Das Collatz–Problem

Dieter Wolke

Einleitung. Die Zahlentheorie verfügt über eine große Anzahl leicht formulierbarer, aber schwer lösbarer Probleme. Einige sind Jahrhunderte alt, andere sind relativ neu. Zu denen, um die man sich seit langer Zeit bislang ohne endgültigen Erfolg bemüht, gehört beispielsweise das Primzahlzwillingsproblem: Gibt es unendlich viele Paare von Primzahlen mit dem Abstand Zwei, so wie die Paare $3,5; 11,13; 17,19$? Zu den jüngeren, auch noch ungelösten, gehört das gleich zu schildernde **„Collatz–Problem“**. Es ist in der Literatur unter vielen Namen anzutreffen. Kakutani–, Ulan–, Hasse–,, Syracuse– oder auch $(3x+1)$–Problem. Es scheint aber richtig zu sein, dass kurz nach 1930 der damalige Mathematik–Student und später hoch angesehene angewandte Mathematiker **Lothar Collatz** (1910–1991) die Frage erstmals aufwarf. Nach etwa 40 Jahren Ruhezeit begann um 1975 ein wahrer Ansturm auf das Problem mit bis heute mehr als hundert, zum Teil sehr anspruchsvollen Untersuchungen. Eine endgültige Lösung ist nicht in Sicht. Auf den glücklichen Finder warten einige tausend Dollar Belohnung.

Ich werde im Folgenden neben dem Problem einige ganz elementar erreichbare Ergebnisse (mit E1, E2,... bezeichnet), sowie einige Übungsaufgaben (mit Ü1, Ü2,... bezeichnet) vorstellen. Alle interessierten Teilnehmer(innen) sind eingeladen, ihre Kräfte hieran zu messen, aber auch durch numerisches Experimentieren oder eigene Gedanken an dem Problem zu „forschen“.

2. Beschreibung des Problems

Eine natürliche Zahl $n(\geq 1)$ werde nach Collatz wie folgt verändert:

$$\begin{aligned} T(n) &= \frac{n}{2}, && \text{falls} \quad n \quad \text{gerade ist,} \\ T(n) &= \frac{3n+1}{2}, && \text{falls} \quad n \quad \text{ungerade ist.} \end{aligned}$$

T definiert also eine Abbildung von $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ nach $\mathbb{N}$. Stets ist unter zwei Alternativen zu wählen.

$$\begin{aligned} &F(=\text{Fallend})\text{–Schritt}: && n \to \frac{n}{2}, \\ &W(=\text{Wachsend})\text{–Schritt}: && n \to \frac{1}{2}(3n+1). \end{aligned}$$

Da T von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ führt, kann es iteriert, d.h. mehrfach ausgeführt werden.

$$T^0(n) \underset{\mathrm{Df}}{=} n, \quad T^1(n) = T(n), \quad T^2(n) \underset{\mathrm{Df}}{=} T\big(T(n)\big), \text{ usw.}$$

Jedem n wird hierdurch eine Folge $C(n)$ natürlicher Zahlen zugeordnet.

$$C(n): \quad C_0(n) = n = T^0(n),\ C_1(n) = T(n),\ C_2(n) = T^2(n), \dots$$

Die **Collatz–Folge** zu n.

Wie sieht $C(n)$ für die ersten n aus?

$C(1): 1, 2, 1, 2, \dots$ (12 – periodisch von Anfang an)
$C(2): 2, 1, 2, 1, \dots$
$C(3): 3, 5, 8, 4, 2, 1, 2, \dots$
$C(4): 4, 2, 1, 2, \dots$
$C(5): 5, 8, 4, 2, 1, 2, \dots$
$C(6): 6, 3, 5, \dots$ (s.$C(5)$).

Es ist klar: So bald die Zahl Eins auftritt, kann man mit dem Rechnen aufhören. Ab dieser Stelle hat man 12–Periodizität.
Es treten früh Zahlen n auf, für die $C(n)$ lange sehr widerspenstig verläuft, z.B. $n = 27$. Hier tritt die Eins erst an der 71. Stelle auf. Vorher bewegt sich die Folge bis 3644. Also so weit, dass man fast fürchtet, sie liefe ins Unendliche davon.

