie die mittlere Wirkstoffkonzentration $\bar{k}$ als Mittelwert der Funktion f auf dem Intervall $[0;5]$.

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	$f(0) = a \cdot 1 = 10{,}20 \rightarrow a = 10{,}20$ $f(t) = a \cdot e^{-bt}$ $\ln \frac{f(t)}{a} = -bt \rightarrow b = -\frac{1}{t} \cdot \ln \frac{f(t)}{a} = 0{,}39$	8	2	
b)	$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{0{,}39} \approx 1{,}78$ oder: 1 Stunde und 47 Minuten	3	7	2
c)	Exponentialfunktionen mit negativem Exponenten sind positive und monoton abnehmende Funktionen mit linksgekrümmtem Graphen. Da der Definitionsbereich hier bei $t = 0$ beginnt, ist die kleinste Steigung des Funktionsgraphen bei $t = 0$.		8	5
d)	1 Stunde: $\frac{f(t) - f(t+1)}{f(t)} = 1 - e^{-0{,}39} \approx 32{,}3\ \%$ $\frac{1}{2}$ Stunde: $\frac{f(t) - f(t+\frac{1}{2})}{f(t)} = 1 - e^{\frac{-0{,}39}{2}} \approx 17{,}7\ \%$	6	5	2
e)	$f(t) = 10{,}2e^{-0{,}39t}$ $f'(t) = -10{,}2 \cdot 0{,}39 \cdot e^{-0{,}39t} \rightarrow c = -0{,}39$ Die momentane Änderungsrate der Wirkstoffkonzentration ist proportional zur aktuellen Wirkstoffkonzentration, c ist der Proportionalitätsfaktor. Die momentane Abnahme beträgt stets 39 % der aktuellen Wirkstoffkonzentration.	3	6	5
f)	Tangentengleichung: $g(t) = -0{,}566t + 4{,}281$ Nullstelle von g: $t \approx 7{,}56$ Definitionsbereich: $[5; 7{,}56]$ Da die lineare Näherung nach Vorgabe bei $t = 5{,}0$ beginnt und zum Zeitpunkt $t = 7{,}56$ die Wirkstoffkonzentration auf 0 abgesunken ist.	5	7	4
g)	$\frac{100+p}{100} \cdot 10{,}2 \cdot e^{\frac{-0{,}39t}{\frac{100+q}{100}}}$	3	6	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
h)	$\int_0^5 10,2 \cdot e^{-0,39t} dt = 5 \cdot h$ → $h \approx 4,49$ also $\overline{k}$ ungefähr 4,49 $\frac{mg}{l}$		8	5
	Insgesamt 100 BWE	28	49	23

4.2 Würfel (erhöhtes Anforderungsniveau)

Sachgebiet: Geometrie/Lineare Algebra

Leitidee: Raum und Form [L3]

wesentliche Kompetenzen: K2, K4

Hilfsmittel: einfacher wissenschaftlicher Taschenrechner

Bearbeitungszeit: 90 min

Anmerkungen: Diese innermathematische Aufgabe zur Leitidee Raum und Form (L3) ist eine Weiterentwicklung einer Aufgabe aus den „Einheitlichen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung Mathematik“ (EPA) von 2002. Anliegen ist es, nicht nur formal-rechnerische Fertigkeiten zu prüfen, sondern auch das räumliche Vorstellungsvermögen zu testen. Viele der Teilaufgaben können sowohl auf algebraisch-analytischem Weg als auch durch geometrisch-anschauliche Überlegungen gelöst werden. Die möglichen Lösungswege der Teilaufgabe werden z. T. offen gelassen, wenngleich der algebraisch-analytische Weg i. A. der einfachere ist.

Diese Aufgabe stellt die Kompetenz K2 „Probleme mathematisch lösen“ in den Vordergrund. Das Verständnis der komplexen Situation mit Schnittfiguren etc. erfordert die Fähigkeit, eine Situation zu strukturieren und geeignete Strategien zur Lösung entwerfen zu können.

Diese Aufgabe ist der Alternative A2 zuzuordnen und damit nicht für alle Länder relevant.

Aufgabe

In einem dreidimensionalen Koordinatensystem ist der Würfel $ABCDEFGH$ durch die Eckpunkte $A(0|0|0)$, $B(4|0|0)$, $D(0|4|0)$ und $E(0|0|4)$ gegeben.

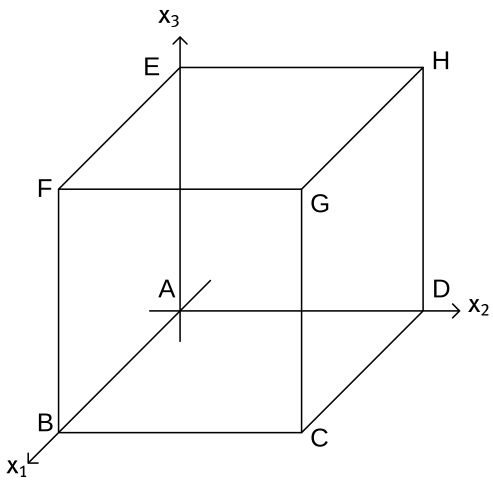


Abbildung 4.2-1

a)

Geben Sie die Koordinaten der restlichen Eckpunkte C, F, G und H an.

b)

Stellen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene L auf, die die Punkte B, D, E enthält.

Zeichnen Sie in Abbildung 4.2-1 die Schnittfigur ein, die entsteht, wenn man die Ebene L und den Würfel schneidet.
[Zur Kontrolle: $L: x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0$]

c)

Begründen Sie, dass die Raumdiagonale AG des Würfels senkrecht auf der Ebene L steht.

Betrachtet werden nun die Ebenen $L_k: x_1 + x_2 + x_3 - k = 0$ mit $k \in \mathbb{R}$.

d)

Begründen Sie, dass die Ebenen L_k alle parallel zu L verlaufen.

e)

Bestimmen Sie die beiden Werte des Parameters k, für welche die Ebenen L_k jeweils **nur einen** Punkt mit dem Würfel gemeinsam haben.

Geben Sie an, für welche Werte des Parameters k die Ebenen L_k und der Würfel **keinen** gemeinsamen Punkt haben.

f)

Die Schnittfigur einer dieser Ebenen mit dem Würfel ist das Dreieck BDE. Gibt es unter den übrigen Schnittfiguren der Ebenen L_k mit dem Würfel ein zu diesem Dreieck kongruentes Dreieck? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

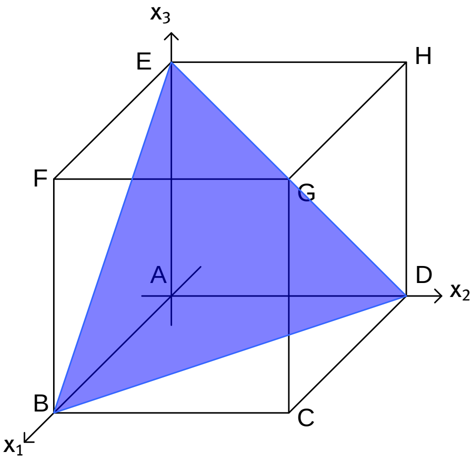
g)

Für bestimmte Werte des Parameters k sind die Schnittfiguren zwischen den Ebenen L_k und dem Würfel Sechsecke. Geben Sie hierfür die Werte von k an.

h)

Betrachtet wird nun diejenige Ebene L_k, die durch den Mittelpunkt $M\left(2|2|2\right)$ des Würfels verläuft. Diese Ebene schneidet zwei Würfelkanten in den Punkten $P_1\left(2|0|4\right)$ und $P_2\left(0|2|4\right)$. Tragen Sie diese beiden Schnittpunkte in die Abbildung 4.2-1 ein und ergänzen Sie die restlichen Schnittpunkte der Ebene mit den Würfelkanten.

Berechnen Sie den Flächeninhalt der Schnittfigur der betrachteten Ebene mit dem Würfel.

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	$C(4\|4\|0)$; $F(4\|0\|4)$; $G(4\|4\|4)$; $H(0\|4\|4)$	9		
b)	 **Abbildung 4.2-2** $x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0$	9	3	
c)	Der Vektor $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{0G} - \overrightarrow{0A}$ hat die Darstellung $\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{n_L} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor der Ebene L. $\overrightarrow{n_L}$ und $\overrightarrow{AG}$ sind kollinear, woraus die Behauptung folgt.	4	9	
d)	Die Normalenvektoren von L und L_k sind kollinear, da die aus der jeweiligen Koordinatengleichen der Ebenen abzulesenden Normalenvektoren identisch sind $\left(\overrightarrow{n_L} = \overrightarrow{n_{L_k}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.	6		
e)	Um die beiden Ebenen zu finden, muss der Parameter k so gewählt werden, dass nur der Punkt A in der einen Ebene liegt ($k = 0$) und nur der Punkt G in der anderen ($k = 12$). Für $k > 12$ und für $k < 0$ haben Würfel und Ebenen L_k keine gemeinsamen Punkte.	3	10	3

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>f)</td><td>Für $k = 8$ ergibt sich als Schnittfigur das Dreieck FHC, dessen Seiten wie beim Dreieck BDE Flächendiagonalen des Würfels sind. Nach dem Kongruenzsatz SSS sind die Dreiecke BDE und FHC kongruent.</td><td></td><td>10</td><td>8</td></tr>
<tr><td>g)</td><td>$4 < k < 8$</td><td></td><td>4</td><td>4</td></tr>
<tr><td>h)</td><td>

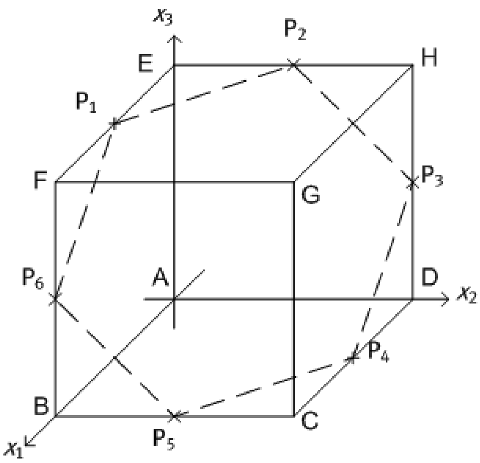


Abbildung 4.2-3

Flächeninhalt *A* des regelmäßigen Sechsecks: $A = \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3}$

$12 \cdot \sqrt{3} \approx 20{,}8$

</td><td></td><td>12</td><td>6</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>31</td><td>48</td><td>21</td></tr>
</table>

4.3 Seehunde (grundlegendes Anforderungsniveau)

Sachgebiet: Lineare Algebra

Leitidee: Algorithmus und Zahl [L1]

wesentliche Kompetenzen: K3, K5, K6

Hilfsmittel: wissenschaftlicher Taschenrechner mit erweitertem Funktionsumfang (hier: Multiplikation von 3x3-Matrizen, Lösen linearer Gleichungssysteme von drei Gleichungen mit drei Variablen)

Bearbeitungszeit: 75 min

Anmerkungen: Diese Aufgabe behandelt eine einfache Anwendungssituation von Übergangsgraphen, Übergangsmatrizen und Zustandsvektoren. Es wird ein realitätsnaher Kontext mit mathematischen Hilfsmitteln modelliert. Für eine erfolgreiche Bearbeitung dieser Aufgabe müssen daraus Schlüsse gezogen und muss somit die Realität durch die Mathematik beschrieben wie auch umgekehrt die Mathematik auf die Realität angewandt werden. In den letzten beiden Teilaufgaben soll das Modell an veränderte Ausgangssituationen angepasst werden. In der gesamten Aufgabe zeigt die Matrizenschreibweise ihre Zweckmäßigkeit.

Über die linearen Gleichungssysteme bietet diese Aufgabe einen Anschluss an die Sekundarstufe I.

Durch den Umgang mit Matrizen gehört diese Aufgabe zur Alternative A1. Damit ist sie nicht für alle Länder relevant.

Aufgabe

In einer Seehundpopulation von 20000 Tieren breitet sich eine ansteckende Krankheit aus, die zum Tod vieler Tiere führt.

Eine Meeresbiologin, die kurz nach Ausbruch der Krankheit anreist, stellt bei ihrer Ankunft fest, dass bereits 60 Tiere an dieser Krankheit gestorben sind.

Die Meeresbiologin vermutet einen bestimmten Krankheitserreger. Für diesen existiert aufgrund früherer Erfahrungen bereits ein Modell für den weiteren Verlauf der Krankheit. Das Modell beschreibt die Übergänge der möglichen „Zustände“ von Tieren (Tier gesund (G), Tier krank (K) oder Tier tot (T)) von einem Tag auf den anderen jeweils als Anteile. Die konkreten Werte für diese Anteile sind in folgender Tabelle dargestellt:

	nach \ von	Tier gesund (G)	Tier krank (K)	Tier tot (T)
	Tier gesund (G)	0,996	0,2	0
x	Tier krank (K)	0,004	0,5	0
	Tier tot (T)	0	0,3	1

Tabelle 4.3-1

a)
Stellen Sie die in der Tabelle angegebenen Informationen in einem Übergangsgraphen dar und erläutern Sie die Bedeutung der Zahlen in der mit x gekennzeichneten Zeile der Tabelle 4.3-1 im Sachzusammenhang.

b)
Erläutern Sie unter Bezug auf mindestens zwei der Zustände, woran man bereits an der Tabelle oder am Übergangsgraphen erkennen kann, dass die Seehundpopulation im Rahmen dieses Modells aussterben wird.

c)
Im Rahmen dieses Modells kann die Meeresbiologin aus der Anzahl der 60 toten Tiere zu Beginn ihrer Beobachtung auf den Zeitpunkt des Ausbruchs der Krankheit schließen.

Weisen Sie durch eine Rechnung nach, dass sie demnach ihre erste Beobachtung am 3. Tag nach Ausbruch der Krankheit durchgeführt hat.

d)
Bis zu einem bestimmten Tag sind insgesamt 380 Tiere an dieser Krankheit gestorben. Am darauffolgenden Tag findet die Biologin noch 47 weitere tote Tiere.

Zeigen Sie, dass diese Beobachtung mit dem vorhandenen Modell vereinbar ist.

