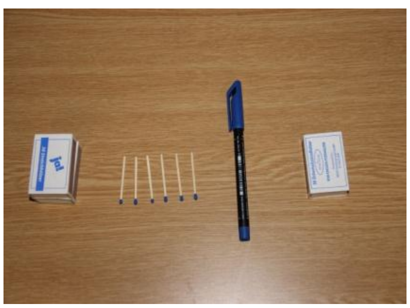
1. Wie lassen sich negative Zahlen mit Streichhölzern darstellen

Frieder Korn

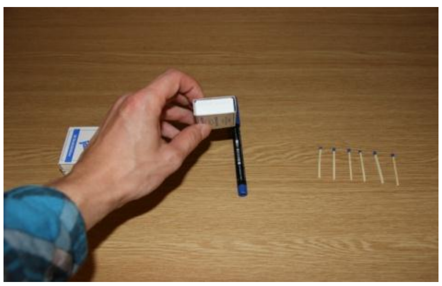
Konkrete Umsetzung

Als Beispiel sollen die Schüler eine Lösung der Gleichung $2x - 6 = x$ finden. Anschließend wird die Gleichung von einem weiteren Schüler, nach dem bereits bekannten Prinzip, gelöst.[1] Hier eine mögliche Lösung:

Gleichung	**Haptische Interpretation**	**Regieanweisung**
	$2x - 6 = -x$	
		Auf beiden Seiten werden sechs Streichhölzer hinzugefügt, in Zeichen: $+6$ Umgangssprachlich bringt man die sechs Streichhölzer auf die andere Seite

1

1 [1] *Vgl Martin Kramer: Kapitel 1.4. Haptisches Lösen (linearer) Gleichungen*

	$2x = \ -x + 6$	
		Auf beiden Seiten wird eine Streichholzschachtel hinzugefügt: $+x$ Umgangssprachlich bringt man die „x“ auf die andere Seite.
	$x = 2$	
	$L = \{2\}$	Schließlich wird die Lösungsmenge abgelesen.

Hintergründe

Ortscodierung

Um den Hölzern und Schachteln einen positiven oder negativen Wert zuordnen zu können, ist das Prinzip der Ortscodierung nötig. Wichtig ist zu Beginn festzulegen, welche Richtung Positivität und welche Richtung Negativität anzeigt. Dabei wird der Unterschied von positiven und negativen Zahlen durch die jeweilige Ausrichtung der Streichhölzer und Schachteln deutlich gemacht. Als Bezugssystem hierzu dient der Stift. Jene Hölzer deren Brennkopf in die Richtung des Stiftdeckels zeigen, sind positiv belegt. Zeigt der Brennkopf in die andere Richtung, handelt es sich um eine negative Zahl. Für die Streichholzschachtel gilt: Die Vorderseite symbolisiert einen positiven, die Rückseite einen negativen Wert.

Umdrehen der Streichhölzer

Beim „auf die andere Seite bringen" der Hölzer und Schachteln ist es wichtig, die Drehung hervorzuheben. Dabei entspricht das „auf die andere Seite bringen" dem addieren oder subtrahieren einer Zahl auf beiden Seiten der Gleichung. Die Drehung symbolisiert dabei den Vorzeichenwechsel, der vollzogen wird, wenn Schachteln bzw. Streichhölzer auf die andere Seite gebracht werden. So wird im obigen Beispiel der Schritt ersetzt, zunächst auf beiden Seiten sechs Streichhölzer zu addieren und anschließend die sich neutralisierenden Hölzer auf der linken Seite zu entfernen. Streichhölzer neutralisieren sich, wenn eine gleiche Anzahl an Hölzern mit Ausrichtung nach oben und nach unten auf derselben Seite des Stiftes zu finden ist.

Öffnen der Schachtel

Das Öffnen der Schachtel ist der letzte Moment beim Lösen der Gleichung. Es ist die Präsentation der Lösung. Daher ist es als Lehrer wichtig, darauf zu achten, dass sich die korrekte Anzahl an Streichhölzern in der Schachtel befindet und diese darüberhinaus die richtige Ausrichtung haben (sonst ist nicht ersichtlich, ob es sich um eine positive oder negative Zahl handelt). Ist dies nicht der Fall, bleibt der finale „Aha-Effekt“ aus.