Welche Möglichkeiten gibt es für $C(n)$? Drei Alternativen kommen in Betracht.

A1: In $C(n)$ kommt die Eins vor. Dann ist $C(n)$ von der ersten Eins an 12–periodisch.

A2: In $C(n)$ kommt die Eins nicht vor, aber ein $k > 1$ tritt mehrfach auf. Seien m_1 und $m_2 > m_1$ die ersten zwei Nummern mit $T^{m_1}(n) = k = T^{m_2}(n)$, dann gilt $T^{m_1+1}(n) = T^{m_2+1}(n)$, usw., d.h. es liegt Periodizität mit der Periodenlänge $m_2 - m_1$ vor.

A3: In $C(n)$ kommt keine Zahl mehrfach vor, also keinerlei Periodizität,

$$C_\ell(n) = T^\ell(n) \to \infty \quad \text{für} \quad \ell \to \infty.$$

Denn für jedes noch so große B sind die Zahlen $\leq B$ einmal ausgeschöpft, d.h. ab einer Stelle sind alle $C_\ell(n)$ größer als B.

Ein Periodenblock kann eventuell aus mehreren Perioden bestehen, so wie 12 12 12. So bald in einem Periodenblock keine Zahl mehrfach vorkommt, kann er nicht mehr in kürzere Perioden zerlegt werden. Es kann zusätzlich angenommen werden, dass die kleinste Zahl des Blocks am Anfang steht. Solche **Perioden** sollen **minimal** genannt werden. Aus jedem Periodenblock läßt sich daher genau ein minimaler gewinnen.

Collatz hat etliche $C(n)$ bestimmt. Stets gab es 12–Periodizität. Bis heute ist dies für alle $n \leq 13 \cdot 2^{55} \approx 5 \cdot 10^{17}$ nachgeprüft. Es hat sich bislang kein n gefunden, das unter A2) oder

A3) fällt.

Durch die numerischen Werte sowie gleich zu schildernde Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen kam Collatz zu der Vermutung

(V1) Für alle $n \in \mathbb{N}$ wird die Folge $C(n)$ 12–periodisch.
Oder: Ein n heiße **Collatz–Zahl**, wenn $C(n)$ 12–periodisch wird. Dann besagt

(V1) Alle $n \in \mathbb{N}$ sind Collatz–Zahlen.

3. Eine Plausibilitätsbetrachtung
Beim Schritt von $T^k(n)$ auf $T^{k+1}(n)$ kommt es darauf an, ob $T^k(n)$ gerade oder ungerade ist. Da die geraden und ungeraden Zahlen gleich häufig sind, ist die Entscheidung, ob Schritt $F\ \big(m \to \frac{m}{2}\big)$ oder Schritt $W\big(m \to \frac{1}{2}(3m+1)\big)$ zu vollziehen ist, eine Münzwurf vergleichbar. Auf lange Sicht werden bei der Berechnung der Collatz–Folge also etwa gleich häufig die Schritte F und W auftreten. W und F, nacheinander ausgeführt, machen aus m die Zahl $\frac{1}{2}\big(\frac{3}{2}m+1\big) \approx \frac{3}{4}m$, d.h. m wird etwa um den den Faktor $\frac{3}{4}$ verkleinert. Da die Folge $\frac{3}{4}\,, \big(\frac{3}{4}\big)^2, \big(\frac{3}{4}\big)^3, \ldots$ rasch gegen Null fällt, ist damit zu rechnen, dass $T^k(n)$ mit wachsendem k stark abfällt und schließlich in die Eins einmündet. Dies ist selbstverständlich kein Beweis. Es kann nicht ausgeschossen werden, dass für einige n in $C(n)$ die W–Schritte stark überwiegen. Zum Beispiel stellen zwei W–Schritte einen F–Schritt in den Schatten:

$$m \overset{W}{\to} \frac{3m+1}{2} \approx \frac{3m}{2} \overset{W}{\to} \approx \frac{9}{4}m \overset{F}{\to} \approx \frac{9}{8}m > m.$$