Geben Sie an, wie die Anzahl gesunder Tiere zwischen diesen beiden Tagen zurückgegangen ist.

e)
Ein Kollege der Meeresbiologin vermutet einen anderen Krankheitserreger, der wesentlich ansteckender ist, ansonsten aber einen identischen Krankheitsverlauf bei den erkrankten Tieren aufweist. Das gegebene Modell soll zur Simulation des Krankheitsverlaufs entsprechend verändert werden.

Geben Sie ein Beispiel für eine Übergangsmatrix an, die dieser veränderten Bedingung entspricht, und begründen Sie Ihr Vorgehen.

f)
Weitere Untersuchungen haben gezeigt, dass die Vermutung der Meeresbiologin bezüglich des Krankheitserregers doch stimmte. Allerdings sind, anders als im gegebenen Modell, wieder genesene Tiere dauerhaft immun gegen diesen Krankheitserreger. Die sonstigen Daten des Krankheitsverlaufs bleiben unverändert.

Erweitern Sie das Modell um einen Zustand „Tier immun“ (I). Der Zustand „Tier gesund“ (G) soll dann die gesunden, aber noch nicht immunen Tiere beschreiben.

Gehen Sie davon aus, dass beim Ausbruch der Krankheit noch kein Tier immun ist.

Geben Sie den Übergangsgraphen und die Übergangsmatrix für das veränderte Modell an.

Erläutern Sie mithilfe dieses Übergangsgraphen, warum ca. 40 % der Population die Epidemie überleben wird.

Optionale Zusatzfrage für Klassen mit graphikfähigem Taschenrechner. Wegen der 4x4-Matrix reicht ein WTR nicht mehr aus. Die Punkteverteilung muss dann entsprechend angepasst werden:

Berechnen Sie den Zustandsvektor am dritten Tag. Geben Sie an, wie viele Tiere bis dahin immun geworden sind.

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Lösungsskizze</td><td colspan="3">Zuordnung Bewertung</td></tr>
<tr><td>I</td><td>II</td><td>III</td></tr>
<tr><td>a)</td><td>

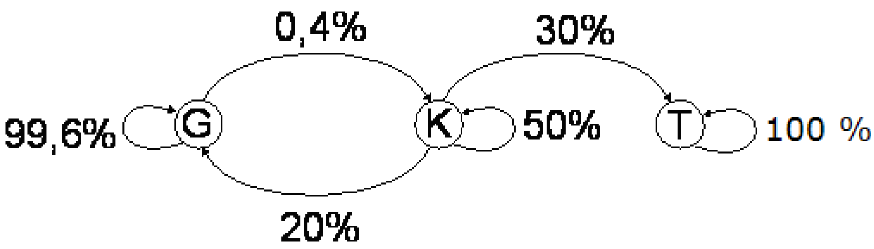


Abbildung 4.3-1

<table>
<tr><th></th><th>Tier gesund</th><th>Tier krank</th><th>Tier tot</th></tr>
<tr><td>Tier krank (K)</td><td>0,4 % der gesunden Tiere sind am nächsten Tag erkrankt</td><td>50 % der erkrankten Tiere sind am nächsten Tag auch noch erkrankt</td><td>Tote Tiere werden nicht wieder krank</td></tr>
</table>

Tabelle 4.3-2

</td><td>15</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Jeden Tag gehen vom Zustand „Tier gesund“ zum Zustand „Tier krank“ 0,4 % über. Von den kranken Tieren (K) sterben jeden Tag 30 %. Es geht also ein positiver Anteil von G nach K und von K nach T. In der Tabelle erkennt man den absorbierenden Zustand an der 1 in der Spalte „Tier tot“ und auch daran, dass in dieser Spalte sonst nur Nullen stehen. Es gibt also keinen Übergang vom Zustand „Tier tot“ (T) in einen der Zustände „Tier krank“ (K) oder „Tier gesund“ (G).</td><td>6</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>

Am Tag des Ausbruchs der Krankheit (Tag 0) gab es 20000 gesunde Tiere, keine kranken und keine toten Tiere.

Damit ergibt sich für die ersten drei Tage die folgende Entwicklung, die die Annahme bestätigt:

<table>
<tr><th></th><th>Tag 0</th><th>Tag 1</th><th>Tag 2</th><th>Tag 3</th></tr>
<tr><td>Gesunde Tiere (G)</td><td>20000</td><td>19920</td><td>19856</td><td>19801</td></tr>
<tr><td>Kranke Tiere (K)</td><td>0</td><td>80</td><td>120</td><td>139</td></tr>
<tr><td>Tote Tiere (T)</td><td>0</td><td>0</td><td>24</td><td>60</td></tr>
</table>

Tabelle 4.3-3

Die Rechnung erfolgt dabei durch wiederholte Multiplikation des Zustandsvektors mit der Matrix bzw. durch Multiplikation des Startvektors mit der passenden Matrixpotenz.

</td><td>5</td><td>15</td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
d)	Die Population des folgenden Tages kann mithilfe eines Gleichungssystems berechnet werden: g_1: gesunde Tiere am Tag x g_2: gesunde Tiere am Tag x+1 Die Summe von gesunden, kranken und toten Tieren muss pro Tag 20000 (Gesamtanzahl der Population) ergeben. Daraus ergeben sich die Terme für die kranken Tiere an den Tagen x und x+1. $\begin{pmatrix} 0{,}996 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}004 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_1 \\ 19620 - g_1 \\ 380 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_2 \\ 19573 - g_2 \\ 427 \end{pmatrix}$ Aus der letzten Zeile ergibt sich: $g_1 \approx 19463$ Daraus folgt: $g_2 \approx 19417$. An dem Tag, an dem 380 Tiere gestorben sind, sind noch 19463 Tiere gesund, am darauffolgenden Tag sind es 19417. D. h., es sind 54 gesunde Seehunde weniger. Das Gleichungssystem ist lösbar, sodass die vorgegebenen Zahlen dem Modell zumindest nicht widersprechen.		20	5
e)	Wenn die Krankheit ansteckender ist, werden in der gleichen Zeiteinheit mehr gesunde Tiere krank als vorher. Die Übergangsquote von „Tier gesund“ (G) nach „Tier krank“ (K) muss also größer werden. Damit muss die Quote von G nach G entsprechend verringert werden, sodass die Summe von beiden wieder 1 ist. Beispiel für eine passende Übergangsmatrix: $\begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 1 \end{pmatrix}$		5	5
f)	Da alle Tiere, die die Krankheit überleben, immun werden, wird im Übergangsgraphen der Pfeil von K nach G ersetzt durch einen Pfeil von K zu dem neuen Zustand „immun“ (I). I ist genau wie T ein absorbierender Zustand.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III

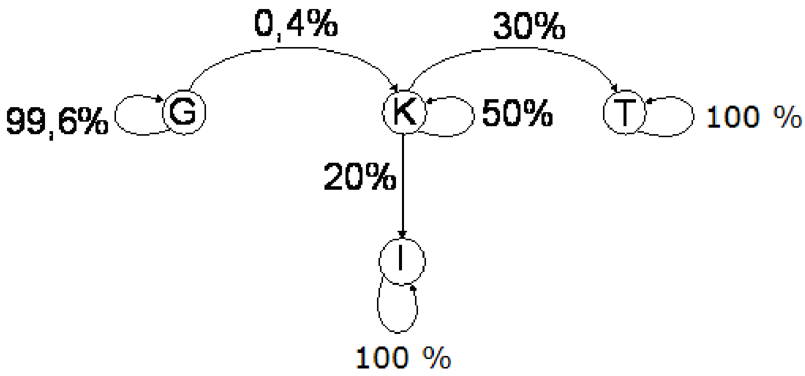


Abbildung 4.3-2

Zugehörige Übergangsmatrix, wenn die 4. Komponente des Zustandsvektors die Anzahl der immunen Tiere erfasst:

$$\begin{pmatrix} 0{,}996 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}004 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aus den Pfeilrichtungen im Übergangsgraphen erkennt man, dass langfristig gesehen alle Tiere von G in den Zustand K und von dort in die Zustände T oder I übergehen. Da sich die Übergangsquoten von K nach T und von K nach I wie 3 : 2 verhalten, werden also langfristig 40 % der Tiere im Zustand I ankommen und damit überleben.

Optional mit GTR:

Am dritten Tag gibt es 19761 gesunde, nicht immune Seehunde, 139 kranke, 60 Tote und 40 immune Seehunde.

		I	II	III
			10	10
	Insgesamt 100 BWE	26	54	20

4.4 Flugbuchung 1 (grundlegendes Anforderungsniveau)

Sachgebiet: Stochastik

Leitidee(n): Daten und Zufall [L5], Messen [L2], Funktionaler Zusammenhang [L4]

wesentliche Kompetenzen: K3, K6

Hilfsmittel: wissenschaftlicher Taschenrechner mit erweitertem Funktionsumfang (hier: Berechnung von Binomialverteilungen und kumulierten Binomialverteilungen).

Bearbeitungszeit: 75 min

Anmerkungen: Der Kontext dieser Aufgabe ist realistisch und vermittelt Einblicke in die oft kritisierte wirtschaftliche Praxis der Kostenoptimierung/Gewinnmaximierung. Dieses Szenario wird mit mathematischen Mitteln behandelt. Entsprechend der ersten Grunderfahrung nach H. Winter wird die Mathematik zum Instrument, um Erscheinungen in der Welt um uns besser zu verstehen. Ziel der Aufgabe ist dabei das mathematische Nachvollziehen betriebswirtschaftlicher Prinzipien. Die genutzten Zahlenwerte für die Flugpreise und Entschädigungen sind dementsprechend nicht vollkommen realistisch, dienen jedoch der Vereinfachung der sonst zu komplexen Situation.

Bei der Lösung der Aufgabe werden Schülerinnen und Schüler sehr stark gelenkt. Dies ist jedoch erforderlich, um eine derart komplexe Situation angemessen bewältigen zu können. Die Schwierigkeit liegt also vor allem darin, ein adäquates mathematisches Modell aufzubauen (Kompetenz „Mathematisch modellieren“) und die teilweise komplexen Aufgabenstellungen korrekt zu verstehen (Kompetenz „Mathematisch kommunizieren“).

Aufgabe

Auf einer bestimmten Strecke verwendet eine Fluggesellschaft Flugzeuge mit jeweils 100 Plätzen, die vor Flugantritt gebucht und bezahlt werden. Die Flüge auf dieser Strecke sind im Voraus stets ausgebucht. Allerdings werden anschließend im Mittel 10% der gebuchten Plätze kurzfristig storniert (d. h. von den Leuten, die gebucht haben, doch wieder abgesagt).

Von einer Person, die tatsächlich fliegt, nimmt die Fluggesellschaft 200 € ein, bei einer Stornierung wegen teilweiser Erstattung nur 100 €.

a)
Nennen Sie eine Annahme, sodass die mögliche Anzahl der Stornierungen bei einem Flug als binomialverteilt modelliert werden kann. Beschreiben Sie eine reale Situation, in der diese Annahme **nicht** zutrifft.

Im Folgenden wird nun angenommen, dass die mögliche Anzahl der Stornierungen bei einem Flug tatsächlich binomialverteilt ist.

b)
Gegeben sind die folgenden drei Ereignisse:

Beim nächsten Flug werden

- genau 90 Plätze
- höchstens 90 Plätze
- mindestens 90 Plätze

tatsächlich genutzt.

Stellen Sie jeweils einen Term auf, mit welchem die Wahrscheinlichkeit des entsprechenden Ereignisses berechnet werden kann.

c)
Berechnen Sie, welche Einnahmen die Fluggesellschaft auf lange Sicht im Mittel pro Flug erwarten kann.

Um die Flugzeuge besser auszulasten, bietet die Fluggesellschaft von vornherein statt 100 stets 108 Plätze, also 8 mehr als verfügbar, zum Verkauf an.

Da auch diese Plätze stets alle im Voraus gebucht und bezahlt werden, geht die Fluggesellschaft damit das Risiko von Überbuchungen ein. Es können also unter Umständen gebuchte Plätze nicht in Anspruch genommen werden.

d)
Berechnen Sie die zu erwartenden Einnahmen der Fluggesellschaft pro Flug im Mittel unter Berücksichtigung der Stornierungen aus dem Ticketverkauf.

e)
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Fluggast, der nicht storniert hat, seinen gebuchten Flug wegen Überbuchung nicht antreten kann.

Ob sich die Geschäftspraxis, Überbuchungen zuzulassen, für die Fluggesellschaft rein ökonomisch lohnt, soll im Weiteren untersucht werden.

Bei jedem Fluggast, der seinen gebuchten Flug antreten will, dies aber wegen Überbuchung nicht kann, zahlt die Fluggesellschaft diesem für Hotelkosten bzw. entstandenen Ärger eine Ausgleichszahlung von 1500 €, erstattet dem Fluggast aber den Kaufpreis nicht zurück.

Der Fluggast erhält jedoch einen Flug zum gebuchten Ziel mit einer anderen Maschine. Der Fluggesellschaft entstehen hierdurch Kosten von 200 Euro.

Die folgende Teilaufgabe bezieht sich auf diese Praxis der Fluggesellschaft, Überbuchungen zuzulassen und Ausgleichszahlungen zu leisten.

f)
Begründen Sie, dass pro Flug die erwartete Anzahl von Fluggästen, die wegen Überbuchungen abgewiesen werden müssen, mit dem folgenden Term berechnet werden kann:

$$\sum_{k=1}^{8} k \cdot \binom{108}{100+k} \cdot 0{,}9^{100+k} \cdot 0{,}1^{8-k}$$

Berechnen Sie diesen Term und beurteilen Sie begründet, ob sich die Praxis der Überbuchung mit 8 zusätzlichen Plätzen aus Sicht der Fluggesellschaft lohnt.