Anhand der Schachtel kann der Lehrer verdeutlichen, dass am Ende kein negatives x mehr übrig bleiben sollte, denn wenn man die Schachtel im „Minusstadium“ öffnet, kann sie nicht entleert werden.

2. Erste Schritte zu unseren Zahlen

Frieder Korn

Vom Zählen über die Strichliste zur Zahl

Konkrete Umsetzung

Die Schüler bilden einen Kreis um das Lehrerpult. Dann verteilt der Lehrer fünf Streichhölzer auf dem Tisch. Die Schüler werden vom Lehrer nach der Anzahl der Hölzer gefragt.

Danach erhöht der Lehrer die Anzahl der Streichhölzer um zehn. Wieder wird die Klasse gefragt, wie viele Streichhölzer sich nun auf dem Tisch befinden und ob dies auf einen Blick zu erkennen ist.
Danach werden die Streichhölzer von dem Lehrer umsortiert. Er legt nun über jeweils vier Hölzer eines quer oder diagonal. Alternativ können die Hölzer zu

einem „V“ geformt werden. Nun stellt der Lehrer die Frage nach der besten Übersichtlichkeit der Beispiele.

Hintergründe

Warum werden fünf Hölzer zusammengefasst?

Es ist wichtig, dass der Lehrer zu Beginn der Einheit nicht mehr als sechs Hölzer wählt. Zahlen bis zur Größenordnung vier kann der Mensch erfassen, ab fünf fangen die meisten Menschen an zu zählen. Um größere Mengen oder Zahlen auf Anhieb erkennen zu können, hilft die Einführung von Symbolen.

Ortskodierung bei römischen Zahlen

Jedem Symbol wird eine spezifische Bedeutung zugeordnet. Dadurch wird ein besserer Überblick geschaffen. Dies entspricht dem Prinzip der Ortskodierung.

Die römischen Zahlen erhalten durch Ortskodierung eine weitere Struktur. Rechts und links wird unterschieden: $IV \neq VI$.

Erweiterung:

„Null ist nicht Nichts“ - Ortscodierung bei unseren Zahlen

Unser Zahlensystem zeichnet sich durch eine noch feinere Ortscodierung als bei den obigen Symbolen aus. Ohne Ortscodierung könnten Zahlen wie 21 und 12 nicht unterschieden werden. In diesem Zusammenhang spielt vor allem die Null eine bedeutende Rolle. Erst durch die Null lassen sich alle Zahlen mit Hilfe von nur zehn Symbolen eindeutig darstellen. Sie macht es möglich, einen Unterschied zwischen den Zahlen 101 und 1001 zu machen. Einer leeren Stelle einen Namen zu geben, fordert ein hohes Maß an Abstraktionsfähigkeit.

Exponentielles Wachstum als großer Vorteil

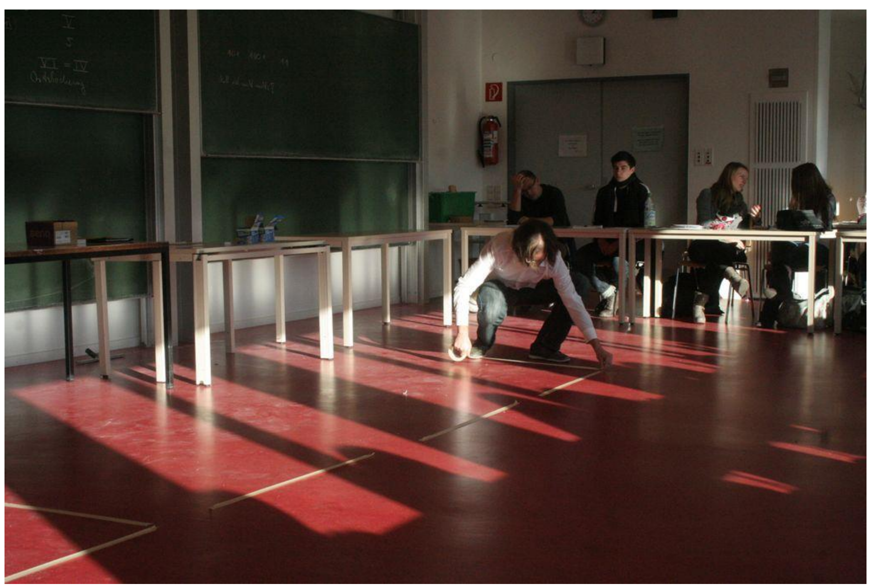
Unser Zahlensystem beruht auf exponentiellem Wachstum. Jede beliebige Zahl lässt sich als Potenz darstellen. Dadurch lassen sich große Zahlen überhaupt darstellen.