Man überlegt sich, dass bei einem n, für das $C(n)$ gegen ∞ davonläuft, das Verhältnis

$$(\text{Anzahl der } W\text{–Schritte}):\ (\text{Anzahl der } F\text{–Schritte})$$

auf Dauer größer als $\frac{1}{\frac{\log 3}{\log 2}-1} \approx 1,70$ sein muss. Die Zahl $\frac{\log 3}{\log 2}$ mit ihren großenteils schwer durchschaubaren Eigenschaften tritt in zahlreichen Untersuchungen zum Collatz–Problem auf, und scheint hier von ganz entscheidender Bedeutung zu sein.

Auch wesentlich subtilere wahrscheinlichkeitstheoretische Betrachtungen unterstützen die Collatz–Vermutung, können aber letztlich keinen Beweis liefern.

Es sei noch bemerkt, dass in manchen Artikeln die Collatz–Vorschrift als

(F) $\qquad n \to \dfrac{n}{2}\,, \quad$ falls n gerade,

(W^*) $\qquad n \to 3n+1, \quad$ falls n ungerade

angegeben wird. Dann folgt auf W^* immer ein F. Unser W ist dasselbe wie FW^*. Die Theorie läuft also auf das Gleiche hinaus. Die hier gewählte Version hat jedoch, wie man sehen wird, einige Vorteile.

4. Zu den Perioden

12 ist die einzige maximale Periode der Länge Zwei. Denn ist ℓk $(1 < \ell < k)$ eine andere, dann entsteht sie nach dem Schema

$$\ell \xrightarrow{W} \frac{3\ell+1}{2} \xrightarrow{F} \frac{3\ell+1}{4} = \ell.$$

Dies heißt $3\ell+1 = 4\ell$, $\ell = 1$.

Ähnlich sieht man

E1: Es gibt keine Dreierperioden.

Denn sei ℓkm $(1 < \ell < k < m)$ eine solche Periode, dann kann sie auf drei Arten zustande kommen

(a) $$\ell \xrightarrow{W} \frac{3\ell+1}{2} = k \xrightarrow{W} \frac{3k+1}{2} = \frac{9}{4}\ell + \frac{5}{4} = m \xrightarrow{F} \frac{9}{8}\ell + \frac{5}{8} = \ell,$$

(b) $$\ell \xrightarrow{W} \frac{3\ell+1}{2} = k \xrightarrow{F} \frac{k}{2} = \frac{3\ell+1}{4} = m \xrightarrow{W} \frac{3m+1}{2} = \frac{9}{8}\ell + \frac{7}{8} = \ell,$$

(c) $$\ell \xrightarrow{W} \frac{3\ell+1}{2} = k \xrightarrow{F} \frac{k}{2} = \frac{3\ell+1}{4} = m \xrightarrow{F} \frac{3}{8}\ell + \frac{1}{8} = \ell.$$

In allen drei Fällen sieht man, dass die erhaltenen Gleichungen keine Lösungen $\ell \in \mathbb{N}$ haben.

Mit wachsendem Aufwand kann man dies fortsetzen.

Ü1: Es gibt keine minimalen Vierer– und Fünfer–Perioden.

Man weiß bis heute, dass ein Periodenblock, der nicht die Gestalt $12\,12\ldots12$ (oder $21\ldots21$) hat, aus mehr als 10^8 Zahlen bestehen muss. Hierzu sind umfangreiche numerische Rechnungen, aber auch anspruchsvolle theoretische Überlegungen nötig. Wieder spielt die Zahl $\frac{\log 3}{\log 2}$ eine entscheidende Rolle.

Es spricht bislang alles dagegen, dass es außer 12 weitere minimale Perioden gibt. Es kann aber nicht einmal ausgeschlossen werden, dass es unendlich viele minimale Perioden gibt. Es läßt sich jedoch zeigen, und dies ist eine anspruchsvollere Übungsaufgabe:

Ü2: Zu jedem $k \geq 2$ gibt es höchstens endlich viele minimale Perioden der Länge k.

