1.1. Zahlenverständnis – kritische Vorbemerkung

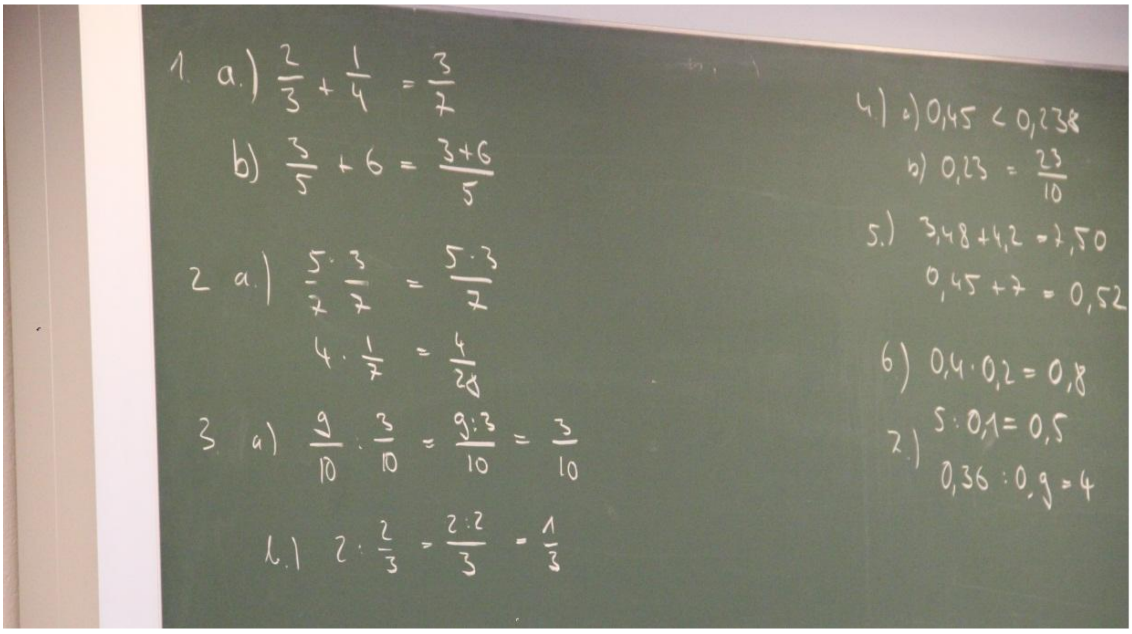
Rafael Prospero

„Der wahrscheinlich größte Fehler des traditionellen Mathematikunterrichts besteht darin, dass zu schnell auf eine formal-regelhafte Ebene aufgestiegen wird, bevor noch ausreichende intuitive und anschauliche Vorstellungen vom jeweiligen Stoff erworben wurden. Diesen Fehler kann man an fast allen Stoffgebieten der Schulmathematik beobachten. Die Bruchrechnung ist aber ein besonders geeignetes Studienobjekt.“[1]

Dieses Zitat von G. Malle bringt ein entscheidendes Problem des Mathematikunterrichts auf den Punkt. Den Schülern fehlt es oft an mathematischem Grundverständnis, weil sie zu schnell vom Lernstoff auf die symbolische Ebene hinübergeleitet werden. Dieser schnelle Übergang zu Rechenregeln und zu Formalem beeinträchtigt den elementaren Entwicklungsprozess der Veranschaulichung, Intuition und der mathematischen Motivation. Der Schüler muss sich auf Algorithmen und Schreibweisen konzentrieren und verliert den so wesentlichen Blick auf den praktischen Hintergrund, da dieser ungenügend eingehend geschult wurde. Dieses Manko wirkt sich folgenschwer auf das Verständnis und auf die mathematische Intuition der Schüler aus.

1.2. Typische Fehler beim Bruchrechnen

Wie von G. Malle oben erwähnt ist beim Thema „Bruchrechnung“ das angesprochene Problem sehr gut erkennbar. Einige Beispiele typischer Fehler beim Umgang mit Brüchen und Zahlen mit Nachkommastellen zeigen das fehlende Grundverständnis der Schüler.