3. Unser Zahlensystem erleben

3.1 Die Einführung des Fünfersystems

Kai Hoffmann

Die Schüler und Schülerinnen erfahren unser Zahlensystem am Beispiel des Fünfersystems körperlich. Dabei wird auch auf die Problematik des Übertrags eingegangen.



Konkrete Umsetzung

Die Schüler stellen sich im Kreis vor der Tafel auf. Der Lehrer markiert vier gleichgroße Quadrate hintereinander mit Klebeband auf den Boden. Sie symbolisieren die ersten vier Stellen des Fünfersystems (vgl. Bild). Vier freiwillige Schüler stellen sich nacheinander in das aus ihrer Sicht rechte Feld, das mit der Potenz 5^0 belegt ist und halten einen Daumen nach oben. Der Lehrer zählt dabei laut mit: Eins, Zwei, Drei, Vier. Ein fünfter Schüler kommt mit erhobenem Daumen hinzu.

Die vier Schüler mit erhobenem Daumen repräsentieren die Zahl Vier im Fünfersystem. Kommt ein weiterer Schüler mit erhobenem Daumen dazu, streicht er die Finger der anderen Schüler im Feld ab und hält nun die ganze Hand in die Höhe. Die anderen Schüler müssen das Feld dabei verlassen, da es die Ziffer fünf im Fünfer-System nicht gibt. Springt er ins nächste Feld, sollten die Schüler erkennen, dass wieder nur ein Finger in die Höhe gehalten werden darf, denn auf dieser Stelle ist ein Finger das Fünffache Wert. Ein Sprung von einem Feld ins nächste entspricht somit jeweils der Erhöhung des Exponenten der Fünferpotenz um eins.

Hintergründe

Warum andere Zahlensysteme?

Das Fünfersystem wurde hier stellvertretend für jedes andere, gleichwertige Ziffernsystem gewählt. Das Hauptaugenmerk dieser Aufgabe liegt darauf, dass sich die Schüler mit einem Ziffernsystem auseinandersetzen, das ihnen nicht seit Beginn ihres Schullebens bekannt ist. Ziel ist es, durch das Erlernen weiterer Systeme das bekannte Zehnersystem besser verstehen zu können.

3.2 Die Zahl 2012 im Fünfersystem darstellen

Felicia Zeiser

Konkrete Umsetzung

Die Zahl 2012 soll von den Schülern im Fünfersystem dargestellt werden. Der Lehrer nutzt dazu die vier aufgeklebten Quadrate aus der vorhergehenden Übung. Die Felder symbolisieren die Potenzen 5^0, 5^1, 5^2, 5^3. Dann teilt er die Klasse in zwei Hälften. Der einen Hälfte erteilt der Lehrer die Aufgabe, die Zahl 2012 im Fünfersystem darzustellen. Dazu verteilen sich die Schüler in ausreichender Anzahl in die Felder. Die andere Hälfte der Klasse fungiert als Kontrollgruppe und erhält die Anweisung, zu klatschen, sobald ein korrektes Ergebnis gefunden wurde. Anschließend wechselt die Aufgabenverteilung. Der Lehrer zeichnet während der Übung zusätzlich vier Quadrate an die Tafel, mit Hilfe derer er den aktuellen Ergebnisstand festhält.