5. Der Collatz–Graph

Es ist heute vielfach üblich, Netzwerke durch **Graphen** darzustellen. Dabei werden die zu verbindenden Objekte (z.B. Orte auf einer Straßenkarte) als Punkte oder **Knoten** und die Verbindungen als **Kanten** oder Linien von einem Knoten zu einem anderen veranschaulicht. Diese Kanten können gerichtet sein, wenn sie wie Einbahnstraßen eine bevorzugte Richtung haben.

Für das Collatz–Problem bilden wir den Graphen, der die $n \in \mathbb{N}$ als Knoten hat. Von n_1 soll eine gerichtete Kante nach u_2 führen, wenn $n_2 = T(n_1)$ ist. n_1 heißt dann **Vorgänger** von n_2, n_2 **Nachfolger** von n_1. Die Periode 12 wird durch die zwei gerichteten Kanten $1 \to 2$ und $2 \to 1$ angedeutet. Ansonsten gibt es nur Einbahnstraßen. Jedes n hat unendlich viele mittelbare Vorgänger.

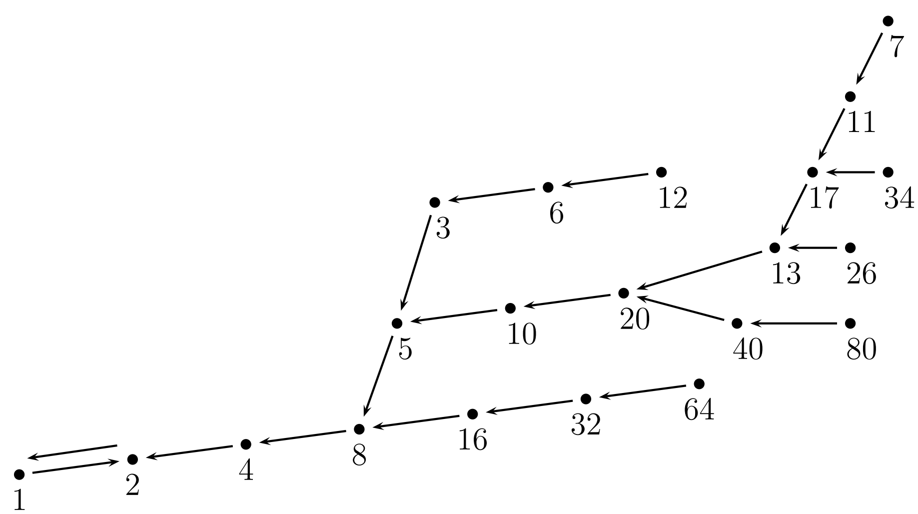
$$n \overset{F}{\leftarrow} 2n \overset{F}{\leftarrow} 4n \overset{F}{\leftarrow} 8n \overset{F}{\leftarrow} \dots$$

Es kann auch einen W–Vorgänger m haben. Dazu muss m ungerade, d.h. $= 2\ell + 1$ sein. Also

$$n = \frac{3m+1}{2} = \frac{3(2\ell+1)+1}{2} = 3\ell + 2,$$

bzw. n läßt bei Division durch Drei den Rest Zwei. Umgekehrt: Wenn $n = 3\ell + 2$, dann ist $n = T(m)$ mit $m = 2\ell + 1$.

Angefangen mit Eins können auf die Weise durch Vorgängerbestimmung im Prinzip alle Collatz–Zahlen ermittelt werden. Es entsteht so ein unendlich hoher „Baum“ mit Verzweigungen in zwei Äste an allen Stellen $n > 2$ mit $n = 3\ell + 2$.

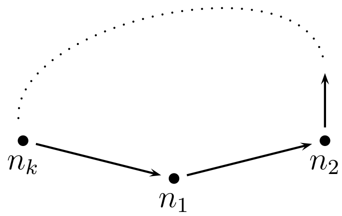


Die Collatz–Vermutung besagt dann:

Der so konstruierte Baum enthält alle $n \in \mathbb{N}$

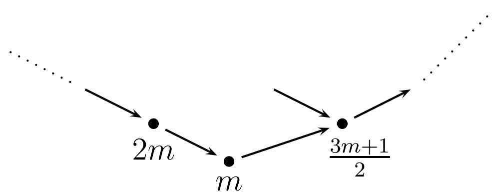
Oder: Der gerichtete Collatz–Graph ist zusammenhängend (mit 1 als Wurzel), d.h. von jedem $n > 2$ gibt es eine gerichtete Kantenfolge von n nach 1.