[1] Malle, Günther (2004):“Grundvorstellung zu Bruchzahlen“ In: Mathematik lehren 123, S. 4

Um dieses Problem anzupacken, gilt es sowohl die Methoden zur Veranschaulichung als auch den notwendigen alltagstauglichen Bezug zur Praxis konsequent zu konstruieren. Diese Methoden sollen sich nicht nur für den Bruchbegriff selbst, sondern auch für den damit verbundenen Kalkül gedacht sein. Im Folgenden werden nützliche Methoden vorgestellt.

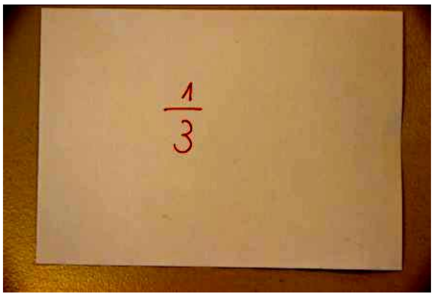
1.3. Bruch als Anteil

Christian Schweizer, Clarissa Sieber

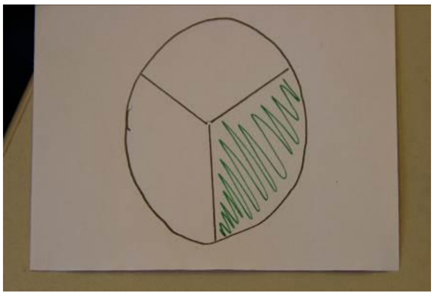
Die folgende Abfragetechnik „Magnetpol“ soll das Verständnis und die Vorstellung von Brüchen fördern

Konkrete Umsetzung

Jeder Schüler beschriftet zwei Zettel. Auf den einen schreibt er in rot die symbolische Darstellung eines Bruches seiner Wahl, auf den anderen in grün eine zugehörige bildliche Darstellung.



Die Zettel aller Schüler werden nun eingesammelt, gemischt und neu ausgeteilt, sodass jeder einen rot und einen grün beschrifteten Zettel erhält. Nun ist es die Aufgabe der Schüler, den jeweiligen Partner, d.h. die bildliche Darstellung zur symbolischen und umgekehrt zu finden. Wenn der Partner gefunden wurde, sollen sie sich nebeneinander aufstellen und an die Hand nehmen. So bilden sich Kreise aus Schülern. Das Ende des Spiels ist erreicht, wenn jeder seine zugehörigen Partner gefunden hat.



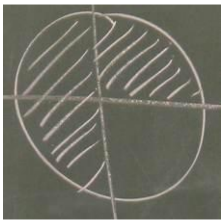
Hintergrund

Unterschiedliche Formen eines Anteils

Durch diese Übungsform entstehen unterschiedliche Darstellungsmöglichkeiten für Brüche. Hierbei spielt die mengenhafte Vorstellung des Einzelnen eine entscheidende Rolle. Aufgrund seiner Erfahrung stellt er den Bruch auf eine bestimmte Weise dar. Dabei lassen sich grob zwei Schemata unterscheiden:

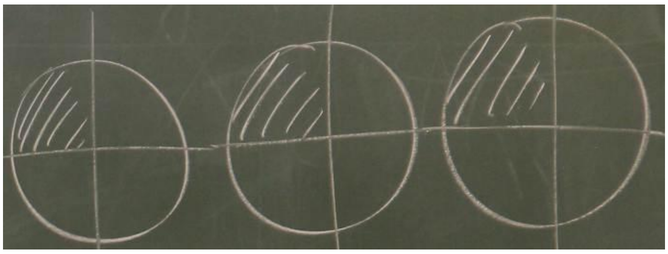
Bruch als Teil eines Ganzen

Zum einen kann man den Bruch als Aufteilung eines Ganzen verstehen. So gibt der Zähler die Anzahl der Anteile und der Nenner die Gesamtzahl der Teile an.