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	Modellierungsannahme: Stochastische Unabhängigkeit: Das bedeutet, dass für jede Person auf der Buchungsliste eines Fluges der Grund bzw. Anlass für eine Stornierung unabhängig von allen anderen Personen ist. Diese Annahme trifft z. B. nicht zu, wenn Gruppen/Familien den gleichen Flug buchen und unbedingt zusammen reisen müssen/wollen.	3	7	5
b)	$P_1 = \binom{100}{90} \cdot 0{,}9^{90} \cdot 0{,}1^{10}$ $P_2 = \sum_{k=0}^{90} \binom{100}{k} \cdot 0{,}9^k \cdot 0{,}1^{100-k}$ bzw. $P_2 = 1 - \sum_{k=0}^{9} \binom{100}{k} \cdot 0{,}1^k \cdot 0{,}9^{100-k}$ bzw. $P_2 = 1 - \sum_{k=91}^{100} \binom{100}{k} \cdot 0{,}9^k \cdot 0{,}1^{100-k}$ $P_3 = \sum_{k=90}^{100} \binom{100}{k} \cdot 0{,}9^k \cdot 0{,}1^{100-k}$ bzw. $P_3 = \sum_{k=0}^{10} \binom{100}{k} \cdot 0{,}1^k \cdot 0{,}9^{100-k}$	12	6	
c)	$0{,}1 \cdot 100 \cdot 100 + 0{,}9 \cdot 100 \cdot 200 = 19000$ Auf lange Sicht werden 19000 € Einnahmen im Mittel pro Flug erwartet.		7	
d)	$108 \cdot 0{,}9 \cdot 200 + 108 \cdot 0{,}1 \cdot 100 = 20520$ Die pro Flug im Mittel erwarteten Einnahmen sind in diesem Fall 20520 €.	4	5	
e)	$P_4 = \sum_{k=0}^{7} \binom{108}{k} \cdot 0{,}1^k \cdot 0{,}9^{108-k} \approx 14{,}3\%$	6	12	6

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
f)	Es können 1, 2, … 8 Überbuchungen auftreten. Dazu gehören jeweils 100+1, 100+2, … 100+8 „Nichtstornierer“. Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten ergeben sich aus der $B(108; 0,9)$-Verteilung. Also ist der gesuchte Wert: $\sum_{k=1}^{8} k \cdot \binom{108}{100+k} \cdot 0,9^{100+k} \cdot 0,1^{8-k} \approx 0,273$ Die Bilanz aus Einnahmen und Kosten wegen Überbuchungen sieht wie folgt aus: $20520 - 0,273 \cdot 1700 \approx 20056$. Dieser Wert ist zu vergleichen mit dem Wert von 19000 € aus c). $20056\,€ - 19000\,€ = 1056\,€$ Im Vergleich der zu erwarteten Einnahmen der normalen (100 Buchungen; Teilaufgabe c)) mit der Überbuchungspraxis erkennt man einen Unterschied pro Flug von etwa 1056 €. Aus Sicht der Fluggesellschaft lohnt sich die Überbuchungspraxis.	6	9	12
	Insgesamt BWE 100	31	46	23

4.5 Flugbuchung 2 (grundlegendes Anforderungsniveau)

Sachgebiet: Stochastik

Leitidee(n): Daten und Zufall [L5], Messen [L2], Funktionaler Zusammenhang [L4]

Kompetenzen: K3, K5, K6

Hilfsmittel: wissenschaftlicher Taschenrechner mit erweitertem Funktionsumfang (hier: Berechnung von Binomialverteilungen und kumulierten Binomialverteilungen).

Diese Funktionen sind auch Bestandteil grafikfähiger Taschenrechner (GTR). Da ein GTR die in e) angegebene Summe direkt berechnen kann, spart man damit etwas Zeit bei der Berechnung in Teil f).

Der Vorteil des Rechnereinsatzes liegt bei dieser Aufgabe darin, dass ohne große Mühe mit realistischen Daten gearbeitet werden kann (n und p müssen nicht auf Tabellenwerte beschränkt bleiben). Die Sachsituation kann damit etwas authentischer gefasst werden.

Bearbeitungszeit: 90 min

Anmerkungen: Gegenüber den „Einheitlichen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung“ (EPA) von 2002 hat diese Modellierungsaufgabe aus der Stochastik eine Weiterentwicklung erfahren. Der Kontext ist realitätsnah, da aufgegriffen wird, wie stochastische Überlegungen wirtschaftliche Entscheidungen unterstützen können. Gegenüber der realen Praxis ist die Sachsituation hier stark vereinfacht dargestellt. Das mathematische Modell ist im Wesentlichen vorgegeben, es muss aber auf die Sachsituation bezogen werden.

Aufgabe

Auf einer bestimmten Strecke verwendet eine Fluggesellschaft ein Flugzeug des Typs AirBix AX560 mit 160 Plätzen. Flüge auf dieser Strecke muss man früh buchen, da sie immer schnell ausgebucht sind.

Vereinfachend wird hier angenommen, dass es bei dieser Fluggesellschaft nur Einheitspreise gibt: Ein einfacher Flug auf dieser Strecke kostet 150 € und muss bereits bei der Buchung bezahlt werden.

Die Passagiere können bis kurz vor dem Abflug ihre Buchung stornieren (d. h. wieder rückgängig machen). Sie bekommen dann 100 € erstattet, 50 € behält die Fluggesellschaft als Stornierungsgebühr.

Die Fluggesellschaft hat die Erfahrung gemacht, dass im Mittel 8 % der Passagiere ihre Buchung noch kurzfristig stornieren und nicht zum Abflug erscheinen.

a)
Es ist bekannt, dass Geschäftsreisende ihre Buchung deutlich häufiger stornieren als Passagiere, die aus privaten Gründen unterwegs sind. Auf der betrachteten Strecke beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine Stornierung bei Geschäftsreisenden 25 %, während die Wahrscheinlichkeit für eine Stornierung bei Privatreisenden nur 5 % beträgt.

Ermitteln Sie, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass es sich bei einem Passagier, der storniert, um einen Geschäftsreisenden handelt.

> Aufgrund der Stornierungen würden im Mittel 8 % der Plätze im Flugzeug frei bleiben, was Einnahmeverluste für die Fluggesellschaft bedeuten würde. Deshalb überbucht die Fluggesellschaft um 10 %, d. h., sie verkauft auf der betrachteten Strecke 176 Tickets für die 160 Plätze.
>
> Die Anzahl der Passagiere, die zum Flug erscheinen, wird durch eine Zufallsvariable X beschrieben. Nehmen Sie an, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X mit einer Binomialverteilung $B(n;p;k)$ modelliert werden kann.

b)
Erläutern Sie, welche Bedeutung der Term $\binom{176}{160} \cdot 0{,}92^{160} \cdot 0{,}08^{16}$ in diesem Sachzusammenhang hat, und berechnen Sie diesen Term.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass vor dem Start **mehr** Passagiere mit einem gebuchten gültigen Ticket am Abfertigungsschalter erscheinen, als das Flugzeug Plätze hat.

c)
Beschreiben Sie inhaltlich, unter welcher Voraussetzung man das Modell „Binomialverteilung“ anwenden kann.

Nennen Sie einen Grund, der hier für die Anwendung dieses Modells spricht, aber auch ein Beispiel aus der Realität, welches gegen die Annahme spricht.

Ein Passagier, der wegen Überbuchung des Flugzeugs nicht mitgenommen wird, bekommt die Kosten für sein Ticket nicht ersetzt. Er hat aber einen Rechtsanspruch auf eine Entschädigung, einen Ersatzflug und bis dahin Verpflegung und ggf. eine Übernachtung in einem Hotel. Der Fluggesellschaft entstehen dadurch auf dieser Strecke bei einem wegen Überbuchung nicht mitgenommenen Passagier durchschnittlich Kosten von 400 €.

d)
Die Fluggesellschaft hat 176 Buchungen angenommen. Zum Abflug erscheint eine bestimmte Anzahl k von Fluggästen am Abfertigungsschalter, der Rest hat storniert.

Berechnen Sie die Einnahmen der Fluggesellschaft für die Fälle $k = 152$ Passagiere und $k = 162$ Passagiere.

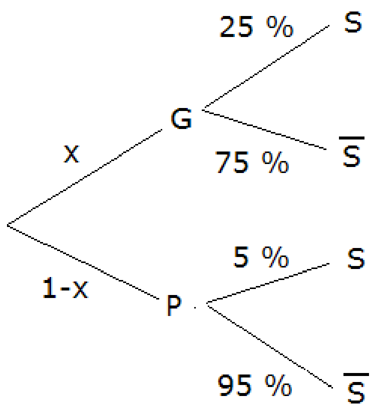
e)
Begründen Sie, dass die im Mittel pro Flug zu erwartenden Kosten, die der Fluggesellschaft durch wegen Überbuchung nicht mitgenommener Passagiere entstehen, mit folgendem Term berechnet werden können:

$$\sum_{k=161}^{176} (k-160) \cdot 400 \cdot B(176; 0{,}92; k).$$

f)
Hinweis:

In dieser Aufgabe wird vereinfachend angenommen, dass „Gewinn = Einnahmen – Kosten“ gilt.

Ermitteln Sie, ob sich die auf lange Sicht erwarteten Einnahmen pro Flug durch die Praxis der 10 %-igen Überbuchung gegenüber den erwarteten Einnahmen ohne Überbuchungspraxis erhöhen, trotz der zu erwartenden Kosten durch evtl. nicht mitgenommene Passagiere.

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	Darstellung der Situation in einem Baumdiagramm:  **Abbildung 4.5-1** Gegeben ist außerdem die totale Wahrscheinlichkeit $P(S)=0,08$. $\Rightarrow 0,25\cdot x+0,05\cdot(1-x)=0,08 \;\Leftrightarrow x=0,15$ Die Wahrscheinlichkeit, dass ein gebuchter Passagier ein Geschäftsreisender ist, beträgt 15 %.	8	8	
b)	Der Term $\binom{176}{160}\cdot 0,92^{160}\cdot 0,08^{16}$ gibt die Wahrscheinlichkeit $P(X=160)$ an, also die Wahrscheinlichkeit, dass genau 160 Passagiere zum Flug erscheinen. Die Maschine ist damit voll besetzt und niemand muss abgewiesen werden. 92 % ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Passagier zum Abflug erscheint, mit einer Wahrscheinlichkeit von 8 % storniert er. $P(X=160)\approx 0,091$ Rechnereingabe (bei den meisten Taschenrechnern gleich lautend): binompdf(176,0.92,160) Es gibt Schwierigkeiten beim Einchecken, wenn $X>160$. Dies passiert mit einer Wahrscheinlichkeit von $P(X>160)\approx 0,665$ Rechnereingabe (s. o.): binomcdf(176,0.92,161,176)	6	6	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
c)	Das Modell „Binomialverteilung“ kann verwendet werden, wenn die Trefferwahrscheinlichkeit (hier: Wahrscheinlichkeit, dass ein Passagier zum Abflug erscheint) für jeden Passagier gleich ist. Hier wird angenommen, dass sie 92 % beträgt. Das ist ein Mittelwert über alle Passagiere und man kann damit in einer groben Abschätzung Aussagen über das Verhalten aller Passagiere treffen. Die Trefferwahrscheinlichkeit ist in Wirklichkeit aber nicht für alle Passagiere gleich: Dies lässt sich für Geschäftsleute bzw. Privatreisende dem Aufgabentext von a) entnehmen, sie hängt aber auch noch von anderen Faktoren ab, wie Vielflieger, Nationalität, Ticketkategorie (die hier nicht betrachtet wird), etc. ODER Bei Personen, die nicht einzeln, sondern in Gruppen reisen, kann die Stornierungswahrscheinlichkeit vom Verhalten der anderen Gruppenmitglieder abhängen.	3	7	5
d)	1. Fall: $k=152$ 24 Personen haben storniert. Es bleiben 8 Plätze im Flugzeug unbesetzt. Einnahmen: $152 \cdot 150€ + 24 \cdot 50€ = 24000€$ 2. Fall: $k=162$ 14 Personen haben storniert. Es erscheinen 2 Passagiere mehr als die Maschine Plätze hat, für die Entschädigungszahlungen fällig werden. Einnahmen: $162 \cdot 150€ + 14 \cdot 50€ - 2 \cdot 400€ = 24200€$	5	5	
e)	$B(176;0,92;k)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 176 gebuchten Passagieren k zum Abflug erscheinen. Überbuchungen treten auf für $k=161$ bis $k=176$. In diesen Fällen ist $(k-160)$-mal die Entschädigungszahlung von 400 € zu leisten. Also berechnet die angegebene Summe den Erwartungswert der Kosten.	3	10	3

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
f)	Ohne Überbuchung kann die Fluggesellschaft folgende Einnahmen erwarten: $160 \cdot 0{,}92 \cdot 150 + 160 \cdot 0{,}08 \cdot 50 = 22720$ Auf lange Sicht werden 22720 € Einnahmen im Mittel pro Flug erwartet. Mit Überbuchung könnte die Gesellschaft mit folgenden Einnahmen rechnen: $176 \cdot 0{,}92 \cdot 150 + 176 \cdot 0{,}08 \cdot 50 = 24992$. Davon müssen aber noch die zu erwartenden Kosten durch die Überbuchungen subtrahiert werden. Dazu wird der Term aus e) berechnet: $\sum_{k=161}^{176} (k-160) \cdot 400 \cdot B(176; 0{,}92; k) \approx 1045{,}37$ Der zu erwartende Gewinn liegt in diesem Fall bei 23946,63 € . Die Überbuchungspraxis erhöht also auf lange Sicht die Einnahmen der Fluggesellschaft.	6	10	15
	Insgesamt BWE 100	31	46	23

5 Illustrierende Lernaufgaben zu ausgewählten Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife

Während Prüfungsaufgaben erfassen sollen, inwieweit Schülerinnen und Schüler bestimmte Kompetenzen bereits erworben haben, zielen Lernaufgaben auf die Entwicklung und Weiterentwicklung von Kompetenzen ab. Sie dienen nicht der Überprüfung von Kompetenzen, sondern sollen aktive Lernprozesse anstoßen und diese durch eine Folge gestufter Aufgabenstellungen steuern, die die Schülerinnen und Schüler für Probleme sensibilisieren und Kompetenzen konsolidieren bzw. vertiefen. Komplexe Lernaufgaben übertragen dabei die Steuerung der Aufgabenbearbeitung auf die Lernenden. Lernaufgaben können, müssen sich aber nicht primär auf einzelne Kompetenzen beziehen. Oft sprechen sie eine Vielzahl von Kompetenzdimensionen an.