Wie sieht der Graph aus, wenn die Vermutung falsch ist? Im Fall $A2$ gibt es Zyklen der Länge $k > 2$.



In diese Knoten münden jeweils unendlich lange „Vorgängeräste“ ein.
Zu verschiedenen minimalen Perioden gehören voneinander getrennte Teilgraphen (warum ist das so?) In jedem solchen Teil ist also nur eine minimale Periode untergebracht. Es kann nicht ausgeschlossen werden, dass es unendlich viele solcher Teile gibt.

Falls die Alternative $A3$) eintritt, liegt so etwas wie eine „Kometenbahn“ vor. In einem zugehörigen Teilgraphen gibt es ein kleinstes m, das ungerade sein muss.



Auch von dieser Sorte gibt es womöglich unendlich viele Exemplare.

6. Die 01–Folge

Bei der Untersuchung mathematischer Objekte ist es oft vorteilhaft, nur auf einige spezielle Eigenschaften zu schauen und andere außer Acht zu lassen. So kann es günstig sein, bei Figuren im $\mathbb{R}^2$ nur die Ecken zu zählen, oder bei Zahlen nur danach zu fragen, welchen Rest sie bei Division durch 32 lassen.

So auch hier. Die Collatz–Folgen $C(n)$ können einen verwirrenden Verlauf zeigen. Für ihre Untersuchung ist im Prinzip nur die Abfolge der zwei Schritte F und W erforderlich. Es werde hier der Schritt F $\left(n \to \frac{n}{2}\right)$ mit 0 identifiziert (weil n in diesem Fall bei Division durch Zwei den Rest Null lässt), W werde mit 1 identifiziert (Rest Eins). Auf die Weise wird jedem n eine 01–Folge

$$Z(n) : z_0(n),\ z_1(n), \ldots \quad (= \text{Zick–Zack–Folge})$$

zugeordnet gemäß

$$z_k(n) = \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad T^k(n) \quad \text{gerade}, \\ 1, & \text{falls} \quad T^k(n) \quad \text{ungerade} \quad (k \geq 0) \end{cases}$$

Mit $z(n,k)$ bezeichnen wir (für $k \geq 1$) das Anfangsstück $\big(z_0(n), \ldots, z_{k-1}(n)\big)$ der Folge $z(n)$.

Einige Beispiele:

1) $z(1) : 10\,10\ldots,$

2) $z(2) : 01\,01\ldots$

3) $z(2^k, k+1) : 0\ldots 0\,1$

4) $z(2^k - 1, k+1) : 1\,1\ldots 1\,0,$

denn

$$2^k - 1 \overset{W}{\to} 3 \cdot 2^{k-1} - 1 \overset{W}{\to} 3^2 \cdot 2^{k-1} - 1 \to \ldots \overset{W}{\to} 3^k - 1 \overset{F}{\to} \frac{3^k - 1}{2}.$$

Für jede Collatz–Zahl n wird $z(n)$ 01–periodisch. Es gilt auch das Umgekehrte.

E2: Falls $z(n)$ 01–periodisch wird, ist n Collatz–Zahl.
Der Beweis ist einfach. Für $n \leq 8$ sind $C(n)$ und $z(n)$ periodisch. Wendet man auf ein $m > 4$ den W–Schritt an, dann geht m über in

$$\frac{3m+1}{2} < \frac{3m + \frac{1}{4}m}{2} = \frac{13}{8}\,m.$$

F– und W–Schritt nacheinander auf ein $m > 8$ angewandt, führt zu einer Zahl

$$< \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{8}\,m = \frac{13}{16}\,m < m.$$

Bei 01–Periodizität erfolgt dies beliebig oft, d.h. m wird schließlich unter Vier gebracht.