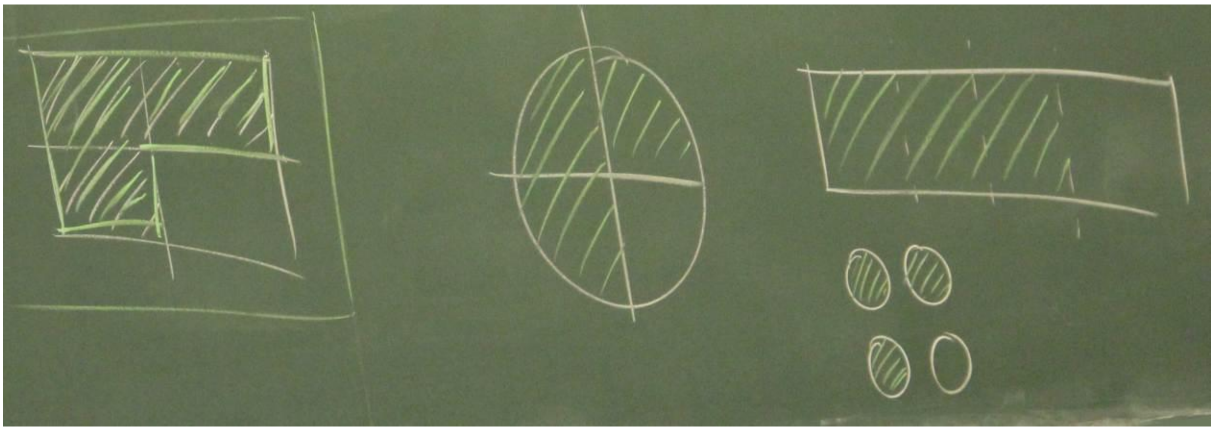


Bruch als Teil mehrerer Ganzer

Zum anderen kann man sich mehrere Ganze vorstellen von denen jeweils nur ein gleicher Teil markiert ist. Diese Teile werden nun im Bruch aufsummiert. Der Zähler gibt hier die Anzahl der Ganzen an, der Nenner die Unterteilung.



Besonders interessant wird es dann, wenn sich zwei Schüler den gleichen Bruch ausgesucht haben und unterschiedliche ikonische Darstellungen benutzen. Hier lernen die Schüler von Altersgenossen eine andere Vorstellungsweise kennen.



Fragestellung in beide Richtungen

Durch das Suchen eines Partners, sowohl für die ikonische als auch symbolische Darstellung, muss der Schüler seinen Bruch in die entsprechende andere Darstellungsform umformen. So wird in beide Richtung abgefragt.

1.4. Kürzen und Erweitern von Brüchen

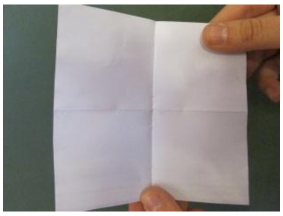
Melina Kreutz

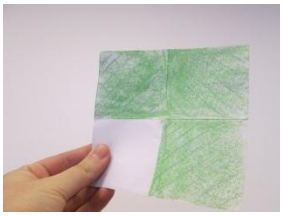
$\frac{1}{2}, \frac{2}{6}$ $und \frac{3}{9}$ sehen völlig verschieden aus und bezeichnen dennoch dasselbe. Im Folgenden soll ein Weg beschrieben werden, der den Schülern einen anschaulichen Zugang zum Kürzen und Erweitern von Brüchen eröffnen soll.

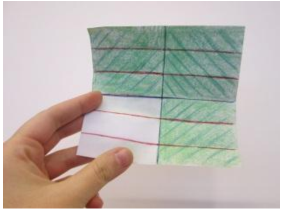
Konkrete Umsetzung

Blätter falten

Alle Schülerinnen und Schüler je ein kleines weißes Blatt Papier. Soll beispielsweise der Bruch $\frac{3}{4}$ dargestellt werden, so muss das Blatt durch Falten in vier gleichgroße Rechtecke geteilt werden. Nun werden drei der erhaltenen Flächen in der Lieblingsfarbe des Schülers eingefärbt. Die Anzahl der eingefärbten Kästchen entspricht dem „Zähler“, die Gesamtzahl an Kästchen dem „Nenner“. Nun können die Schüler erleben, wie sich durch weiter falten, also schaffen kleinerer Flächen, sowohl der Nenner, als auch der Zähler erweitern. Natürlich ist hier als Beispiel nicht nur $\frac{3}{4}$ möglich. Den Kindern sind im Grunde keine Grenzen gesetzt.

