1.1 Material als Bedeutungsträger

Raphael Plersch

Raphael Viol

Repräsentativ soll am Beispiel der Kerze die Bedeutung des Materials dargestellt werden.

Aufgabenstellungen über das Material sind binnendifferenziert

Das bedeutet, dass eine Aufgabe auf unterschiedliche Art und Weise gelöst werden kann. Beispielsweise nutzt man die Kerze in einer der unteren Klassenstufen, um das Volumen eines Zylinders zu berechnen.
Bei älteren Schülern könnte man bei der gleichen Aufgabe die genauere Form berechnen und mehr Wert auf Details legen, wie zum Beispiel Aufteilung in mehrere Körper oder Berücksichtigung des Dochtes.

Material ist fächerübergreifend

Die Kerze mit ihren Eigenschaften kann auch in anderen Fächern zur Demonstration verschiedener Phänomene dienen. Dazu folgende Möglichkeiten:

Physik	Beugung des Lichtes (Blickt man durch einen winzigen Spalt zwischen zwei Stiften, so kann man die wellenförmige Ausbreitung des Lichtes erkennen)
Chemie	Verbrennungsprozess
Kunst	Herstellen von Kerzen
Naturphänomene	Luftbewegung

Alltagsbezug

Durch Auswahl von Gegenständen, welche die Schüler von zuhause kennen, transferiert man die Mathematik in den Alltag und macht die Thematik besser greifbar

So wird ein persönlicher Bezug geschaffen und sowohl das Interesse geweckt, als auch die Lernmotivation gesteigert.

Kerze im weiteren mathematischen Kontext

Potenzrechnung:
Die Kerze verkörpert symbolisch die Sonne und man versucht, maßstabsgetreu den Abstand zur nächst gelegenen Sonne (Alpha Centauri) zu bestimmen. Wird einem klar, dass bei diesem Größenverhältnis der Abstand zur nächsten Sonne die Entfernung zwischen Freiburg und Karlsruhe beträgt, entwickelt man ein besseres Verständnis für extrem große Zahlen.

Prozentrechnung:
Misst man die abgebrannte Strecke am Ende einer Stunde, kann man das Verhältnis zur Ausgangslänge prozentual bestimmen.

Volumenberechnung:
Berechnung von Zylinder und Kegeln.

Lineare Funktionen:
Erstellen eines Längen-Zeit-Diagrammes als Schaubild des Verbrennungsprozesses.

1.2 Einführung in die Potenzrechnung: Papier falten - Ein möglicher Stundenverlauf

Clara Völklein

Paul Härtlein

Die Bedeutung von $\mathbf{2^5}, \mathbf{2^{-3}}, \mathbf{2^0}$ wird handelnd erfahren. Die Schüler beschäftigen sich in großen Teilen selbstständig mit dem Thema Potenzen und entwickeln Lösungen ohne Fremdbestimmung. Der Lehrer wechselt in dieser Unterrichtsskizze vom Dozierenden immer weiter zum Moderator.

Konkrete Umsetzung

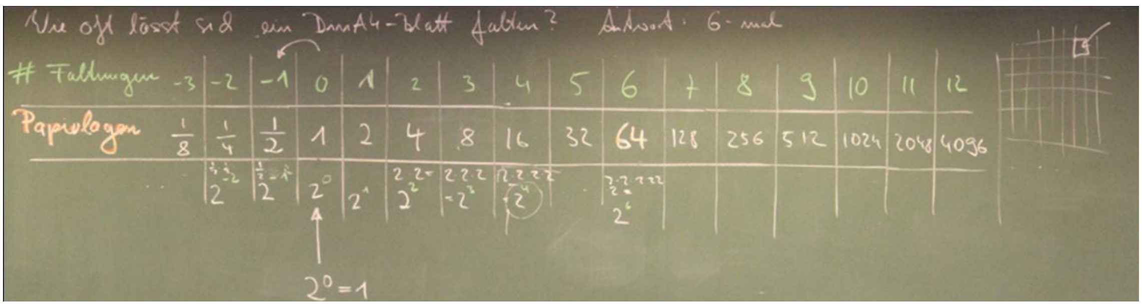
Stundeneinführung
Wie oft kann das DinA4 Papier gefaltet werden? Wie die Schüler selbst erfahren werden, geht es genau sechs Mal.