Ü3: Sei n Collatz–Zahl. Erfolgt der Eintritt in die Periodizität der Folgen $C(n)$ und $Z(n)$ beim gleichen Index, oder kann die Periodizität von $Z(n)$ um einiges früher erfolgen?

7. Regelmäßigkeiten in $Z(n)$

Rechnet man die Anfänge der $Z(n)$ für einige n aus, dann fällt eine gewisse Regelmäïgkeit

auf.
Für $1 \leq n \leq 16$ sehen die $Z(n,5)$ wie folgt aus

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$Z_0(n)$	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
$Z_1(n)$	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0
$Z_2(n)$	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0
$Z_3(n)$	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0
$Z_4(n)$	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1

Es wiederholen sich beispielsweise $Z(1,3),\ldots,Z(8,3)$ als $Z(9,3),\ldots,Z(16,3)$. Die 16 Viererblöcke $Z(1,4),\ldots,Z(16,4)$ durchlaufen die 16 möglichen 01–Blöcke der Länge 4. Diese Beobachtungen lassen sich allgemein bestätigen.

E3: Sei $k \geq 1$

a) **Für n_1 und $n_2 \in \mathbb{N}$ gilt $z(n_1,k) = z(n_2,k)$ genau dann, wenn $n_2 - n_1$ Vielfaches von 2^k ist.**

b) **Jeder der 2^k 01–Blöcke der Länge k tritt zu genau einem n mit $1 \leq n \leq 2^k$ als $Z(n,k)$ auf.**
(Ebenso bezüglich 2^k aufeinanderfolgender Zahlen).

Wenn also $z(n,k)$ für die $n \leq 2^k$ berechnet sind, dann hat man durch Verschiebung um 2^k die $z(n,k)$ für $2^k+1 \leq n \leq 2^{k+1}$. Für einige dieser Zahlen steht $z_{k+1}(n)$ fest, etwa wenn schon Periodizität vorliegt, oder für $2^k-1,\ 2^k,\ 2^{k+1}-1,\ 2^{k+1}$. Für die meisten n wird $z_{k+1}(n)$ neu „ausgelost“, aber so, dass 2^k mal die Null und 2^k mal die Eins auftritt.

Der Beweis zu E3 ist nicht schwer. Man überlegt sich, dass Folgendes ausreicht:

Sei $k \geq 0$ und $n_2 = n_1 + \ell \cdot 2^k$ mit ungeradem ℓ. Dann ist

$$Z(n_1,k) = Z(n_2,k), \quad \text{aber} \quad Z(n_1,k+1) \neq Z(n_2,k+1).$$

Im Fall $k = 0$ ist eine der Zahlen n_1, n_2 gerade, die andere ungerade, also $Z(n_1,1) \neq Z(n_2,1)$.

Für $k > 0$ sind n_1 und n_2 zugleich gerade bzw. ungerade. Im ersten Fall ist

$$\frac{n_2}{2} = T(n_2) = T(n_1 + \ell \cdot 2^k) = \frac{n_1}{2} + \ell \cdot 2^{k-1},$$

also

$$T(n_2) = T(n_2) + \ell \cdot 2^{k-1}.$$

Im zweiten Fall gilt

$$\frac{3n_2+1}{2} = T(n_2) = T(n_1 + \ell \cdot 2^k) = \frac{3n_1+1}{2} + 3\ell \cdot 2^{k-1},$$
$$T(n_2) = T(n_1) + 3\ell \cdot 2^{k-1}.$$

Man hat also stets

$$T(n_2) = T(n_1) + \ell_1 \cdot 2^{k-1} \quad \text{mit ungeradem} \quad \ell_1.$$

Das gleiche Verfahren wird auf $T(n_1)$ und $T(n_2)$ angewandt. Man erhält

$$Z(n_1,k) = Z(n_2,k) \quad \text{und} \quad T^k(n_2) = T^k(n_1) + \ell_k \quad \text{mit ungeradem} \quad \ell_k.$$

Die letzte Gleichung zeigt

$$Z(n_1, k+1) \neq Z(n_2, k+1).$$

Da es genau 2^k 01–Blöcke der Länge k gibt und es Wiederholung bei den $Z(n,k)$ erst für $n + 2^k$ eintritt, muss jeder Block zwischen 1 und 2^k genau einmal als $Z(n,k)$ auftreten.