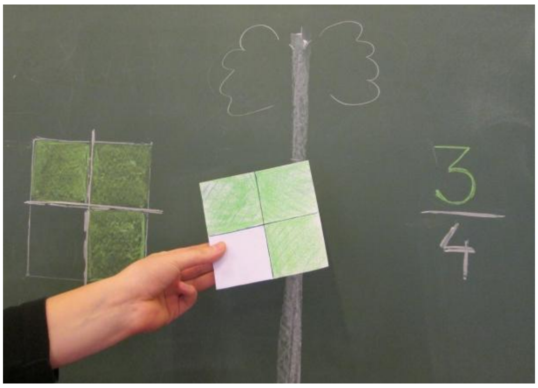




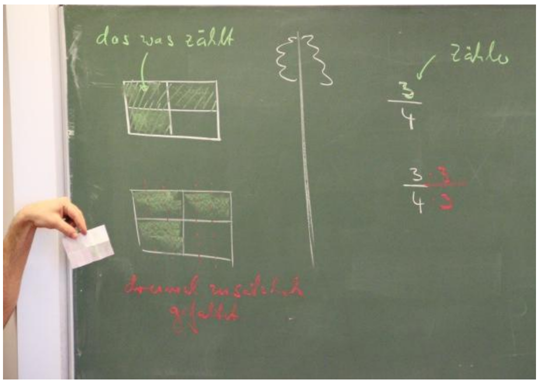


Nachbereitung

Als langsame Übertragung sollte die Übung an der Tafel nachgearbeitet werden. Dazu wählt man ein Beispiel der Kinder und arbeitet auch mit deren Farben. Parallel zum Falten werden erst die Anfangsfalten an der Tafel skizziert und der zählende Bereich in der entsprechenden Farbe schraffiert. Gleichzeitig schreibt man in Form einer Gegenüberstellung den Anfangsbruch neben die Skizze.



Der Zähler in der entsprechenden Farbe und der Nenner in weiß. Mit einer auffallenden Farbe können nun gestrichelt die zusätzlichen Falten in einer weiteren Skizze eingezeichnet werden. Die Farbe, die die zusätzlichen Falten in der Skizze darstellt, beschreibt die Erweiterung des Bruchs in der Gegenüberstellung.



Ein Bruch hat unendlich viel Repräsentanten

Um zu erfahren, dass ein Bruch unendlich viele Repräsentanten hat, darf jeder Schüler einen Bruch, den der Lehrer an die Tafel schreibt (z.B. $\frac{3}{4}$), beliebig erweitern oder kürzen. Die Kreide wird zum Redestab, indem sie weitergegeben wird. Diese Übung kann man einige Minuten so fortführen, so dass sich möglichst viele Schüler trauen.

Hausaufgabe

Jeder Schüler soll über circa eine halbe Seite eine beliebige Bruchzahl unterschiedlich darstellen.

Hintergründe

Emotionales Lernen

Weil alle Schüler ein eigenes Blatt erhalten, können sie selbst erleben, wie sich das Falten auf Zähler und Nenner auswirkt. Indem man den Kindern möglichst viel Freiheit lässt bezüglich der Größe von Zähler und Nenner, wird zusätzlich die allgemeine Gültigkeit deutlich. Die Wahl der Lieblingsfarbe ist wichtig, denn so baut sich für die Schüler eine Emotionale Ebene auf. Sie können besser den Zusammenhang zwischen „Zähler“ und der Lieblingsfarbe, die „zählt“, begreifen.

Farbkodierung

Dies ist auch eine Form von Farbkodierung, die man in die ikonisch und die symbolische Ebene an der Tafel einfließen lassen kann. Nach dem Gesetz der Ähnlichkeit erleichtert man den Schülern die Verknüpfung von symbolischer, ikonischer und enaktiver Ebene. Dieser Prozess wird durch die Gleichzeitigkeit in der Nachbereitung noch bestärkt.