Diese Aufgabe eignet sich gut als Unterrichtseinstieg, da es die Schüler zum Thema der Stunde hinführt. Die Schüler werden auf die übergeordnete Problemstellung der Stunde aufmerksam gemacht und ihre Neugier wird geweckt. Die Übung sollte zwischen 5 und 10 Minuten in Anspruch nehmen.

Erarbeitungsphase: Einführung in die Potenzschreibweise und ihrer Bedeutung.
Durch das Falten sind 64 Lagen Papier entstanden. Wer's nicht glaubt, kann nachschauen. Der Lehrer zeichnet folgende Tabelle an die Tafel und trägt diesen Wert zuerst ein.
Der Rest der Tabelle wird parallel zum schrittweisen Auffalten ausgefüllt. Es werden anschließend, auch wenn praktisch nicht möglich, die Anzahl der Papierlagen für mehr als sieben Faltungen eingetragen. Die Anzahl der Lagen nimmt dabei sehr schnell zu.

Anzahl Faltungen							1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Anzahl Papierlagen							2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048
Anzahl Papierlagen in (Zweier-) Potenzen																	

Besitzen negative Hochzahlen eine Bedeutung? Man muss sich vorstellen, dass Din-A4 Papier wird in seiner Dicke jeweils halbiert und aufgeklappt. Die Anzahl der gedanklichen Auffaltungen werden negativ und es ergeben sich für die Papierlagen Brüche.



Am Ende werden die Anzahl der Papierlagen in Zweierpotenzen ausgedrückt. Die Potenzen werden in gleicher Farbe, wie die Faltungen geschrieben:

Anzahl Faltungen	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Anzahl Papierlagen	1/32	1/16	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048
Anzahl Papierlagen in (Zweier-) Potenzen	2^{-5}	2^{-4}	2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	2^{0}	2^{1}	2^{2}	2^{3}	2^{4}	2^{5}	2^{6}	2^{7}	2^{8}	2^{9}	2^{10}	2^{11}

Bei dieser Vorgehensweise wird auch die Bedeutung der Null im Exponenten klar: Keine Faltung entspricht einer Lage Papier.

Schluss - eine abschließende Schätzfrage
Wie oft müsste das Papier gefaltet werden, damit man bis zum Mond kommt?
Für die ca. 380 000 km benötigt man „nur“ 42 Faltungen, da

$$0{,}1mm \cdot 2^{42} \approx 440\,000km$$

MöglicheHausaufgabe

Erkläre einem Erwachsenen warum 42 Faltungen reichen, um zum Mond zu gelangen.Der Erwachsene soll anschließend mit ein paar Sätzen ins Matheheft des Schülers schreiben, wie gut er den Sachverhalt verstanden hat.

Hintergründe

Falten und formale Schreibweise

Die formale Beschreibung von Potenzen erhält durch synchrones Falten unmittelbar eine reale Bedeutung. Wichtig ist, dass das Falten, gleichzeitig mit dem formalen Aufschrieb erfolgt. Dadurch, dass das Thema auf zwei Ebenen unterrichtet wird, ist ein tieferes Verständnis eher möglich, als wenn nur auf einem Kanal, meist der formale, gesendet wird.

Große Zahlen, kleine Zahlen

Den Durchmesser einer Galaxie oder eines Atoms könnte man ohne Potenzen nicht darstellen, zumindest bräuchte man sehr viel mehr Platz. Aufgrund derabsichtlich sehr klein gewählten Kästchen passen größere Zahlen nicht mehr in das Tabellenformat. Die Zweierpotenzen lassen sich jedoch ohne Probleme in die Tabelle eintragen, sodass die Schüler einen Nutzen in der Potenzschreibweise erkennen.

Exponentielles Wachstum lässt sich schwer schätzen

Die Schülerliegen in ihren Schätzungen oft weit darüber, d.h. unterschätzen das schnelleAnsteigen des exponentiellen Wachstums. Das Beispiel, dass sie „nur“ 42mal falten müssten, damit das Papier so dick ist, dass es bis zum Mond reicht, ist sehr einprägsam und wirkungsvoll für Schüler.