Hintergründe

Transferfähigkeit der Gruppen

Die Schüler müssen fähig sein, die Zahl 2012 vom Zehnersystem ins Fünfersystem zu transferieren. Um die Zahl auf die oben erklärte Weise darzustellen, ist es nötig, dass die Schüler erkennen, dass ein fünftes Feld von Nöten ist. Dieses Feld symbolisiert die Potenz 5^4. Erst mit diesem Schritt zeigt sich, ob die Schüler das Prinzip des Fünfersystems tatsächlich verstanden haben.

Diese Transferfähigkeit muss in der Übung in gleichem Maße von der Kontrollgruppe erbracht werden. Auch sie muss das zu Grunde liegende Prinzip verstanden haben, um dem Lösungsprozess folgen zu können. Andernfalls wäre es für die passive Gruppe nicht möglich, zu erkennen, wann die Aufgabe richtig gelöst ist.

Nonverbale Kommunikation

In dieser Übung zeigt sich eine neue Möglichkeit nonverbaler Kommunikation. Um Zustimmung zu einer Lösung zu bekunden, sind die Schüler aufgefordert zu klatschen. Das Klatschen begrenz die Übung zeitlich, gleichzeitig ist Klatschen für Schüler positiv belegt und daher ein gute Möglichkeit der Bestätigung. Die Übung wird in Stille durchgeführt. Wenn geredet wird, wird die Übungsdurchführung der Gruppe direkt unterbrochen und die nächste Gruppe ist an der Reihe. So kann eine ruhige Lernumgebung geschaffen werden.

Gesetz der Gleichzeitigkeit

Dinge, die sich gemeinsam/gleichzeitig verändern, werden als zusammengehörig empfunden. Der Lehrer zeichnet als Unterstützung für die Schüler den Übungsaufbau an die Tafel. Stellt sich ein neuer Schüler in eines der Felder, überträgt der Lehrer gleichzeitig den neuen „Ergebnisstand“ auf den symbolischen Übungsaufbau an der Tafel. Auf diese Art und Weise können handelnde und symbolische Ebene verbunden werden und damit der Lernprozess der Schüler unterstützt werden.

Gesetz der Ähnlichkeit

Das Gesetz der Ähnlichkeit gehört zu den Gesetzen der Gestaltpsychologie. Es besagt, dass Dinge, die ähnlich sind, vom Menschen als zusammengehörig wahrgenommen werden. In dieser Übung spielt es vor allem beim Tafelbild des Lehrers eine große Rolle. Damit Tafelbild und Übungsaufbau als zusammengehörig wahrgenommen werden, muss das Tafelbild, in Ausrichtung, Abfolge und Benennung, mit dem tatsächlichen Übungsaufbau übereinstimmen. Ist das rechte Feld mit der Potenz 5^0 belegt, muss das ebenso für das rechte Feld des Tafelbildes gelten.

Die Rolle des Lehrers

Der Lehrer hält sich während des gesamten Lösungsprozesses zurück. Er fungiert in erster Linie als „Schiedsrichter“ und legt nur die Struktur des gesamten Lernprozesses fest. Er ist dafür verantwortlich, eine bestmögliche Lernumgebung zu schaffen.

3.3 Addition und Übertrag im Fünfersystem

Miriam Laug

Die folgende Übung soll die Addition und den Übertrag im Fünfersystem einführen. Den Schülern wird eine offene Aufgabe gestellt, die es ihnen ermöglicht das Konzept der Addition enaktiv zu erfahren.

Konkrete Umsetzung

Zu Beginn der Übung schreibt der Lehrer eine Rechenaufgabe im Fünfersystem an
die Tafel, die mindestens einen Übertrag beinhaltet. Er fordert die Schüler dazu auf,
diese Aufgabe zu lösen.

Dafür stellen sich rechts neben die aufgeklebten Felder ausreichend Schüler, um die
erste Zahl zu repräsentieren, links neben die Felder ausreichend Schüler für die zweite Zahl (Die Wertebelegung der Felder aus Übung 3.2 bleibt bestehen). Eine der beiden zu addierenden Zahlen wird dabei durch Mädchen, die andere durch Jungen repräsentiert.