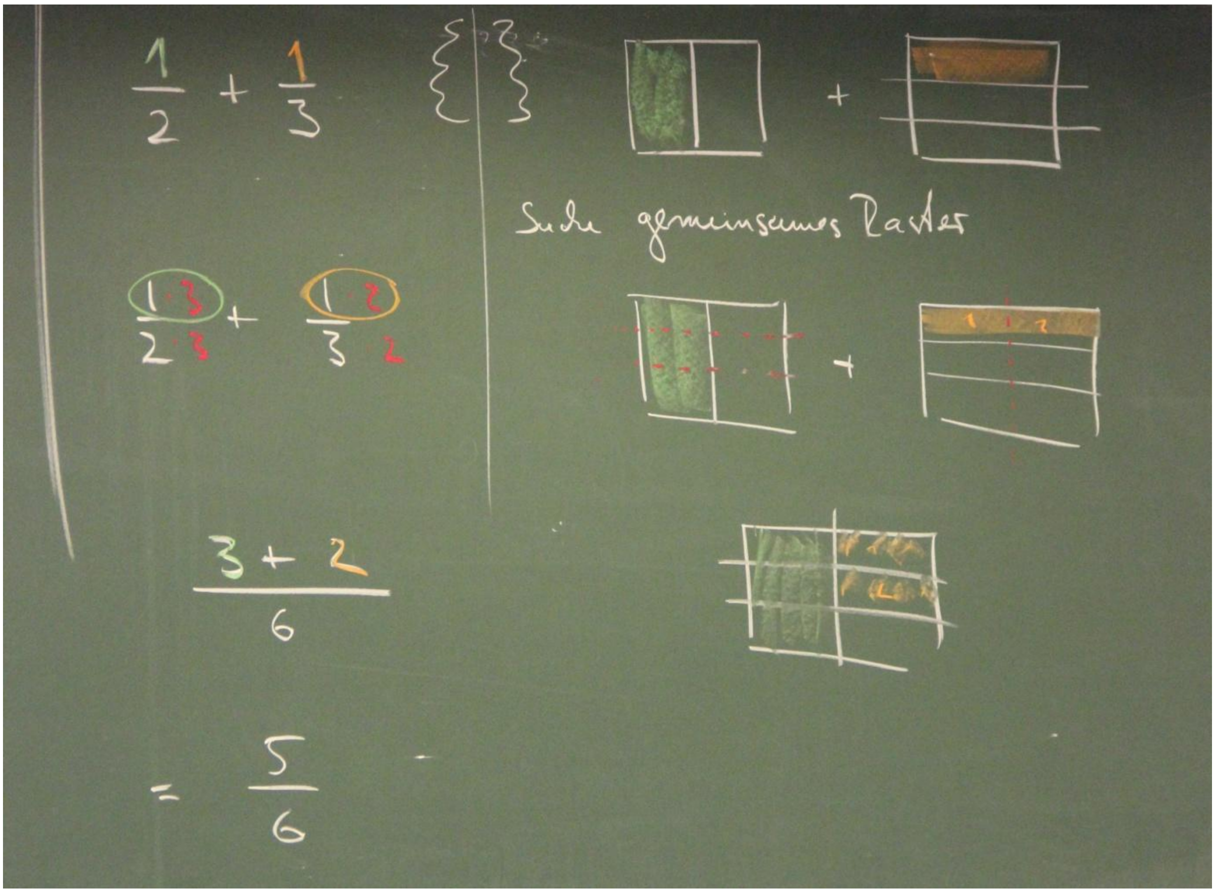
1.5. Addition von Brüchen

Pascal Schade, Juliane Wilms,
Esther Renz, Lara Rößler

Bruchrechnen wird enaktiv eingeführt. Dazu werden $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ addiert.

Konkrete Umsetzung

Jeder Schüler erhält zwei rechteckige Papierzettel. Diese sollen sie nun gemäß der zwei zu addierenden Brüche falten. Die jeweiligen Anteile werden mit unterschiedlichen Farben ausgemalt. Der Lehrer übernimmt dabei die Schritte, welche die Schüler mit den Zetteln machen, bildlich und mathematisch formal an die Tafel.



Im nächsten Schritt wird der eine Zettel mit der gleichen Faltung wie der jeweils andere versehen, so dass nun beide die gleiche Einteilung haben, jedoch mit den unterschiedlich eingefärbten Anteilen. Jetzt werden auf einem der beiden Zettel, zusätzlich zu den bereits ausgemalten Kästchen, die Anzahl der Kästchen des anderen Zettels ausgemalt wobei die Farbcodierung beibehalten werden soll. So erhalten wir das Ergebnis der Addition der beiden Bruchzahlen in Form eines neuen Anteils (ausgemalte Kästchen / Gesamtzahl der Kästchen), indem wir als erstes die Brüche gleichnamig gemacht und anschließend addiert haben.