1.3 Exponentielles Wachstum

Timea Sebesi

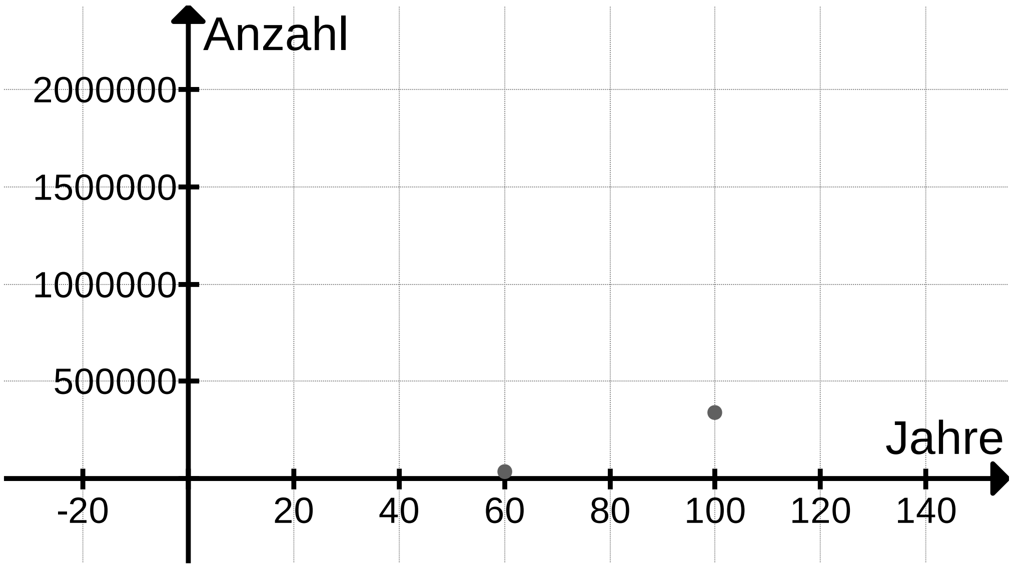
Wera Winterhalter

Christina Körber

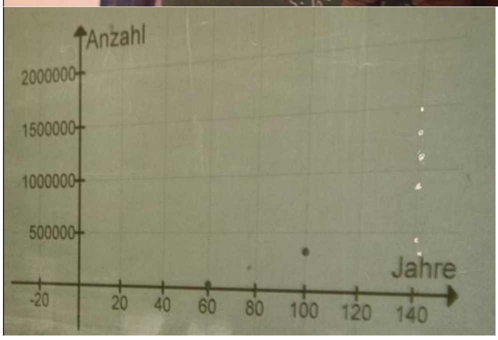
Exponentielles Wachstum kann sehr schlecht geschätzt werden. In diesem Kapitel werden wir das exponentielle Wachstum auf erfahrbarer Ebene kennen lernen.

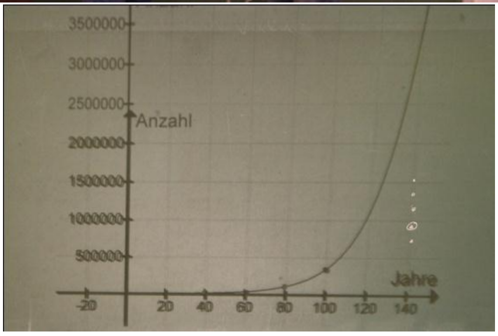
Konkrete Umsetzung – Traktoren

Ein Unternehmen produziert im Jahre 1976 „1000 Traktoren".
„Wie viele Traktoren müssen in den Jahren 1990, 2020, 2050 und 2080 hergestellt werden, wenn davon ausgegangen werden kann, dass das Unternehmen nur bei einer jährlichen Wachstumsrate von 6% überleben kann?"
Folgende Grafik verdeutlicht die Situation:



Nun legt der Lehrer circa 5 bis 6 Schülern unterschiedlich farbige Kreide in die Hand. Die Schüler sollen die geschätzte Produktionsmenge zum Beispiel für das Jahr 2080 einzeichnen.





Konkrete Umsetzung – Das Schachbrett und die Reiskörner

Auf das erste Feld wird ein Reiskorn gelegt,auf die nächsten Felder immer doppelt so viele wie auf das vorherige. Zur Illustration genügt die Besetzung der ersten fünf Felder.