Wie bereits bei den illustrierenden Prüfungsaufgaben handelt es sich auch bei den folgenden Lernaufgaben um Beispiele, die als Anregungen, nicht als Prototypen zu verstehen sind. Sie beschreiben keine vollständigen Unterrichtseinheiten, in denen ein Thema umfassend behandelt wird, sondern Sequenzen, die sich auf die Entwicklung einzelner Kompetenzen konzentrieren. Diese Sequenzen können durch weitere Komponenten ergänzt werden, um die Nutzung des Potenzials, das mit dem jeweiligen Thema und Material für kompetenzorientierte Lehr-Lernprozesse verbunden ist, zu erweitern.

5.1 Änderung und Bestand

Sachgebiet: Analysis

Leitideen: Algorithmus und Zahl [L1], Messen [L2], Funktionaler Zusammenhang [L4]

Kompetenzen:

	K1	K2	K3	K4	K5	K6
AB 1						X
AB 2		X		X	X	
AB 3	X					

Hilfsmittel: Tabellenkalkulation oder grafischer Taschenrechner oder Computeralgebrasystem. Da die Rekonstruktion des Bestandes numerisch geschieht, ist der Einsatz digitaler Werkzeuge zwingend erforderlich. Ideal ist der Einsatz einer Tabellenkalkulation, zusammen mit der Möglichkeit Funktionen zu plotten. Mit einem GTR lassen sich die Berechnungen auch mithilfe von Listenoperationen realisieren. Zur Kontrolle von Stammfunktionen, die zunächst händisch gebildet werden, kann später ein Computeralgebrasystem hinzugezogen werden.

Bearbeitungszeit: 120 min

Anmerkungen: Die Aufgabe beleuchtet vor allem die Leitidee L4. Sie dient als Muster für Aufgaben, die den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung illustrieren; deshalb wurde hier eine innermathematisch orientierte Grundversion (als allgemeiner Rahmen für exemplarische Konkretisierungen in Sachzusammenhängen) erstellt. Die Aufgabe erfordert substanzielle Voraussetzungen aus dem vorangegangenen Unterricht. Insbesondere sollten aus der Differentialrechnung der Begriff der lokalen Änderungsrate anhand von realen Beispielen sowie möglichst auch die Idee des „rückwärts Ableitens" bekannt sein. Der Integralbegriff (als Grenzwert von Produktsummen) ist noch nicht explizit erforderlich, er wird durch diese Aufgabe aber sehr weitgehend vorbereitet. Die Aufgabe kann im Unterricht in verschiedene bekannte Sachzusammenhänge gestellt werden. Dadurch verändern sich sinnvollerweise auch die jeweils betrachteten Funktionen. Beispiele hierfür sind:

- Ballonflug (EPA 2002)
- Physikalische Kontexte (z.B. Rekonstruktion des Weges aus den Momentangeschwindigkeiten)
- Einkommenssteuern (Rekonstruktion des Einkommens aus den Grenzsteuersätzen)
- …

Je nach Anwendungsbereich kann mit den Aufgabenteilen flexibel umgegangen werden; die Verkleinerung der Schrittweite oder schließlich der Grenzübergang von der Näherungssumme zum Integral können auch getrennt und sowohl innermathematisch als auch im Sachzusammenhang vollzogen werden. Erweiterungen sind in viele Richtungen möglich, z. B. kann neben den kontextbezogenen Varianten auch der in der Aufgabe enthaltene Gedanke der linearen Approximierbarkeit von Funktionen weiter ausgebaut werden. Ebenfalls denkbar ist eine Bestätigung der Ergebnisse dieser Aufgabe durch eine systematische analytische Betrachtung der Bestandsfunktion.

Unterrichtliche Voraussetzungen: Die Aufgabe erfordert den sicheren Umgang mit einem Tabellenkalkulationsprogramm. Die Schülerinnen und Schüler müssen mit ganzrationalen Funktionen und Graphen rechnerisch und zeichnerisch umgehen können. Sie sollten lokale Änderungsraten berechnen und deuten können und in der Lage sein, Bestände aus Änderungsraten und dem Anfangsbestand zu berechnen. Aus der Differentialrechnung müssen fundamentale Begriffe zur Kurvenuntersuchung (Nullstelle, Minimum, Maximum, Monotonie, offenes und geschlossenes Intervall) zur Verfügung stehen. Der Integralbegriff ist nicht explizit erforderlich, jedoch sollte die Idee des „rückwärts Ableitens“ bekannt sein. Die Idee, durch Verringerung der Teilintervallbreite eine Näherungsfunktion zu verbessern, sollte im Unterricht bereits an anderen Stellen thematisiert worden sein.

Aufgabe

Betrachten Sie die Funktion f mit $f(x) = 0{,}5x^3 - 6{,}5x^2 + 22x - 16$ für $0 \le x \le 9$. f soll hier die Bedeutung der Änderungsrate einer „Bestands"-Funktion B haben. Der Bestand $B(x)$ soll im Folgenden näherungsweise auf dem Intervall $0 \le x \le 9$ berechnet werden.

a)
Erstellen Sie mit einem Tabellenkalkulationsprogramm eine Wertetabelle der Funktion f im Bereich $0 \le x \le 9$ (Schrittweite $0{,}5$), und lassen Sie sich den Graphen von f anzeigen.

b)
Der Anfangsbestand $B(0)$ sei gleich 0. Die Funktion f soll nun auf den Teilintervallen $[d \cdot n; d \cdot (n+1)[$ der Breite $d = 0{,}5$ durch einen jeweils konstanten Wert angenähert werden. Als Näherungswert wird jeweils der Funktionswert in der Intervallmitte gewählt.

Begründen Sie, dass unter dieser Annahme für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten würde: $B(d \cdot (n+1)) = B(d \cdot n + d) = B(d \cdot n) + y_n \cdot d$, wobei y_n der konstante Wert von f im Intervall $[d \cdot n; d \cdot (n+1)[$ ist. Erklären Sie dabei insbesondere die Bedeutung von $y_n \cdot d$ innerhalb des obigen Terms.

c)
Erweitern Sie die in a) begonnene Tabelle:

Berechnen Sie die Zu- bzw. Abnahme des Bestandes auf jedem Teilintervall. Ermitteln Sie daraus jeweils den Gesamtbestand ausgehend vom Anfangsbestand $B(0) = 0$.

d)
Ergänzen Sie in dem Diagramm mit dem Graphen von f aus Teilaufgabe a) den Graphen der angenäherten Funktion B.

e)
Beschreiben Sie, welche Beziehungen Sie zwischen den Graphen von f und B erkennen.

Nehmen Sie dabei Bezug auf das Monotonieverhalten und das Vorzeichen der Funktionswerte sowie auf charakteristische Punkte, z. B. Schnittpunkte mit der x-Achse, Extrempunkte etc.

f)
Erklären Sie das beobachtete Monotonieverhalten von B unter Bezug auf das Rechenverfahren aus b).
Erklären Sie hiermit auch die beobachteten Extrempunkte von B.

g)
Verändern Sie in der Tabelle den Anfangsbestand $B(0)$. Untersuchen Sie, welche Auswirkungen dies auf den Graphen von B hat.

h)
Formulieren Sie auf der Grundlage der bisherigen Ergebnisse eine Vermutung, wie die so näherungsweise gewonnene Funktion B mit der Funktion f zusammenhängt. Geben Sie auf Basis Ihrer Vermutung einen Term für $B(x)$ an.

i)
Fügen Sie in Ihrer Tabellenkalkulation eine weitere Spalte hinzu. Berechnen Sie hier die Werte von $B(x)$ mithilfe Ihres Terms aus h). Stellen Sie diese ebenfalls im Diagramm dar.

j)

Experimentieren Sie mit der Tabellenkalkulation mit dem Ziel, die berechnete Näherungsfunktion B zu verbessern. Verringern Sie hierzu schrittweise in mehreren aufeinanderfolgenden Anläufen die Breite d der Teilintervalle; wählen Sie u. a. $d = 0{,}1$ und $d = 0{,}01$. Überprüfen Sie so, ob sich die in h) geäußerte Vermutung bewahrheitet.

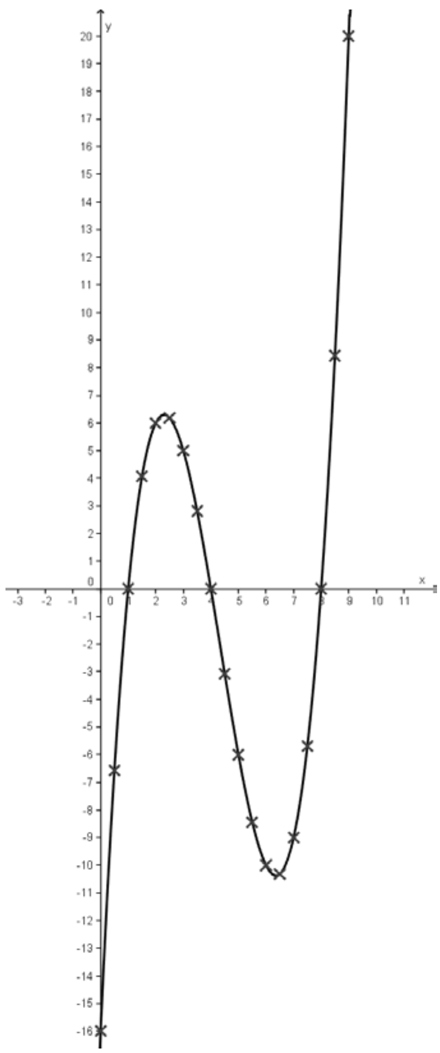
Lösung

a)

x	f(x)
0	-16
0,5	-6,5625
1	0
1,5	4,0625
2	6
2,5	6,1875
3	5
3,5	2,8125
4	0
4,5	-3,0625

x	f(x)
5	-6
5,5	-8,4375
6	-10
6,5	-10,3125
7	-9
7,5	-5,6875
8	0
8,5	8,4375
9	20

Wertetabelle 5.1-1



Graph 5.1-1

b)
Der Gesamtbestand ergibt sich aus dem Anfangsbestand $B(0)$ und der Änderung (Zu- bzw. Abnahme) innerhalb einer bestimmten Zeit Δx. Bei Teilintervallen der Breite $d = \Delta x = 0,5$ wird nun angenommen, dass die Änderung (Zu- bzw. Abnahme) auf diesem Zeitintervall konstant bleibt und wird mit y_n bezeichnet. Für das erste Teilintervall bedeutet das also:

$B(0,5) = B(0) + d \cdot y_1$

Für die ersten beiden Teilintervalle lautet die Formel dann (mit y_1 als konstantem Wert auf dem ersten Teilintervall und y_2 entsprechend für das zweite Teilintervall):

$B(1) = B(0,5) + d \cdot y_2 = B(0) + d \cdot y_1 + d \cdot y_2$

Hierbei sind die ersten beiden Summanden der angenäherte Bestand für $x = 0,5$.

Dabei unterscheiden sich die Funktionswerte von $B(1)$ und $B(0,5)$ um $d \cdot y_2$. Dieser Term beschreibt also den Zuwachs der Bestandsfunktion.

Wie man nun erkennt, lässt sich der Wert nach den ersten *n* Teilintervallen entweder durch eine Summation der Änderungen in den *n* Teilintervallen (multipliziert mit d) und dem Anfangsbestand erreichen oder durch Summation der Änderungen (multipliziert mit d) des *n*-ten Teilintervalls und des (*n*-1)-ten angenäherten Bestandes (Da $d = 0,5$ bedeutet die Betrachtung von *n* Teilintervallen den Bestand für $x = \frac{n}{2}$):

$$B\left(\frac{n}{2}\right) = B\left(\frac{n}{2} - 0,5\right) + d \cdot y_n = B(0) + \sum_{i=1}^{n} d \cdot y_i$$

Ersetzt man in dieser Gleichung nun $x = \frac{n}{2}$, so erhält man:

$B(x) = B(x - 0,5) + d \cdot y_n$.

Der neue Bestand wird also aus dem alten Bestand und der Änderung auf dem letzten Teilintervall berechnet. Dies entspricht der Gleichung aus der Aufgabenstellung.

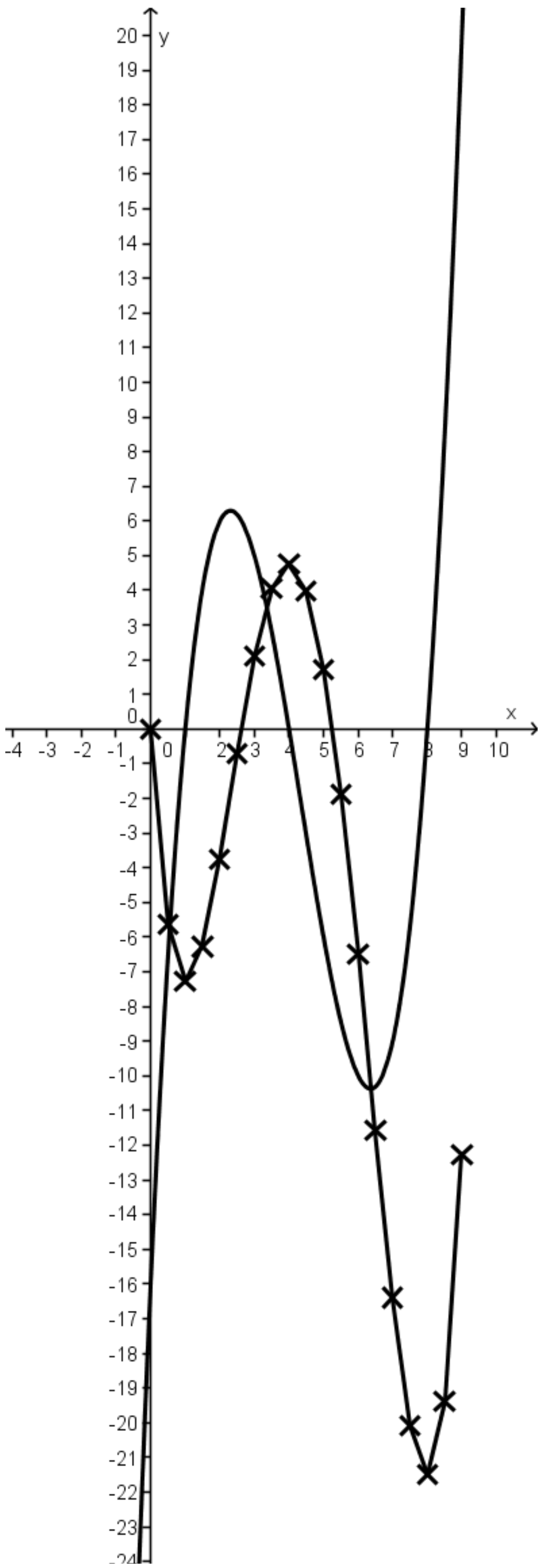
c)

x_n	$f(x_n)$	Änderungsrate pro Intervall	Bestand (Näherung)
0	-16	0	0
0,5	-6,563	-5,641	-5,641
1	0	-1,641	-7,281
1,5	4,0625	1,016	-6,266
2	6	2,516	-3,75
2,5	6,1875	3,047	-0,703
3	5	2,797	2,094
3,5	2,8125	1,953	4,047
4	0	0,703	4,75
4,5	-3,0625	-0,766	3,984

x_n	$f(x_n)$	Änderungsrate pro Intervall	Bestand (Näherung)
5	-6	-2,266	1,719
5,5	-8,438	-3,609	-1,891
6	-10	-4,609	-6,5
6,5	-10,31	-5,078	-11,578
7	-9	-4,828	-16,406
7,5	-5,688	-3,672	-20,078
8	0	-1,422	-21,5
8,5	8,4375	2,109	-19,391
9	20	7,109	-12,281

Wertetabelle 5.1-2

d)



Graph 5.1-2

e)
In dem punktweise erzeugten Graphen der Bestandsfunktion B erkennt man ein Maximum an der Nullstelle $x_{N_1} = 4$ von f und Minima an den Nullstellen $x_{N_2} = 1$ und $x_{N_3} = 8$ von f.