Hintergründe

Wechselspiel zwischen den Ebenen

So selbstverständlich diese Aufgabe für einen erwachsenen Menschen erscheinen mag, ist sie in Wirklichkeit nicht. Für Kinder ist es schwer zu verstehen, warum wir den „Umweg" über die Brucherweiterung gehen müssen. Daher ist es nötig, die Aufgabe Schritt für Schritt abzuarbeiten, damit die Schüler verstehen, was bei jedem einzelnen davon passiert. Wichtig hierfür ist das Wechselspiel zwischen der enaktiven, ikonischen und symbolischen Ebene. Dies ermöglicht dem Schüler, das Prinzip auch zu verstehen und nicht nur ein "Kochrezept" auswendig zu lernen. Für diese Prozedur sollte genug Zeit zum Üben und Verstehen eingeplant werden.

1.6. Neidfreies Teilen

Pascal Schade, Juliane Wilms,

Esther Renz, Lara Rößler

Bei dieser Übung geht es darum, eine Menge so aufzuteilen, dass es hinterher keinen Streit gibt.

Konkrete Umsetzung

Vorübung

Alle Schüler versammeln sich um einen Tisch. Zwei Freiwillige dürfen am Tisch Platz nehmen. Die beiden Schüler sind nun zwei Räuber, die ihre Beute - verschiedene Süßigkeiten oder Ähnliches - gerecht aufteilen wollen. Die Beute sollte extra so gewählt sein, dass sie nicht einfach zu halbieren ist. Die Räuber sind jedoch mittlerweile verfeindet und keiner gönnt dem anderen mehr als sich selbst. Diese Hintergrundinformation sollte den Schülern klar gemacht werden. Jetzt stellen sie die Frage: Wie kann neidfrei aufgeteilt werden?

Auflösung

Eine Möglichkeit neidfrei zu halbieren ist die folgende:
Eine Person darf teilen, so wie es ihr als fair erscheint. Der Andere darf sich eines der beiden Teile aussuchen. So sind beide zufrieden, da sie gleichermaßen an der Entscheidung beteiligt waren.

Aufgabenstellung

Bei drei Personen bietet sich das Selfridge-Conway-Prinzip an:
A macht drei seiner Meinung nach gleich große Haufen. B kann nun, wenn er einen Haufen für zu groß hält, diesen entsprechend kürzen und die Reste beiseitelegen, oder passen. Danach darf zuerst C, dann B und zuletzt A sich einen Haufen nehmen, wobei B den beschnittenen Haufen nehmen muss, sofern ihn C nicht bereits genommen hat.
Bis auf mögliche Reste ist die Beute jetzt gleichmäßig verteilt. Derjenige von B und C, der das nicht-beschnittene Stück genommen hat, muss nun den Rest erneut in drei Haufen aufteilen. Anschließend nimmt sich zuerst derjenige von B und C, der den Rest nicht aufteilen musste, dann A und der verbleibende bekommt das Reststück was noch übrig blieb.
So erhält nach dem jeweiligen subjektiven Empfinden der drei Probanden jeder seinen gerechten Anteil der Beute.

Hintergründe

Verschiedene Wirklichkeitsauffassungen – Pädagogische Dimension der Mathematik

Klar sollte den Schülern bei dieser Übung werden, dass jeder Mensch eine andere Wirklichkeitsauffassung hat. Was dem Schüler A möglicherweise als fair erscheint, kann für den Schüler B total unfair sein.
Ziel ist es also, den Schülern Möglichkeiten für neidfreies Teilen aufzuzeigen, denn damit kann man im alltäglichen Leben vielleicht so manchen Streit vermeiden. Ein typisches Beispiel hierfür ist eine Erbschaft. Keiner der Erben möchte weniger als der andere haben. Daraus kann sich schnell ein großer Familienstreit entwickeln. Mit der Möglichkeit des neidfreien Teilens könnte man dies verhindern. Deshalb kann diese Übung auch als eine Form der Gewaltprävention angesehen werden, da sie zeigt, wie Unstimmigkeiten friedlich gelöst werden können.

1.7. Auditorium

Esther Renz, Lara Rößler,
Pascal Schade, Juliane Wilms

Dies ist eine Methode mit der Schüler ihre selbstangefertigten Texte vor der Klasse vortragen können.