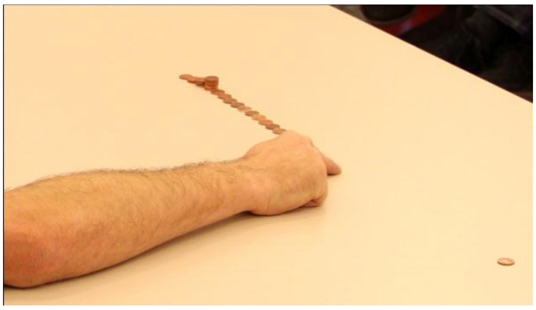
Reicht die Menge an mitgebrachtem Reis? Braucht es mehrere Reissäcke? Wieviele Reiskörner befinden sich auf dem letzten Feld?
Der Leser kennt die Antwort. Auf der ganzen Welt gibt es nicht so viel Reis um alle Felder zu füllen.

Konkrete Umsetzung – Centstücke

Die Schüler kommen zum Pult und legen Centstücke auf den Tisch.Insgesamt 30 Cent sind ausreichend.

Durchführung im Unterricht

Der Lehrer positioniert zwei Münzen etwa im Abstand von 60cm auf dem Tisch und stapelt weitere Münzen wie auf dem Bild zu sehen.



Wie hoch wird der Stapel an der letzten Münze sein?
Der Turm hätte die Höhe der Entfernung von der Erde bis zum Mond.

Hintergründe

Exponentielles Wachstum lässt sich schlecht schätzen

Erstes Beispiel: Traktoren
Die Erfahrung zeigt, dass die meisten Schüler ihr Kreuz im Koordinatensystem viel zu weit unten setzen, insbesondere wenn ihnen das notwendige mathematische Vorwissen fehlt. Dies liegt daran, dass gerade exponentielle Wachstumsprozesse für das menschliche Gehirn sehr schwer zu erfassen sind. Sinn dieser Übung ist es, eine

Art „Aha-Effekt“ bei den Schülern auszulösen. Indem sie sehen, wie weit ihre geschätzten Lösungen von der richtigen Lösung entfernt sind, werden sie sich der enormen Wachstumsgeschwindigkeit exponentieller Prozesse bewusst.

Zweites Beispiel: Schachbrett
Durch dieses Experiment wird den Schülern das extreme Wachstum der Exponentialfunktion veranschaulicht. Insbesondere zeigt sich hier auch, dass die meisten Schüler zwar angeben, dass sich auf dem letzten Feld sehr viele Reiskörner befinden, jedoch wird sich der geschätzte weit unter dem exakten Wert befinden. Um den Schülern die Größe des Wertes 2 hoch 63 zu vermitteln, könnte man ihnen zum Beispiel sagen, dass das etwa dem zwanzigfachen der Anzahl Sekunden entspricht, seit dem das Universum existiert.

Pult und Tafel als Bühne

Warum liegen nur Centstücke auf dem Tisch? Warum ist das Pult leer und die Tafel sauber? Damit werden Ablenkungen und eventuelle Störungen vermieden. Wir assoziieren mit bestimmten Gegenständen, die auf dem Tisch liegen, eigene Gedanken und Erfahrungen. Würde beispielsweise noch ein Schwamm, zusätzlich zu den Münzen, auf dem Tisch liegen, so würden wir diese Gegenstände in unsere Assoziationen mit einbinden und die Aufmerksamkeit auf das Wesentliche wird abgelenkt. z.B. kann assoziiert werden, dass die Münzen mit dem Schwamm geputzt werden.

Schüler werden materiell mit eingebunden

Warum nimmt man Centstücke von Schülern? Das Interesse der Schüler wächst, je mehr sie in das Geschehen mit eingebunden werden. Durch das vor bringen ihres Geldes wird die Neugier geweckt, was nun damit geschieht. Umso überraschender ist das Ergebnis hinterher wie schnell sich ihr Geld vermehrt wenn man stets die doppelte Anzahl an Münzen aufreiht.

1.4 Plädoyer für vernetztes Lernen

Johannes Hauptmann

Am Beispiel der Potenzgesetze wird exemplarisch gezeigt, wie sich ein Thema in der ganzen Schulmathematik wieder und wieder begegnet.