Für x aus dem Intervall $[1;4]$ und für $x > 8$ ist B streng monoton wachsend und $f(x)$ nimmt dort positive Werte an. Auf den Intervallen $[0;1]$ und $[4;8]$ ist B streng monoton fallend und $f(x)$ nimmt dort negative Werte an.

An den Extremstellen von f liegen offenbar Wendestellen der Bestandsfunktion B.

f)
Wenn der konstante Näherungswert für die Änderungsrate auf einem Teilintervall negativ ist, wird von dem Bestand zu Beginn des Intervalls etwas subtrahiert, d. h., der Bestand nimmt ab.

Bei einem positiven Näherungswert für die Änderungsrate wird zu dem Bestand zu Beginn des Intervalls etwas addiert, d. h., der Bestand nimmt zu.

An den Nullstellen von f findet ein Vorzeichenwechsel statt, damit wechselt aber auch, wie eben beschrieben, das Monotonieverhalten von B. Bei einem Wechsel von Steigen zu Fallen hätte B ein Maximum, im umgekehrten Fall ein Minimum.

g)
Mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms lassen sich sämtliche Berechnungen erneut durchführen, wenn ein neuer Wert für den Anfangsbestand an entsprechender Stelle eingetragen wurde. Das Programm aktualisiert alle abhängigen Werte und den Graphen automatisch.

Beobachtung: Die Graphen haben immer den gleichen Verlauf, sie werden nur in y-Richtung verschoben.

h)
Vermutung: B erhält man aus f durch Umkehrung des Vorgangs der Ableitung (falls der Begriff schon bekannt ist: B ist eine Stammfunktion von f, ansonsten werden die Schüler eher sagen, dass die Ableitung von B die Funktion f ergibt). Durch „Rückwärts-Anwenden“ der Ableitungsregeln kann man den Term von B finden:

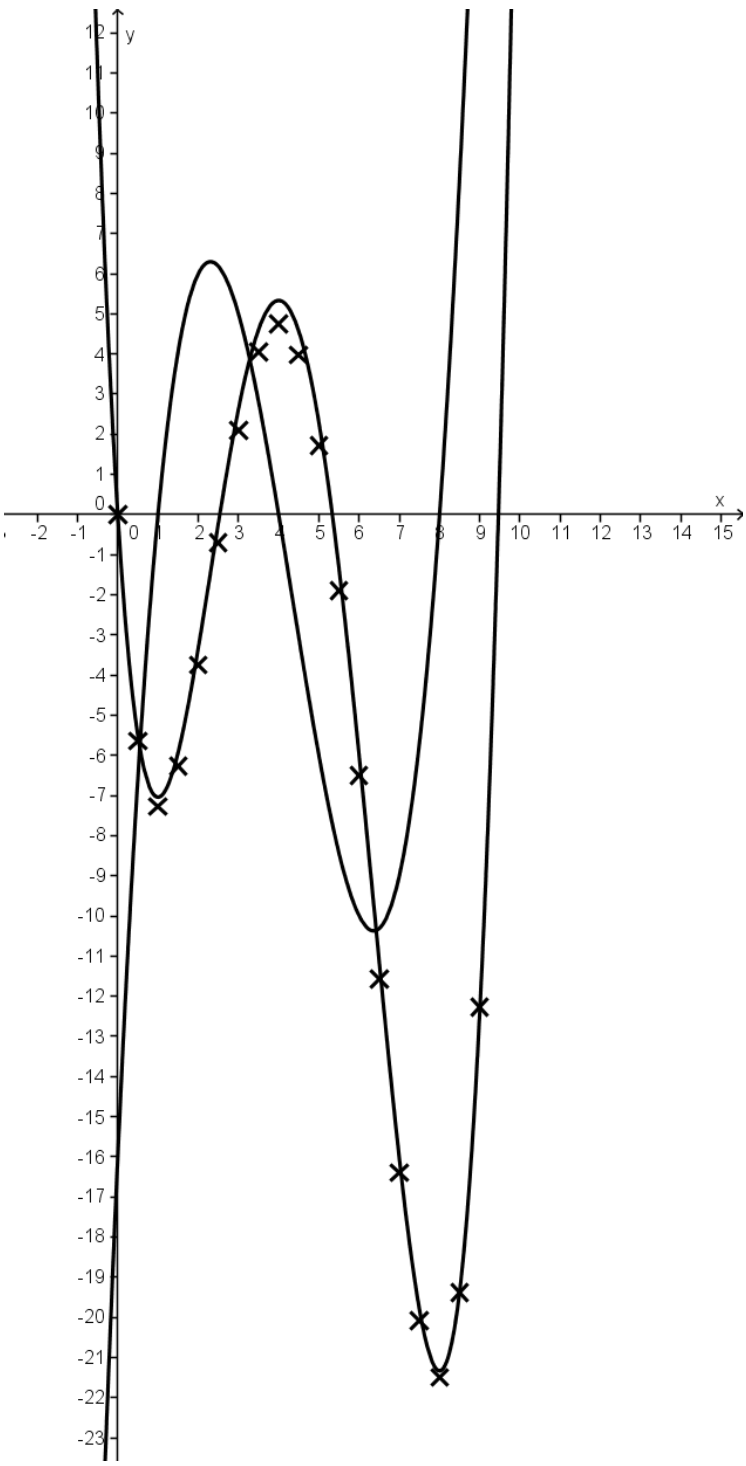
$$f(x) = 0{,}5x^3 - 6{,}5x^2 + 22x - 16 \Rightarrow B(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{6{,}5}{3}x^3 + \frac{22}{2}x^2 - 16x + B(0)$$

(*Anmerkung:* Das Aufstellen des Terms geschieht *ohne Rechner*, also nicht „Integral von …“ eintippen. Die Brüche müssen aber nicht vereinfacht werden, da so das Rückwärtsdenken der Ableitungsregeln besser erkennbar ist.)

i)

x_n	$f(x_n)$	Bestand (Näherung)	$B(x)$	x_n	$f(x_n)$	Bestand (Näherung)	$B(x)$
0	-16	0	0	5	-6	1,719	2,29
0,5	-6,563	-5,641	-5,51	5,5	-8,438	-1,891	-1,35
1	0	-7,281	-7,04	6	-10	-6,5	-6
1,5	4,0625	-6,266	-5,93	6,5	-10,31	-11,578	-11,14
2	6	-3,75	-3,33	7	-9	-16,406	-16,04
2,5	6,1875	-0,703	-0,22	7,5	-5,688	-20,078	-19,81
3	5	2,094	2,63	8	0	-21,5	-21,33
3,5	2,8125	4,047	4,61	8,5	8,4375	-19,391	-19,35
4	0	4,75	5,33	9	20	-12,281	-12,38
4,5	-3,063	3,984	4,57				

Wertetabelle 5.1-3



Graph 5.1-3

j)
Die Näherung wird genauer, also die Differenz zwischen Näherung und tatsächlichen Funktionswerten $B(x)$ wird geringer, je kleiner d gewählt wird.

5.2 Kristallgitter

Sachgebiet: Geometrie

Leitideen: Messen [L2], Raum und Form [L3]

Kompetenzen:

	K1	K2	K3	K4	K5	K6
AB 1	X	X				
AB 2			X	X	X	X
AB 3						

Hilfsmittel: einfacher wissenschaftlicher Taschenrechner

Bearbeitungszeit: 150 min

Anmerkungen: In dieser Aufgabe aus der Geometrie bearbeiten Schülerinnen und Schüler verschiedene Fragestellungen zu fiktiven Kristallgittern. Die Aufgabe verbindet die Leitideen 2 und 3 miteinander. Die Nutzung eines Rechners über das angegebene Hilfsmittel hinaus ist für die Bearbeitung dieser Aufgabe nicht erforderlich. Interessant ist hier insbesondere der mögliche Wechsel zwischen der analytischen Vorgehensweise und dem räumlichen Strukturieren. Die Aufgabe macht das Potenzial der analytischen Geometrie zur Lösung räumlicher Probleme transparent, u. a. durch die kritische Reflexion der verschiedenen Darstellungsformen in Teilaufgabe c) und d). Sie erfordert mehrdimensionales Vorstellungsvermögen und bietet dafür bei entsprechender Umsetzung Unterstützungspotenzial.

Ab dem Aufgabenteil e) lässt sich erkennen, dass diese Aufgabe in vielfältige Richtungen weiterentwickelt bzw. erweitert werden kann. Anschlussmöglichkeiten sind hier auch zu den beruflichen Schulen möglich, z. B. beim Thema Einsatz von Fräsmaschinen. Auch über die angegebenen Leitideen hinaus ist beispielsweise eine Thematisierung von Zählprinzipien möglich, indem beispielsweise die Anzahl der für das Modell benötigten Kugeln und Stäbe für verschiedene Konstellationen bestimmt wird.

Unterrichtliche Voraussetzungen: Die Aufgabe erfordert ein gutes räumliches Vorstellungsvermögen und dass die Schülerinnen und Schüler geometrische Sachverhalte in Ebene und Raum koordinatisieren können. Fundamentale Begriffe aus der analytischen Geometrie (kartesisches räumliches Koordinatensystem, Orts- und Richtungsvektor, Länge eines Vektors, Normalenvektor, Skalarprodukt) müssen zur Verfügung stehen. Die Schülerinnen und Schüler können die Länge eines Vektors, den Winkel zwischen Vektoren sowie den Schwerpunkt eines Dreiecks berechnen und mit Geradengleichungen (Parameterform) und Ebenengleichungen (Normalform) umgehen.

Aufgabe

Typisch für den Aufbau von Kristallen ist eine regelmäßige Anordnung identischer Grundbausteine. Wenn diese Grundbausteine wiederholt aneinander angesetzt werden, bildet sich ein sogenanntes Kristallgitter.

Modelle von Kristallgittern werden zur Veranschaulichung im Schulunterricht häufig mit Magnetstäben und Kugeln gebaut, wobei die Kugeln für die Gitterpunkte stehen, an denen sich die Atome befinden.

Größere Gitterstrukturen können mithilfe des Computers visualisiert werden.

Hier ist der Aufbau eines Gitters mithilfe des Grundbausteins „Tetraeder“ dargestellt. Die kleinen Tetraeder erhalten die Typbezeichnung T1 (Abbildung 5.2-1). Aus jeweils 4 kleinen Tetraedern vom Typ T1 wird ein größeres Tetraeder vom Typ T2 (Abbildung 5.2-2) gebaut, wobei einige Kugeln (an den „Nahtstellen“) herausgenommen werden müssen.

Aus jeweils vier Tetraedern vom Typ T2 wird ein Tetraeder vom Typ T3 (Abbildung 5.2-4) zusammengesetzt, das in der Mitte einen Hohlraum hat.

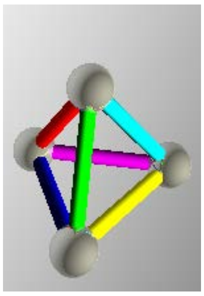


Abbildung 5.2-1

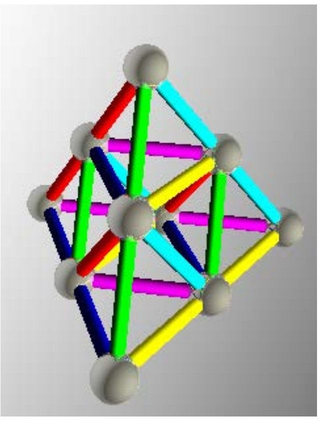


Abbildung 5.2-2

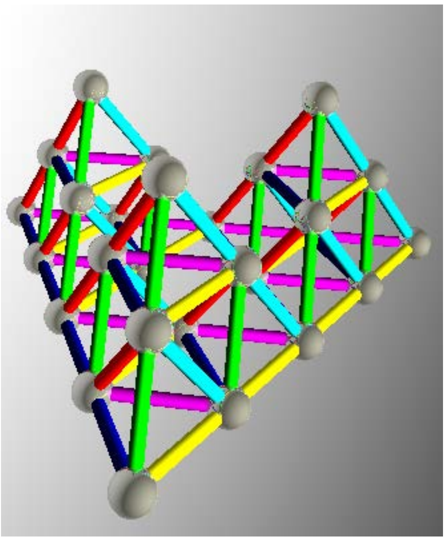


Abbildung 5.2-3

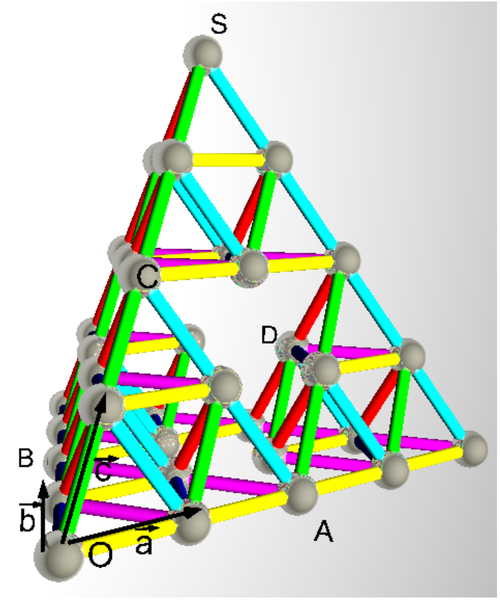


Abbildung 5.2-4

In Abbildung 5.2-4 sind die Punkte O, A, B, C, D und S im Tetraeder T3 sowie die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dargestellt (Beachten Sie: Die angegebenen Vektoren sind nicht die Ortsvektoren zu den Punkten A, B und C!). Dabei sind die Punkte O, A, B und C die Eckpunkte des im Bild vordersten Tetraeders vom Typ T2.

a)
Erläutern Sie, dass das Tetraeder vom Typ T3 tatsächlich in der genannten Weise zusammengefügt werden kann. Erläutern Sie dazu,

- dass der Boden von T3 aus vier kongruenten gleichseitigen Dreiecken besteht, und
- dass das obere Tetraeder vom Typ T2 genau auf die drei unteren Tetraeder vom Typ T2 passen muss.

b)
Die Magnetstäbe sind 2,6 cm lang, die Kugeln haben einen Durchmesser von 1,2 cm.

Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ werden nun in einem kartesischen Koordinatensystem dargestellt, mit dem Ursprung in *O*, der ersten Achse parallel zu $\vec{a}$ und der dritten Achse senkrecht zur Grundfläche der Pyramide. Eine Einheit entspricht 1 cm.

Weisen Sie nach, dass die folgenden Angaben stimmen:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3{,}8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1{,}9 \\ 1{,}9 \cdot \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{c} = \begin{pmatrix} 1{,}9 \\ \frac{19\sqrt{3}}{30} \\ \frac{19\sqrt{6}}{15} \end{pmatrix}$$

c)
Punkte des Gitters, zum Beispiel D oder S (s. Abbildung 5.2-4), können nun auf zwei verschiedene Arten angegeben werden:

- einerseits durch ihre Koordinaten im gegebenen kartesischen Koordinatensystem,
- andererseits als Vektoren, die unter Verwendung der Vektoraddition und der skalaren Multiplikation aus $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ gewonnen wurden.

Geben Sie den Ortsvektor von D und von S in beiden Darstellungsweisen an.

d)
Erläutern Sie jeweils die Vorteile beider Darstellungsweisen aus c). Überlegen Sie sich eine Problemstellung aus der Realität, in denen die Darstellungsweise über kartesische Koordinaten besser geeignet ist.

Bei bestimmten dreidimensionalen Darstellungen von Objekten mithilfe von Computern müssen zur Darstellung der Flächen und Kanten die zugehörigen Ebenen- und Geradengleichungen bekannt sein.

Der Hohlraum, der die Mitte von T3 ausfüllt, soll durch Flächenstücke begrenzt werden.

e)

- Geben Sie an, wie viele Flächenstücke der Programmierer darstellen muss und welche Form diese haben.
- Geben Sie eine Gleichung für die Gerade durch die Punkte A und B an.
- Geben Sie eine Gleichung für die Ebene durch die Punkte A, B und C an.
- Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.
- Bestimmen Sie das Volumen des Hohlraums, der die Mitte von T3 ausfüllt.

Unter anderem bei Computerspielen werden Objekte, z. B. Häuser, Steine, Pyramiden etc. im dreidimensionalen Raum dargestellt. Um eine möglichst realitätsnahe Darstellung zu gewährleisten, muss neben der korrekten Darstellung der Objekte auch auf die richtige Beleuchtung geachtet werden.
Für die Berechnung von Beleuchtungseffekten im Computer sind die Winkel, unter denen das Licht auf die Flächen auftrifft, entscheidend. Hier soll das Licht senkrecht von oben kommen.

f)

Bestimmen Sie den Winkel, in dem das Licht auf die Oberfläche des Dreiecks durch die Punkte O, A und C trifft.

Lösung

a)

- Die drei Pyramiden T2 haben jeweils als Grundfläche gleichseitige Dreiecke mit der Kantenlänge *k*. Sie werden so auf dem Boden aneinandergestellt, dass die Ecken identisch sind. Es entsteht in der Mitte ein Dreieck, welches ebenfalls die Kantenlänge *k* besitzt und dementsprechend gleichseitig ist. Damit sind die vier Dreiecke auch kongruent.
- Verschiebt man die Pyramide T2 mit dem Eckpunkt O in Richtung von $\vec{a}$ um eine Kantenlänge T2, so wird sie deckungsgleich mit der benachbarten Pyramide T2. Die Spitzen der beiden Pyramiden haben in der Ausgangslage also auch genau den Abstand *k*. Aus Symmetriegründen gilt das für jede der drei unteren Pyramiden T2. Damit bilden die Spitzen dieser drei Pyramiden ebenfalls ein gleichseitiges Dreieck der Kantenlänge *k*, sodass eine Pyramide T2 auf die unteren Pyramiden passen muss.

b)

Der Abstand zwischen zwei Kugelmittelpunkten im Tetraeder T1 beträgt 3,8 cm. Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ haben also im Koordinatensystem alle die Länge 3,8 LE.

Da der Vektor $\vec{a}$ parallel zur 1. Achse verläuft, muss er die angegebenen Koordinaten haben.

$\vec{b}$ bildet mit der 1. Achse einen Winkel von 60°.

Damit gilt $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3{,}8 \cdot \cos(60°) \\ 3{,}8 \cdot \sin(60°) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}9 \\ 1{,}9 \cdot \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1{,}9 \\ 3{,}3 \\ 0 \end{pmatrix}$, das sind die angegebenen Koordinaten.

Die Spitze der Pyramide liegt senkrecht über dem Schwerpunkt des Bodendreiecks.

Für den Ortsvektor zum Schwerpunkt eines Dreieckes $\vec{m}$ mit den Ortsvektoren der Ecken $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ gilt $\vec{m} = (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})/3$.

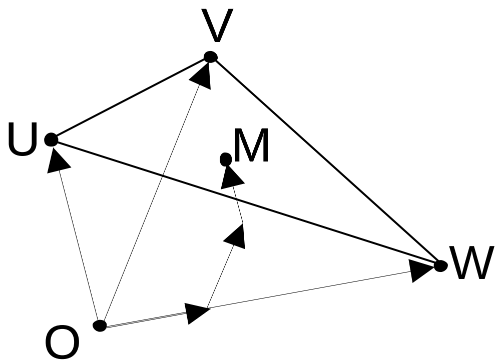


Abbildung 5.2-5

Damit gilt hier

$$\vec{m} = \frac{\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3,8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3,8 \cdot \cos(60°) \\ 3,8 \cdot \sin(60°) \\ 0 \end{pmatrix}\right]}{3} = \begin{pmatrix} 1,9 \\ \frac{19}{30}\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1,9 \\ 1,1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Somit ist $\vec{c} = \begin{pmatrix} \frac{3,8 + 3,8 \cdot \cos(60°)}{3} \\ \frac{3,8 \cdot \sin(60°)}{3} \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,9 \\ \frac{19}{30}\sqrt{3} \\ z \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1,9 \\ 1,1 \\ z \end{pmatrix}$ mit der Randbedingung $|\vec{c}| = 3,8$.

Deshalb genügt es nachzuweisen, dass der gegebene Vektor $\vec{c}$ die Länge 3,8 hat.

Alternativ kann man z bestimmen mit $(1,9)^2 + \left(\frac{19}{30}\sqrt{3}\right)^2 + z^2 = 3,8^2$ und $z = \frac{19\sqrt{6}}{15} \approx 3,1$

c)

$$\vec{S} = 4\vec{c} \approx 4\begin{pmatrix} 1,9 \\ 1,1 \\ 3,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7,6 \\ 4,4 \\ 12,4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{D} = 2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \approx 2\begin{pmatrix} 3,8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,9 \\ 3,3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,9 \\ 1,1 \\ 3,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11,4 \\ 4,4 \\ 3,1 \end{pmatrix}$$

d)

Vorteile der Darstellung mit $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$:

- Um eine Kugelposition mit $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ anzugeben, muss man nur entsprechende Kantenstücke zählen und erhält somit ganzzahlige Koordinaten.
- Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind somit die natürliche Basis, um Kristallgitterpositionen anzugeben.

Vorteile der Darstellung im kartesischen Koordinatensystem:

- Dieses ist das allgemeinverständliche Koordinatensystem, dessen Eigenschaften besonders einfach die Orientierung im Raum ermöglicht.
- Man muss im Gegensatz zur Darstellung mit $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ nur wenig Information vermitteln, um dieses Koordinatensystem zu beschreiben, da die übliche Basis (1|0|0), (0|1|0) und (0|0|1) intuitiv verständlich ist.

Beispiel einer vorteilhaften Situation für kartesische Koordinaten: Hinweisschilder von Gasanschlüssen oder Unterflurhydranten. Die Lage wird durch kartesische Koordinaten angegeben.

Abbildung 5.2-6

e)

Der Hohlraum in der Mitte wird von den vier Pyramiden des Typs T2 begrenzt und zusätzlich von den vier Außenflächen der Pyramide vom Typ T3. Insgesamt sind es also acht dreieckige Flächenstücke.

$$g: \vec{x} = 2\vec{a} + v(\vec{b} - \vec{a}) \approx \begin{pmatrix} 7,6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -1,9 \\ 3,3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ABC steht senkrecht zum Vektor $\vec{n} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ und geht durch den Punkt, den der Ortsvektor $\vec{a}$ beschreibt. Damit lautet eine Ebenengleichung
$\vec{x} \in E \Leftrightarrow (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{x} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{a}$.

Durch Einsetzen erhält man $\vec{x} \in E \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7,6 \\ 4,4 \\ 3,1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 28,88$

ABC ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Kantenlänge 3,8 cm.
Damit beträgt der Flächeninhalt $A = 3,8 \cdot 3,8 \cdot \sin(60°) / 2 = 3,61 \cdot \sqrt{3} \approx 6,25\,\text{cm}^2$.

Die Pyramide T3 umschreibt das achtfache Volumen der Pyramide T2, besteht jedoch nur aus vier Pyramiden T2. Dementsprechend hat der Hohlraum das halbe Volumen der Pyramide T3.

Das Volumen einer Pyramide wird berechnet durch Grundfläche mal Höhe geteilt durch 3.

Die Grundfläche ist das Vierfache des Flächeninhalts von ABC, die Höhe beträgt 12,4 cm. Damit beträgt das Volumen der Pyramide 103,3 cm³, das Volumen des Oktaeders also 51,7 cm³.

f)
Da das Licht senkrecht von oben kommt, trifft es auf alle Pyramidenseiten außer der Grundfläche im gleichen Winkel.

Für die Berechnung kann daher der Normalenvektor aus e) verwendet werden (alternativ wird ein neuer Normalenvektor bestimmt).

Somit ist der Winkel zwischen $\begin{pmatrix} 7,6 \\ 4,4 \\ 3,1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ zu bestimmen.

$\alpha = \arccos\left(\frac{3,1}{\sqrt{7.6^2 + 4,4^2 + 3,1^2}}\right) \approx 70,6°$. Da dies der Winkel zwischen Normalenvektor und einfallendem Licht ist, beträgt der gesuchte Winkel 19,4°.

5.3 Flugbuchung

Sachgebiet: Stochastik

Leitideen: Daten und Zufall [L5], Messen [L2]

Kompetenzen:

	K1	K2	K3	K4	K5	K6
AB 1						
AB 2				X	X	
AB 3			X			X

Hilfsmittel: Tabellenkalkulation (oder GTR). Ein Vorteil des mathematischen Werkzeugs „Tabellenkalkulationsprogramm" (bzw. GTR) ist, dass die Parameter der Aufgabe (wie die Anzahl der verkauften Tickets, die Stornierungswahrscheinlichkeit und -kosten, die Ticketpreise und Unkosten durch Entschädigungen) verändert werden können, um deren Einfluss auf die zu erwartenden Einnahmen in ihrem Zusammenspiel zu untersuchen. Die Lernenden sollten, wenn sie am Computer sitzen, entsprechende Daten selbst recherchieren, um so auch etwas über den Kontext zu lernen.

Bearbeitungszeit: 100 min

Anmerkungen: Diese Aufgabe aus der Stochastik ist eine Variante der im vorstehenden Kapitel gestellten Prüfungsaufgabe. Gegenüber der Aufgabe in den „Einheitlichen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung Mathematik" (EPA) von 2002 hat die Aufgabe Veränderungen erfahren.Das Besondere und Innovative dieser Aufgabe ist der Einsatz stochastischer Simulation mit Rechnereinsatz.

Dabei sind zwei Varianten realisiert: In der Variante 1 werden Ergebnisse von Simulationsläufen vorgegeben und sind nur zu interpretieren.

In der Variante 2 wird von den Schülerinnen und Schülern die selbständige Entwicklung und Durchführung von Simulationsmodellen und -durchläufen erwartet. Dies geschieht unter Einsatz eines Tabellenkalkulationsprogramms. Im Unterricht kann die Aufgabe auch differenzierend eingesetzt werden. Da es sich um eine Lernaufgabe handelt, können im Unterricht auch verschiedene Simulationen von Schülerinnen und Schülern erstellt werden, die auf unterschiedliche Annahmen, z. B. bezüglich Kosten, beruhen.

Die Unterschiede in den Annahmen und die Auswirkungen auf die Ergebnisse können kritisch hinterfragt und diskutiert werden. Die angesprochene Simulation ab Teilaufgabe b) stellt einen großen Unterschied zur Parallelversion in den Prüfungsaufgaben dar. Schülerinnen und Schüler erkennen hier auch, dass die Mathematik nicht einfach Ergebnisse liefert, sondern dass diese natürlich von der Exaktheit des Erfassens der Ausgangsbedingungen abhängen. Die numerischen Ergebnisse bedürfen einer weiterführenden Interpretation. Verschiedene Ansätze führen zu unterschiedlichen Ergebnissen, die miteinander verglichen den Kontext transparent machen. Simulationen, grafische Darstellungen und übersichtliche Interpretationen der Ergebnisse helfen Fehler zu vermeiden, klären Sachverhalte, machen Voraussagen transparent und helfen das Problem zu lösen. Der Vergleich der Ergebnisse legt stochastische Prozesse (Zufallsprozesse) offen und vertieft Grundvorstellungen zu Gesetzen der großen Zahlen. Die Aufgabe ist auch für **Wirtschaftsgymnasien** (**berufliches Gymnasium**) geeignet (z. B. Gewinnmaximierung, Kostenreduzierung).