Hintergründe

Zurückhaltung des Lehrers
Bei dieser Aufgabe ist es wichtig, nicht in den Lösungsprozess der Gruppe einzugreifen. Die Schüler sollten selbst erkennen, dass es am sinnvollsten ist, die
Rechnung von hinten, also von der letzten Ziffer aus, zu beginnen. Dabei sollte Hilfestellung nur bei größeren Schwierigkeiten der Klasse erfolgen. Da den meisten Lehrern diese Zurückhaltung sehr schwer fällt, sollte der Lehrer sich zuvor bewusst machen, dass es für den Lernprozess der Schüler wichtig ist, dass er die Fehler der Schüler auch aushalten kann ohne einzugreifen.

Die Addition als Transferaufgabe
Um eine Addition im Fünfersystem durchführen zu können, müssen sich die Schüler
bewusst werden, dass bei einem Wert von fünf ein Übertrag stattfinden muss. Der
fünfte Schüler der ein Feld betritt, muss ein Feld weiter springen, die anderen vier
Schüler verlassen das Feld ganz. Dieser Sprung symbolisiert den Übertrag. Die Addition fordert daher ein umfangreiches Verständnis des Fünfersystems. Die Schüler lernen den systematischen Aufbau des Fünfer- und dadurch auch des Zehnersystems kennen.

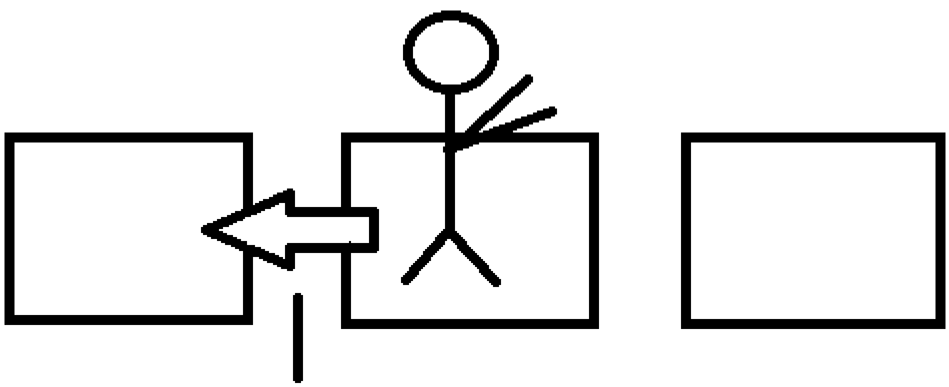
3.4 Die Darstellung von Kommazahlen

Felicia Zeiser

In der folgenden Übung wird der Zahlenbereich auf Nachkommastellen erweitert.

Konkrete Umsetzung

Ein Schüler stellt sich in das rechte Feld. Simultan schreibt der Lehrer die Potenz 5^0 an die Tafel. Nun lässt er den Schüler rückwärts in das Feld links daneben springen. Beim Rückwärtsspringen erniedrigt der Lehrer den Exponenten der Potenz um eins, sodass die Hochzahl negativ wird: $5^0 \rightarrow 5^{-1}$. Das Komma zwischen beiden Feldern wird durch Kreppband markiert.



Hintergründe

Transferfähigkeit

Die Schüler sollten erkennen, dass aus dem Erhöhen des Exponenten um eins beim Vorwärtsspringen in ein Feld nach links, das Erniedrigen des Exponenten um eins beim Rückwärtsspringen in das vorherige Feld folgt. Springt der Schüler nun vom Feld links neben dem Komma rückwärts in das Feld rechts neben dem

Komma, sollte der Klasse klar werden, dass auch hier der Exponent um eins verringert wird: $5^0 \rightarrow 5^{-1}$.