1. Potenz als Dimension

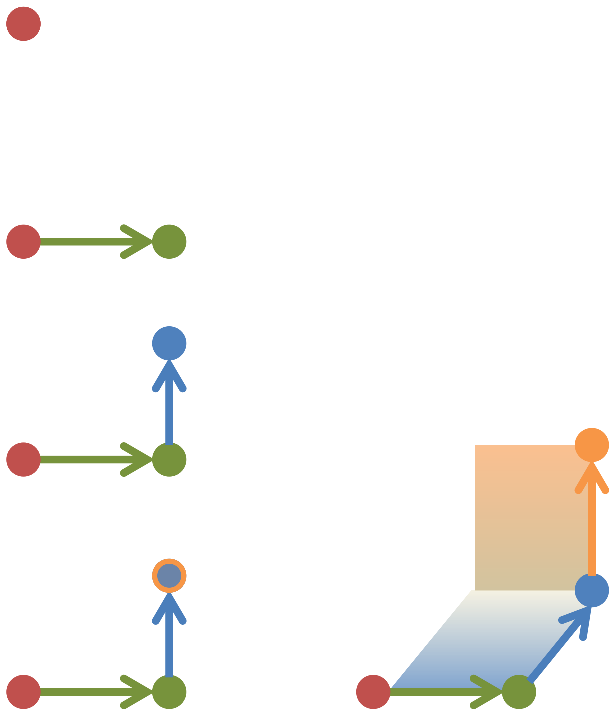
Verschiebt man einen Punkt um 10 Längeneinheiten erhält man eine Strecke, nämlich 10^1.Verschieben wir das Resultat erneut senkrecht zur ersten Richtung um 10 Längeneinheiten, so ergibt sich ein Quadrat, 10^2. Führen wir diese Verschiebung ein drittes Mal durch, bekommen wir einen Würfel,10^3.

„Nullte"-Dimension: 10^0

„Erste"-Dimension: 10^1

„Zweite"-Dimension: 10^2

„Dritte"-Dimension: 10^3



2. Stellenwertsystem

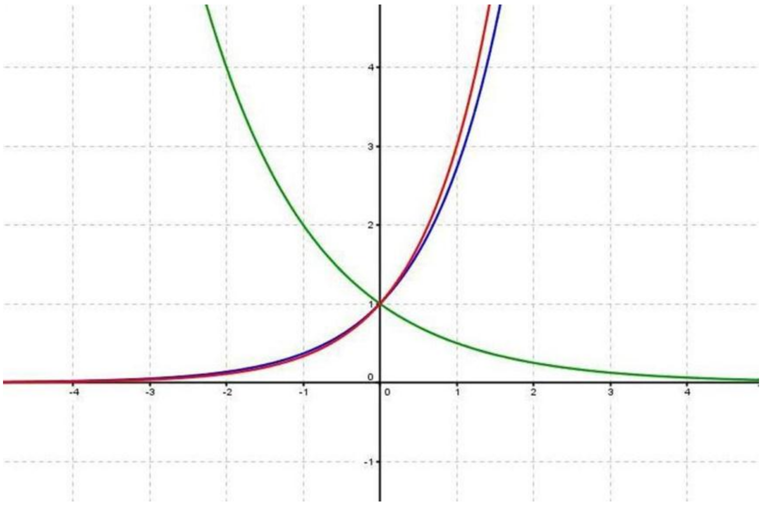
Auch unser Zahlensystem ist exponentieller Natur. So steht zum Beispiel die Zahl 123,4 für $1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1}$.

3. Arithmetik

Rechenregeln für Potenzen sind Bestandteil der Arithmetik: $(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4}$.
Auch gäbe es ohne Potenzen keinen Logarithmus.

4. Potenzfunktion

Beispiele hierfürwären $f(x) = 3^x$, $f(x) = 0{,}5^x$ oder $f(x) = e^x$



5. Wachstum

Potenzen spielen beim exponentiellen Wachstum bzw. Zerfall eine enorme Rolle. Siehe hierzu das Experiment zum Zerfall von Bierschaum.

6. Wahrscheinlichkeitsrechnung

Bei mehrfacher Wiederholung unabhängiger Zufallsexperimente werden Potenzen zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit verwendet.So kann man beispielsweise die Wahrscheinlichkeit bestimmen, drei Mal hintereinander eine Sechs zu würfeln: $(\frac{1}{6})^3$.