Darüber hinaus stellt diese Aufgabe eindrucksvoll die Relevanz von Mathematik für das von H. Winter postulierte Verstehen der Umwelt dar. Mit dieser Aufgabe wird exemplarisch deutlich, wofür Mathematik im Alltag nutzbar und erforderlich ist.

Unterrichtliche Voraussetzungen: Die Schülerinnen und Schüler müssen mit einem Tabellenkalkulationsprogramm sicher umgehen können. Es wird erwartet, dass sie selbstständig stochastische Simulationen deuten, entwickeln und durchführen können. Die Binomialverteilung und der Erwartungswert einer Zufallsvariablen wurden im Unterricht behandelt. Des Weiteren wird ein grundlegendes Verständnis wirtschaftswissenschaftlicher Begriffe (Kosten, Gewinn, Mehr- und Mindereinnahmen, Stornierung) vorausgesetzt. Ferner sollte die gängige Praxis der Überbuchung bei Flügen mit Ausgleichszahlung den Schülerinnen und Schülern bekannt sein.

Aufgabe

Auf einer bestimmten Strecke verwendet eine Fluggesellschaft Flugzeuge mit jeweils 100 Plätzen, die vor Flugantritt gebucht und bezahlt werden. Die Flüge auf dieser Strecke sind im Voraus stets ausgebucht.
Allerdings werden im Mittel 10 % der gebuchten Plätze kurzfristig storniert (d. h. von den Leuten, die gebucht haben doch wieder abgesagt).

Von einer Person, die tatsächlich fliegt, nimmt die Fluggesellschaft 200 € ein, bei einer Stornierung wegen teilweiser Erstattung nur 100 €.

Gehen Sie von der Modellannahme aus, dass die möglichen Anzahlen von Stornierungen der Buchungen für jeweils einen festen Flug binomialverteilt sind.

a)

Berechnen Sie, welche Einnahmen die Fluggesellschaft auf lange Sicht im Mittel pro Flug erwarten kann.

Um die Flugzeuge besser auszulasten, bietet die Fluggesellschaft von vornherein statt 100 stets 108 Plätze, also 8 mehr als verfügbar, zum Verkauf an. Da auch diese Plätze stets alle im Voraus gebucht und bezahlt werden, geht die Fluggesellschaft damit das Risiko einer Überbuchung ein. Es können also unter Umständen gebuchte Plätze nicht in Anspruch genommen werden.

Bei jedem Fluggast, der seinen gebuchten Flug antreten will, dies aber wegen Überbuchung nicht kann, zahlt die Fluggesellschaft diesem für Hotelkosten bzw. entstandenen Ärger eine Ausgleichszahlung von 1500 €, erstattet dem Fluggast aber den Kaufpreis nicht zurück.
Der Fluggast erhält jedoch einen Flug zum gebuchten Ziel mit einer anderen Maschine. Der Fluggesellschaft entstehen hierdurch Kosten von 200 Euro.

Ob sich die Geschäftspraxis der Überbuchungen für die Fluggesellschaft ökonomisch lohnt, soll in den weiteren Aufgabenteilen mithilfe **stochastischer Simulation** bearbeitet werden.

Bemerkung: Als elektronisches Werkzeug wird eine Tabellenkalkulation verwendet.

Vorgehensweise: Man legt dazu eine 100-x-108-Simulationstabelle für 100 Flüge mit je 108 buchbaren Plätzen an und berechnet mit jedem Simulationslauf jede dieser 10800 Zellen immer wieder neu durch folgende Formel:
$=WENN(ZUFALLSZAHL > 0,9; 0; 1)$

	↓Passagier Nr.↓																	
Flug Nr.↓	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	...
1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	...
2	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	...
3	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	...
4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	...
5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	...
6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	...
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	...
8	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	...
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	...

Abbildung 5.3-1

b)
Erläutern Sie die Bedeutung dieser Matrix im Sachzusammenhang. Was bedeuten die einzelnen Zellen in Bezug auf das Zufallsexperiment „Flugbuchung“?

> Für die weitere Aufgabenbearbeitung gibt es zwei Alternativen.
> Alternative 1 bietet bereits eine Simulation an, die zu interpretieren ist.
> In Alternative 2 führen Sie die Simulationen selbstständig durch.

<u>Variante 1:</u>

Das oben angelegte Tabellenblatt wurde in der unten angedeuteten Weise links erweitert und einmal berechnet. Das Ergebnis ist in der Abbildung 5.3-2 protokolliert:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
8													
9	**Jeweilige Mittelwerte von den 100 Flügen →**	**925,00 €**	**19.925,00 €**	**612,00 €**	**0,36**		**97,46**						
10													
11		↑	↑	↑	↑				↓Passagier Nr.↓				
12		**Mehr- bzw.Mindereinnahmen (gegenüber ohne Überbuchung erwarteten Einnahmen)↓**	**Verbleibende Einnahmen für den jeweiligen Flug ↓**	**Kosten für den jeweiligen Flug wg. Überbuchungen ↓**	**Anzahl für den jeweiligen Flug abgewiesener Passagiere↓**	**Einnahmen für den jeweiligen Flug↓**	**Anzahl für den jeweiligen Flug erscheinender Passagiere↓**	Flug Nr.↓	1	2	3	4	5
13		1.500,00 €	20.500,00 €	0,00 €	0	20.500,00 €	97	1	1	1	1	1	1
14		700,00 €	19.700,00 €	0,00 €	0	19.700,00 €	89	2	1	0	1	1	1
15		1.600,00 €	20.600,00 €	0,00 €	0	20.600,00 €	98	3	1	1	1	0	1
16		1.300,00 €	20.300,00 €	0,00 €	0	20.300,00 €	95	4	1	1	1	1	0
17		-3.000,00 €	16.000,00 €	5.100,00 €	3	21.100,00 €	103	5	1	1	1	1	1
18		1.800,00 €	20.800,00 €	0,00 €	0	20.800,00 €	100	6	1	1	1	1	1
19		1.700,00 €	20.700,00 €	0,00 €	0	20.700,00 €	99	7	1	1	1	1	1
20		-6.200,00 €	12.800,00 €	8.500,00 €	5	21.300,00 €	105	8	1	1	1	1	1
21		200,00 €	19.200,00 €	1.700,00 €	1	20.900,00 €	101	9	1	1	1	1	1
22		1.700,00 €	20.700,00 €	0,00 €	0	20.700,00 €	99	10	1	1	1	1	1
23		1.800,00 €	20.800,00 €	0,00 €	0	20.800,00 €	100	11	0	1	1	0	1
24		1.600,00 €	20.600,00 €	0,00 €	0	20.600,00 €	98	12	1	1	1	1	1

Abbildung 5.3-2

c)
Beschreiben Sie, wie die 24 Zahlenwerte in den dunkler unterlegten Feldern berechnet wurden und wie die Mittelwerte in Zeile 9 zustande kommen.

Variante 2:

Die in Abbildung 5.3-2 (Alternative 1) skizzierte Simulation soll jetzt von Ihnen selbst erzeugt werden.

d)
Erstellen Sie eine Tabellenkalkulation nach folgendem Schema. Greifen Sie dabei auf die 108-x-100-Matrix aus Teilaufgabe a) zurück.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2	Jeweilige Mittelwerte von den 100 Flügen →	?										
3												
4		↑	↑	↑	↑				↓Passagier Nr.↓			
5		Mehr- bzw.Mindereinnahmen (gegenüber ohne Überbuchung erwarteten Einnahmen)↓	Verbleibende Einnahmen für den jeweiligen Flug ↓	Kosten für den jeweiligen Flug wg. Überbuchungen ↓	Anzahl für den jeweiligen Flug abgewiesener Passagiere↓	Einnahmen für den jeweiligen Flug↓	Anzahl für den jeweiligen Flug erscheinender Passagiere↓	Flug Nr.↓	1	2	3	4
6								1	1	1	1	1
7								2	1	1	1	1
8								3	1	1	1	1
9								4	1	1	1	1
10								5	0	1	1	1
11								6	1	1	1	1
12								7	1	1	1	1

Abbildung 5.3-3

e)
Generieren Sie durch Neuberechnung dieser Simulationstafeln weitere Mittelwerte über je 100 Flüge und beobachten Sie diese.
Notieren und interpretieren Sie Ihre Beobachtungen.
Geben Sie insbesondere jedes Mal an, bei wie vielen der 100 Flüge der Gewinn größer ist als Ihr Ergebnis aus a).

f)
Erläutern Sie die Bedeutung des Wertes im mit „?“ gekennzeichneten Feld (s. Abbildung 5.3-3).

Nennen Sie Möglichkeiten, wie man die Genauigkeit des dort berechneten Wertes erhöhen kann.

Lösungen

a)
$0{,}1 \cdot 100€ \cdot 100 + 0{,}9 \cdot 100 \cdot 200€ = 19000€$
Auf lange Sicht werden 19000 € Einnahmen im Mittel pro Flug erwartet.

b)
Die Zellen modellieren das „Stornierungs-Verhalten“ der einzelnen buchenden Passagiere für 100 Flüge, für die jeweils 108 Passagiere gebucht haben.

1 bedeutet: „erscheint zu Flugtermin“, 0 bedeutet: „storniert“.

In jeder Zelle der 100 x 108 Zellen wird (stochastisch) unabhängig von den anderen ein Bernoulli-Experiment mit $p = 0{,}9$ simuliert.

c)
Zeile 18 (von rechts nach links gelesen):
Rechts sind 100 Einsen und 8 Nullen „gefallen“. Es sind also bei dieser Simulation zum Flug Nr. 6 genau 100 Personen erschienen und 8 haben storniert, das ergibt Einnahmen von $(100 \cdot 200 + 8 \cdot 100)$ € $= 20800$ €.

Dabei ist es nicht zu Überbuchungen gekommen („0“ in Zelle E18) und es fallen deshalb auch keine Überbuchungskosten an („0“ in Zelle D18). Die Einnahmen nach Abzügen sind demnach gleich den Einnahmen (Zelle C18). Gegenüber den erwarteten Einnahmen von 19000 € ohne Überbuchung (vgl. c) ergibt sich für die Fluggesellschaft ein Vorteil von 1800 € (Zelle B18).

Zeile 19 (von rechts nach links gelesen):
Hier geht es um Flug Nr. 7 und es liegt grundsätzlich die gleiche Situation wie bei Flug 6 vor, es sind aber nur 99 Personen erschienen: Daher liegen folgende Einnahmen vor:[4]

$F19 = (99 \cdot 200 + 9 \cdot 100)€ = 20700€$ und $B19 = (20700 - 19000)€ = 1700€$

Zeile 20 (von rechts nach links gelesen):
Hier geht es um Flug Nr. 8 und es haben nur 3 Personen storniert, es treten also 105 Personen zum Flug an und 5 müssen abgewiesen und in der Kostenrechnung berücksichtigt werden:
$F20 = (105 \cdot 200 + 3 \cdot 100)€ = 21300€$ und $D20 = 5 \cdot 1700€ = 8500€$ und
$B20 = F20 - D20 - 19000€ = -6200€$

In diesem Flug erwartet die Fluggesellschaft ein Minus von 6200 € gegenüber der Praxis, keine Überbuchungen zuzulassen.

[4] Der Einfachheit halber werden hier die Zelladressen gleich dem Zahlenterm gesetzt.

Zeile 21 (von rechts nach links gelesen):
Auch hier bei Flug Nr. 9 liegt eine Überbuchungssituation vor, diesmal für nur eine Person.
Die entsprechende Rechnung lautet:
$F21 = (101 \cdot 200 + 7 \cdot 100)\,€ = 20900\,€$ und $D21 = 1 \cdot 1700\,€ = 1700\,€$ und
$B21 = F21 - D21 - 19000\,€ = 200\,€$.

Hier ergibt sich noch ein Vorteil von 200 € im Vergleich zum System ohne Überbuchung.
Die Mittelwerte beziehen sich jeweils auf die 100 Daten der darunter stehenden Flüge.

d)
Durch jeweils einen einzigen Tastendruck werden ständig neue Tabellen mit zufälligen Ergebnissen erzeugt (also Flugbuchungen simuliert).
Das Augenmerk richtet sich auf die linke Einnahmespalte und auf die Frage, ob der Wert größer ausfällt als 19000 € (Erwartungswert der Einnahmen ohne Überbuchung, s. a)).

e)
Hier wird das (arithmetische) Mittel der 100 in der gleichen Spalte stehenden Einnahmen für die einzelnen Flüge berechnet. Dies ist ein mit jeder Neusimulation neu entstehender zufälliger Wert.
Dieser kann als (noch sehr grober) Schätzwert für den Erwartungswert der Einnahmen eines Fluges bzw. der Mehreinnahmen der Fluggesellschaft durch die Überbuchungsstrategie dienen.

Bemerkung: Der theoretisch exakte Wert der Zelle links unten (hier 20056 €) kann auch durch Rechnung bestimmt werden.

f)
Im bezeichneten Feld erscheint das (arithmetische) Mittel der 100 Einnahme-Werte für die einzelnen Flüge. Dies ist mit jeder Neusimulation auch ein neu berechneter Wert (auf Zufallszahlen basierend). Dieser kann als Schätzwert für die zu erwartenden Einnahmen eines Fluges bzw. die Mehreinnahmen der Fluggesellschaft durch die Überbuchungsstrategie dienen. Genauere Werte bekommt man durch häufige Neusimulation und erneute Mittelwertberechnung der jeweiligen Mittelwerte (Gesetz der großen Zahlen) oder indem man einfach in dem Ausgangsfeld die Zeilenzahl (Anzahl der Flüge) deutlich erhöht.