3.4.1 Kommazahlen mit den Fingern darstellen

Felicia Zeiser

Konkrete Umsetzung

Die Schüler sollen die Zahl 1,4 im Fünfersystem angeben. Dabei sollen mit den Fingern der linken Hand die Zahl vor dem Komma dargestellt werden, mit den Fingern der rechten Hand die Nachkommastellen. Wer ein Ergebnis gefunden hat, soll seine Arme verschränken. Nach einer Bedenkzeit soll das Ergebnis mit den Fingern angezeigt werden.

Hintergründe

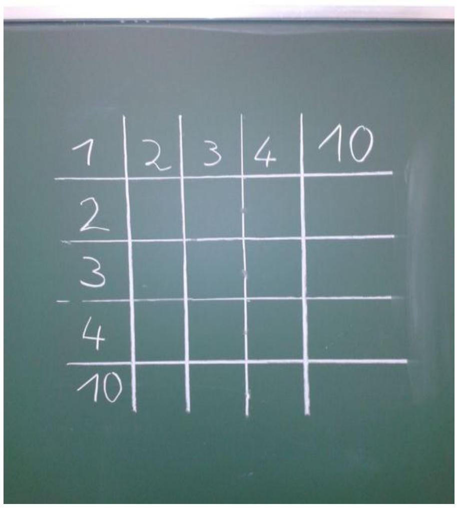
Nonverbale Kommunikation

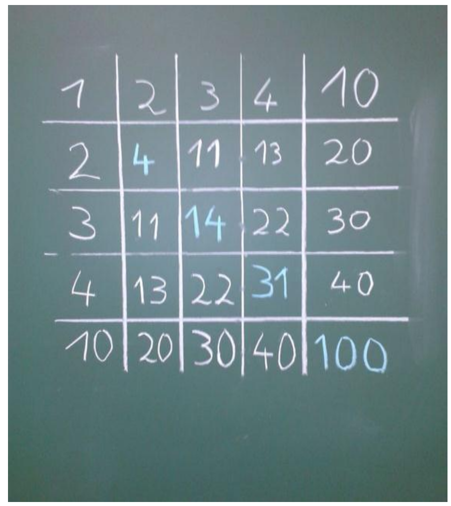
In dieser Übung zeigen sich zwei Möglichkeiten nonverbaler Kommunikation. Zum einen können durch das Anzeigen der Kommazahl mit den Fingern nonverbal Mengen kommuniziert werden, zum Anderen kann über das Armeverschränken eine große Gruppe nonverbal abgefragt werden. (Siehe dazu auch Kapitel 1.3 Ausarbeitung Kalenderwoche 43)

3.5 Das Kleine Einmaleins im Fünfersystem

Miriam Laug
Kai Hoffmann
Felicia Zeiser

Konkrete Umsetzung





Den Schülern wird die Aufgabe gestellt, das kleine Einmaleins im Fünfersystem zu lösen. Zur Unterstützung und als Denkanstoß zeichnet der Lehrer eine Tabelle an die Tafel. Nun lässt der Lehrer den Schülern ca. fünf Minuten Zeit, sich mit der Aufgabe auseinanderzusetzen. Anschließend werden die Ergebnisse gemeinsam besprochen und in die Tabelle eingetragen.

Hintergründe

Das kleine Einmaleins kann nicht logisch erschlossen werden

Es ist nicht möglich sich $5 \cdot 7$ herzuleiten, außer über den umständlichen Weg der Addition. Daher muss das kleine Einmaleins auswendig gelernt werden. Das

Auswendiglernen wird aber durch den symmetrischen Aufbau des 1x1 stark vereinfach. Durch die Symmetrie fällt die Hälfte der zu lernenden Produkte weg.

Sich Problemen der Schüler bewusst werden

Es gibt keinen mathematischen Grund dafür, dass das Fünfersystem schwerer zu erlernen ist, als das Zehnersystem. Hat der Lehrer bei bestimmten Operationen im Fünfersystem Probleme, werden die Schüler die gleichen Probleme vermutlich im Zehnersystem haben. Dieser Probleme muss sich der Lehrer bewusst werden, um mit den Schwierigkeiten der Schüler umgehen zu können und diesen entgegen zu wirken.