Konkrete Umsetzung

Es wird ein Vortragsraum errichtet, in dem die Schüler das Präsentieren üben können. Ein Tisch dient hierbei als Bühne, ein Stuhl als Treppe dorthin. Mit einem Tageslichtprojektor kann ein Scheinwerferlicht auf die Wand hinter der Bühne gerichtet werden. Jeweils ein Schüler kann nun freiwillig über den Stuhl die Bühne betreten und seinen Text vortragen. Die anderen Schüler versammeln sich sitzend oder stehend vor dem Tisch.

Bemerkung:

Das Konzept ist nicht themengebunden, d.h. der Inhalt der Kurzvorträge bleibt variabel. Es können also sowohl Ergebnisse derselben Schulstunde, als auch in der Vergangenheit, zum Beispiel als Hausaufgabe verfasste Texte, vorgetragen werden.

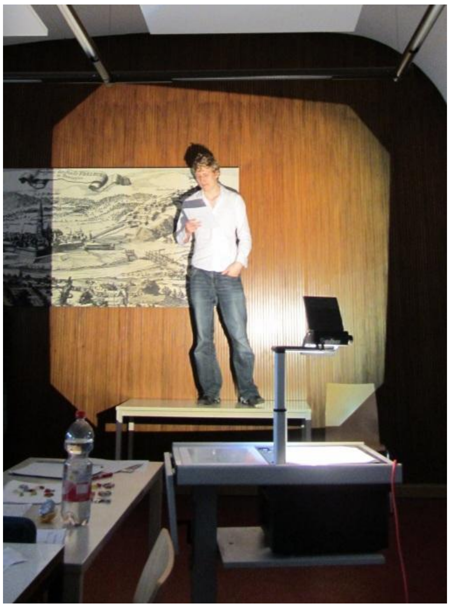
Hintergründe

Übung macht den Meister

Heutzutage wird es immer wichtiger, souverän vor einer Gruppe stehen und dieser schlüssig etwas mitteilen zu können. Bei dieser Übung können verschiedene Kompetenzbereiche des Präsentierens trainiert werden, wie zum Beispiel das ruhige Stehen oder die klare, feste Stimme.

Freiwillige vor!

Die Schüler sollen selbst entscheiden dürfen, ob sie sich ins Rampenlicht stellen möchten oder nicht. So wird niemand in eine unangenehme Lage gebracht. Denn alleine vor einer großen Gruppe zu stehen, stellt für den ein oder anderen ein Problem dar. Es spricht nichts dagegen, dass diese Schüler zunächst die Rolle des stillen Beobachters einnehmen. Sollte sich einmal kein „mutiger Erster“ finden lassen, zum Beispiel bei der Erstanwendung des Konzepts, kann der Lehrer mit gutem Beispiel vorangehen und die Vortragsweise demonstrieren.
Wer sich traut, wird belohnt, da er lernt, mit unbekannten oder ungewohnten Situationen umzugehen und diese zu meistern.



Sicherheit auf der Bühne

Der Nervosität und eventuellem Unbehagen des Vortragenden wirken zwei wichtige Aspekte entgegen: zum einen wird der Leser durch das Scheinwerferlicht geblendet und somit daran gehindert, die Personen im Publikum erkennen zu können. Dadurch sinkt die Wahrscheinlichkeit, sich vorgeführt zu fühlen; die Bühne wird im Gegenteil eher als schützender Rahmen empfunden. Außerdem wendet sich das Publikum durch das Aufstellen im Halbkreis komplett dem Mitschüler auf der Bühne zu und schenkt ihm somit seine ungeteilte Aufmerksamkeit und Wertschätzung.

Qualität und Inhalt des Textes

Wissen die Schüler im Voraus, dass der zu schreibende Text eventuell vorgetragen werden soll, können sie sich darauf einstellen und geben sich eventuell mehr Mühe, als wenn sie den Text nur für sich selbst schreiben. Es entsteht also eine gewisse Erwartung an sich selbst, die sich positiv auf die Qualität des Textes ausüben kann.

Bemerkung:

Besonders gut geeignet sind humoristische Texte, da der Leistungsdruck hier nicht zu groß wird und die Zuschauer den Inhalt des Texts in einer lockeren, unterhaltenden Atmosphäre aufnehmen können.