5.4 Kostenrechnung (Berufliches Gymnasien)

Sachgebiet: Analysis

Leitidee: Funktionaler Zusammenhang [L4]

Kompetenzen:

	K1	K2	K3	K4	K5	K6
AB 1	X			X		
AB 2			X		X	X
AB 3						

Hilfsmittel: graphikfähiger Taschenrechner (GTR) oder Tabellenkalkulation. Der Rechner wird hier genutzt, um Gleichungen und Gleichungssysteme zu lösen, Wertetabellen aufzustellen, Summen und Integrale numerisch zu berechnen. Darüber hinaus können auch die Graphen der beteiligten Funktionen gezeichnet werden, sodass die Schülerinnen und Schüler ihr Vorgehen anschaulich begleiten und die Ergebnisse vergleichen können. Alle hier gestellten Aufgaben können mit einem grafikfähigen Taschenrechner (GTR) bearbeitet werden, ein Teil der Aufgaben (Summation, Wertetabellen aufstellen, Graphen zeichnen) kann auch von einer Tabellenkalkulation übernommen werden.

Bearbeitungszeit: 60 min (bei Nutzung der optionalen Teile länger)

Anmerkungen: Die Modellierung eines wirtschaftlichen Sachzusammenhangs mit Mitteln der Analysis setzt mit einer Routinerechenoperation, dem Aufstellen einer ganzrationalen Funktion dritten Grades aus gegebenen Werten, ein und ermöglicht so einen einfachen Einstieg in die Aufgabe. Auch der zweite Teil der Aufgabe, das Aufstellen der Gewinnfunktion aus Erlös- und Kostenfunktion sowie die daran anschließende Berechnung des maximal möglichen Gewinns, ist aus mathematischer Sicht den Schülerinnen und Schülern vertraut und ohne großen Transfer leistbar. Die Herausforderung liegt hier im Interpretieren der Ergebnisse: In der Aufgabenstellung wird von diskreten Stückzahlen ausgegangen, die Modellierung ist aber stetig, sodass ein sinnvoller Rückbezug auf die außermathematische Realsituation erforderlich ist. Dieses Problem stellt sich in den beiden letzten Teilen der Aufgabe erneut. Die Infragestellung der durch Integration gewonnenen Ergebnisse aus Teil d) und das Angeben eines alternativen Rechenverfahrens erfordert zum einen ein sicheres Verständnis des Integrals, zum anderen eine Durchdringung des wirtschaftlichen Kontextes. Damit geht der Aufgabenteil e) über das bloße Vergleichen von Modellen hinaus, da eine eigenständige Bewertung erfolgen muss.

Unterrichtliche Voraussetzungen: Den Schülerinnen und Schülern sollten grundlegende wirtschaftswissenschaftliche Begriffe (variable Kosten und Fixkosten, Gewinn, Erlös, Grenzkosten etc.) bekannt sein. Sie können geeignete Verfahren zur Lösung von Gleichungen und Gleichungssystemen auswählen und anwenden. Das Aufstellen einer ganzrationalen Funktion dritten Grades aus gegebenen Werten sowie grundlegende Verfahren zur Extremwertbestimmung – auch mit den Extremwerten an den Rändern – werden vorausgesetzt. Ferner sollten die Schülerinnen und Schüler die Ergebnisse in Bezug auf die Realsituation überprüfen und interpretieren können. Ihnen muss der Unterschied zwischen einer diskreten Realsituation und einer stetigen Modellierung bewusst sein. Ein sichereres Verständnis des Integrals wird ebenso erwartet, wie die Approximation einer Fläche durch Rechtecksummen.

Aufgabe

Ein Zulieferbetrieb für die Automobilindustrie fertigt Bauteile. Dabei entstehen ihm pro Tag Fixkosten in Höhe von 78,00 €. Die täglichen variablen Kosten K_v sind von der Stückzahl *x* der an einem Tag produzierten Bauteile abhängig. In der Tabelle sind beispielhaft die variablen Kosten pro Tag für entsprechende Stückzahlen angegeben:

Stückzahl: $x =$	4	12	18
Variable Kosten: $K_v(x) =$	272,00 €	624,00 €	1476,00 €

Tabelle 5.4-1

a)

Bestimmen Sie auf der Grundlage dieser Angaben die ganzrationale Gesamtkostenfunktion *K* dritten Grades.

b)

Gegeben sind die Erlösfunktion E und die Gesamtkostenfunktion K durch: $E(x) = 85x$.

$$K(x) = \frac{1}{2}x(x^2 - 20x + 200) + 78$$

Berechnen Sie, in welchem Bereich sich die Anzahl der täglich verkauften Bauteile bewegen muss, damit der Betrieb einen Gewinn erzielt.

Berechnen Sie den größten Gewinn pro Tag, den das Unternehmen erzielen kann.

c)

Zeigen Sie, dass für alle Kostenfunktionen dritten Grades bei linearer Erlösfunktion der maximale Gewinn bei der Menge erzielt wird, bei der die Grenzkosten mit der Steigung der Erlösfunktion übereinstimmen.

Hinweis:

Als Grenzkostenfunktion wird die Ableitung der Kostenfunktion bezeichnet.

Beachten Sie, dass dieser Nachweis – aus Gründen der Vereinfachung – nicht für Stückzahlen, sondern für (kontinuierliche) Mengen erbracht werden soll.

d)

Die Gewinnfunktion ist gegeben durch:

$$G(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 10x^2 - 15x - 78$$

Nach einem Produktionsstillstand bei $x = 0$ wird die Produktion wieder hochgefahren. Aus technischen Gründen kann die Produktion pro Tag nur um jeweils ein Bauteil erhöht werden, bis die angestrebte Produktionsmenge von $x = 13$ Bauteilen pro Tag erreicht ist.

Bestimmen Sie die Anzahl der Bauteile, die während der ersten 13 Tage produziert werden.

Berechnen Sie mittels Integralrechnung eine Abschätzung für den durchschnittlichen Gewinn pro Bauteil während der ersten 13 Tage.

Hinweis:
Der Mittelwert $\overline{h}$ einer positiven Funktion h über einem Intervall $[0;b]$ kann durch die Höhe eines Rechtecks veranschaulicht werden. Dieses Rechteck hat denselben Inhalt wie die Fläche, die zwischen dem Graphen von h und der x-Achse eingeschlossen ist.

e)
Der tatsächliche mittlere Gewinn liegt bei 18,36 € pro Bauteil während der ersten 13 Tage. Der durch Integration ermittelte Wert weicht somit um mehr als 10 % vom tatsächlichen Wert ab.

Geben Sie ein dem Sachkontext angemessenes Rechenverfahren zur Berechnung des durchschnittlichen Gewinns pro Bauteil an und erläutern Sie, wodurch die Abweichung zum per Integral berechneten Wert zustande kommt. Illustrieren Sie Ihre Erläuterungen an Abbildung 5.4-1.

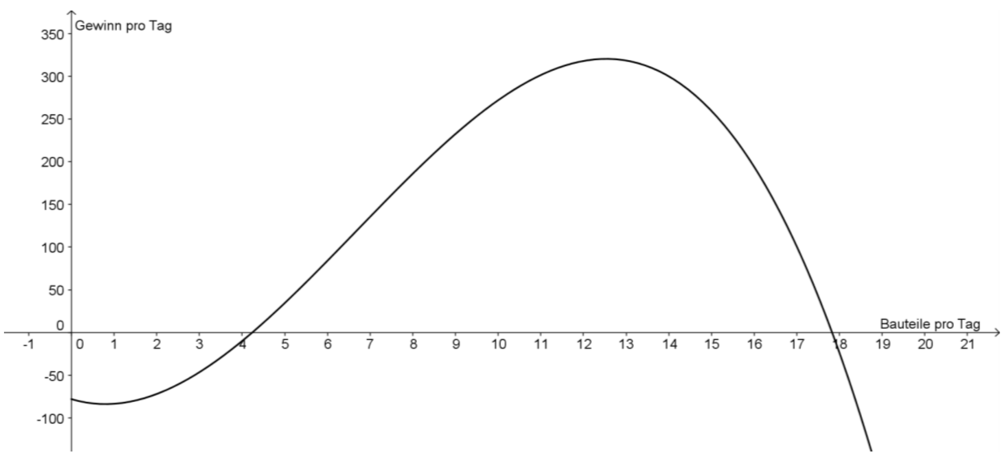


Abbildung 5.4-1

Nach der Aufgabe e) lässt sich die Aufgabe in verschiedene Richtungen weiterentwickeln und offener gestalten (hierfür sind keine Lösungen mehr angegeben, sondern es sollen nur Anregungen gegeben werden):

- *Welche Eigenschaft der Funktion* G *auf dem Intervall ist dafür verantwortlich, dass die Summation höhere Werte ergibt als das Integral? Wie wird sich die Differenz zwischen Summationswert und Integrationswert entwickeln, wenn das Intervall nach rechts erweitert wird?*
- *Wird bei der Summation und der Integration nicht durch die Gesamtzahl der produzierten Bauteile geteilt, so erhält man den Gesamtgewinn für den Zeitraum der ersten 13 Tage. Auch dieser liegt selbstverständlich bei der Summation höher als bei der Integration.*

- *Wenn nun ein größerer Zeitraum gewählt wird, beispielsweise die ersten 18 Tage, nähern sich die Werte aus Summation und Integration wieder an. Erklären Sie dieses Phänomen durch die Eigenschaften der Funktion* G.
- *Betrachtet wird nun die Differenz zwischen dem durch Summation ermittelten Wert für den Gewinn pro Bauteil und dem durch Integration berechneten. Tragen Sie diese Differenz für die jeweiligen Anzahlen an Bauteilen in eine Tabellenkalkulation ein. Lassen Sie sich die Werte anzeigen und begründen Sie den Verlauf der Werte mit Eigenschaften der Funktion* G.

Lösung

a)
Damit erhält man:

$K(0) = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 78 \Rightarrow d = 78$

$K(4) = a \cdot 4^3 + b \cdot 4^2 + c \cdot 4 + 78 = 350,00$

$K(12) = a \cdot 12^3 + b \cdot 12^2 + c \cdot 12 + 78 = 702,00$

$K(18) = a \cdot 18^3 + b \cdot 18^2 + c \cdot 18 + 78 = 1554,00$

Lösen des linearen Gleichungssystems ergibt: $a = 0,5$, $b = -10$, $c = 100$ und $d = 78$

Folglich lautet die Gesamtkostenfunktion $K(x) = \frac{1}{2}x^3 - 10x^2 + 100x + 78$.

b)
Gewinnbereich:

$G(x) = E(x) - K(x)$

$G(x) = 0$; $E(x) = K(x)$

$85x = \frac{1}{2}x^3 - 10x^2 + 100x + 78$

$x_1 \approx 4,24$: $G(4) = -10\,€$ und $G(5) = 34,50\,€$

$x_2 \approx 17,83$: $G(17) = 100,50\,€$ und $G(18) = -24\,€$

Die Gewinnschwelle liegt bei 5 Bauteilen, die Gewinngrenze bei 17 Bauteilen.

max. Gewinn:

$G(x) = E(x) - K(x)$

$G(x) = 85x - (\frac{1}{2}x^3 - 10x^2 + 100x + 78)$

$G(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 10x^2 - 15x - 78$

$G'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 20x - 15$

Notwendige Bedingung: $-\frac{3}{2}x^2 + 20x - 22 = 0$

$x_1 \approx 0,89$ liegt außerhalb des Gewinnbereichs. Daher: $x_2 \approx 12,54$

Hinreichende Bedingung:

Vorzeichenwechsel von „+“ nach „–“ damit Hochpunkt bei $x_2 \approx 12,54$

Überprüfung der nächsten ganzen Zahl:

$G(12) = 318\,€$

$G(13) = 318,50\,€$

Der maximale Gewinn wird mit einer Menge von 13 produzierten Bauteilen erzielt und beträgt 318,50 €.

c)

$G(x) = E(x) - K(x) = mx - K(x)$

$G'(x) = m - K'(x)$

Aus der Bedingung $G'(x) = 0$ folgt $m = K'(x)$ und damit die Behauptung.

d)

Die Anzahl der Bauteile, die während der ersten 13 Tage produziert wird:

$$\sum_{k=0}^{13} k = 91$$

$$\frac{1}{91}\int_0^{13} G(x)dx = \frac{1}{91}\left[\frac{-x^4}{8} + \frac{10x^3}{3} - \frac{15}{2}x^2 - 78x\right]_0^{13} \approx 16,17$$

Das Unternehmen erzielt einen durchschnittlichen Gewinn pro Bauteil von 16,17 €.

e)

Die Anzahl der produzierten Bauteile pro Tag ist ganzzahlig. Damit bleibt der Gewinn während eines Tages konstant. Dieser Sachverhalt wird durch die Rechteckflächen illustriert.

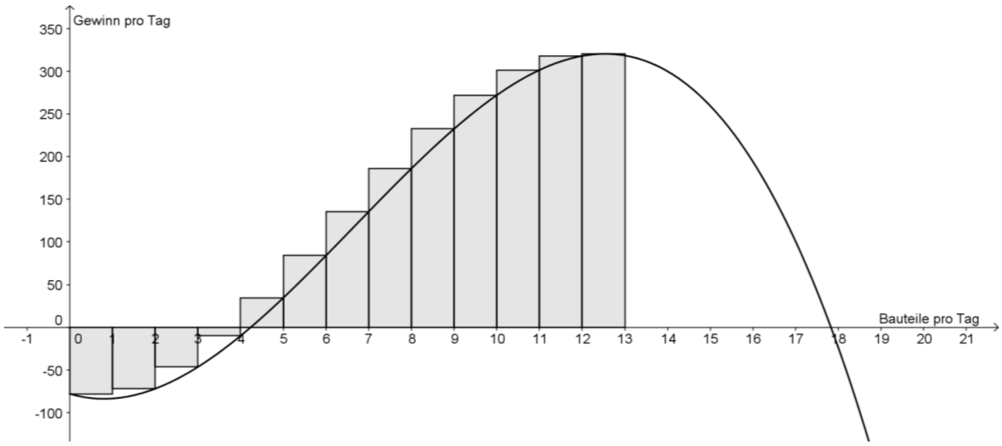


Abbildung 5.4-2

Der Fehler, der durch das Integral verursacht wird, ist die Differenz zwischen dem Flächeninhalt unter der Kurve und der Summe der Rechteckflächen. Konkret:

$$\frac{1}{91}\sum_{n=1}^{13} G(n) \approx 18,36$$