1.8. Rechnen mit Größen

Esther Renz, Lara Rößler,
Pascal Schade, Juliane Wilms

Bei dieser Aufgabe geht es um die Vorstellung von Größen und Einheiten.

Konkrete Umsetzung

Die Schüler schreiben eine möglichst alltägliche Geschichte, in der mindestens zwölf verschiedene Größen vorkommen. Diese sollen sie nicht durch umgängliche, sondern durch absurde Zahlen und Einheiten darstellen.

Beispieltext: Die kleine Made

Eine kleine Made saß in $3687cm$ Höhe auf einem Ast und schaute gedankenverloren den sich mit 13,8 $\frac{m}{s}$ fortbewegenden Wolken hinterher. Der Anblick der 13.000 Meter entfernten Ungetüme am Himmel stimmte sie allerdings so traurig, dass sie bei ihren $3000 \cdot 10^{-3}$ Freunden Marie, Hans und Edgar Ablenkung suchte. Diese waren im Schnitt 33.120 Minuten älter als sie selbst, konnten dementsprechend $3{,}45 \cdot 10^{2}\%$ mehr Körpervolumen ihr Eigen nennen und gingen auch an diesem Tage, nämlich dem 42. nach der letzten Mondfinsternis im Frühling desselben Jahres, wieder einmal ihrer Lieblingsbeschäftigung, dem Schlemmen sämtlicher grüner Pflanzenteile, die sich im Umkreis von zweieinhalb Ellen befanden, mit genüsslicher Hingabe nach. Die kleine Made fragte: „He Edgar, hast du Lust mit mir zu spielen?“ Woraufhin die dicke Made Edgar nur gelangweilt antwortete: „Kleine Made, ich bin zu rund, als dass ich mich auch nur um 0,000.0089 Kilometer bewegen könnte!“ Enttäuscht kroch die kleine Made weiter und erkundigte sich bei Marie, sie galt aufgrund ihres $\pi \cdot 1{,}1cm$ umfassenden Taillenumfangs als besonders schön, ob sie denn nicht mit ihr einen Ausflug zur „Braunen Oase“, einem morschen Baumstumpf, der seit über 3.628.800 Sekunden Erholung für Artgenossen der kleinen Made bot, unternehmen wolle. Doch Marie verneinte hastig und nuschelte während ihrer Essenspausen, sie müsse in den nächsten 0,000799087 Jahren noch $0{,}4 \cdot 10$ Kalorien zu sich nehmen, um ihren Taillenumfang von $\pi \cdot 1{,}1$ cm auf ganze, traumhafte $\pi \cdot 1{,}9$ cm zu erweitern, sodass sie behaupten könne, die perfekten Madenmaße von $60 - 90 - 60$ zu besitzen. Ein einzelner Blick zu Hans verriet der kleinen Made, dass auch Hans zu nichts bereit wäre, da sich dieser mal wieder einem Mittagsschläfchen von ungefähr $8{,}3 \cdot 10^{-2}$ Tagen hingab. Die Traurigkeit wuchs und wuchs und führte dazu, dass sich die kleine Made an ihren ursprünglichen Platz begab, sich die 296,13 Kelvin warme Sonne auf den kleinen Madenbauch scheinen ließ und dabei den sich mit 13,8 $\frac{m}{s}$ bewegenden Wolken trübselig hinterher blickte.

Julia Weber, 15.11.12

Hintergründe

Gefühl für Größen und Einheiten

Die Schüler sollen sich vorstellen können, was eine Einheit bedeutet und für welche Darstellung von Größen sie sinnvoll ist. Sie sollen ein Gefühl für das Verhältnis der zu einer „Kategorie“ gehörenden Einheiten bekommen, wie zum Beispiel Millimeter zu Meter zu Kilometer. Das entwickelte Gefühl soll ihnen bei der Abschätzung von Größen und der Kontrolle ermittelter Ergebnisse helfen.

Umrechnen der Einheiten

Das Umrechnen der Werte in absurde Zahlen und Einheiten ist nicht nur als bloße Rechenübung zu verstehen, denn die Schüler lernen dabei auch, in welchem Verhältnis die Zahlen und Einheiten zueinander stehen.