Es kann also jeder WF–Verlauf der Länge k vorgegeben werden. Dann gibt es Zahlen n, deren $C(n)$ bzw. $Z(n)$ dementsprechend beginnt. Man könnte hieraus voreilig schließen, dass dann auch WF– bzw. 01–Folgen unendlicher Länge beliebig vorgegeben und durch Zahlen n realisiert werden könnten. Dies ist nicht der Fall.

E4: Es gibt kein $\boldsymbol{n}$ mit $\boldsymbol{Z(n) = 11\ldots}$ (oder auch konstant 1 ab einer Stelle).

Ein mögliches Gegenbeispiel zur Collatz–Vermutung zu konstruieren, erfordert also wesentlich mehr.

Der Beweis zu E4 ist mit E3 rasch geführt. Gäbe es eine n mit $Z(n) = 11\ldots$, dann müßte es wegen $Z(n,k) = 1\ldots1$ die Gestalt $2^k - 1 + \ell \cdot 2^k$ haben, also $\geq 2^k - 1$ sein. Da k beliebig vorgegeben werden kann, würde n jede noch so große Zahl überschreiten.

Ü4: Man konstruiere weitere unendliche 01–Folgen, die nicht als $Z(n)$ auftreten können.

8. Die Stoppzeit

Für gerades n gilt $T(n) < n$, für ungerades $T(n) > n$. Man kann bislang nicht ausschließen, dass für alle $k \geq 1$ $T^k(n) > n$ ist.

Man sagt: ***n* hat endliche Stoppzeit,** wenn es ein k gibt mit $T^k(n) < n$. Das kleinste solche k wird als $\boldsymbol{ST(n)}$ **= Stoppzeit von *n*** bezeichnet (andernfalls schreibt man $ST(n) = \infty$). So ist $ST(n) = 1$ genau für die ungeraden n, die die Gestalt $4\ell + 1$ haben.

Ü5: Man charakterisiere alle n mit $ST(n) = 3$ oder $= 4$.

Ein n mit endlicher Stoppzeit muss nicht unbedingt Collatz–Zahl sein, denn auch wenn für ein k $T^k(n) < n$ ist, kann $C(n)$ im weiteren Verlauf wieder gross werden. Es gilt jedoch

E5: Falls alle n endliche Stoppzeit haben, gilt die Collatz–Vermutung.
Zum Beweis werde für alle n $ST(n) < \infty$ angenommen. Dann gibt es für ein beliebig gewähltes m ein k_1 mit $T^{k_1}(m) = m_1 < m$. Auch m_1 hat endliche Stoppzeit, also existiert ein k_2 mit

$$T^{k_1+k_2}(m) = T^{k_2}(m_1) = m_2 < m_1.$$

usw., bis man bei der Eins ankommt.

Selbst wenn einige Zahlen keine Collatz–Zahlen sind, gibt es gute Gründe anzunehmen, dass auf lange Sicht fast 100% aller Zahlen Collatz–Zahlen sind.

V2:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \cdot \quad (\text{Anzahl der Collatz–Zahlen} \quad \leq N) = 1.$$

Hiervon ist man noch weit entfernt. Für die Stoppzeiten ist die entsprechende Aussage richtig.

Satz von Everett und Terras (1979).
$\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N}$ (Anzahl der $n \leq N$ mit endlicher Stoppzeit) $= 1$, d.h. „fast alle“ n haben endliche Stoppzeit.

Die Beweisidee läßt sich grob beschreiben. Für „die meisten“ $n \leq N$ sind in $Z(n, k)$ (k in Abhängigkeit von N richtig gewählt) etwa gleich viele Nullen und Einsen. Da aber der Prozess F in seiner verkleinernden Wirkung stärker ist als W im Vergrößern, folgt für solche n $T^k(n) < n$.

9. Schlussbemerkung

Es ist in diesem Rahmen auch nicht andeutungsweise möglich darzustellen, wieviele Ideen mit Methoden aus Analysis, Algebra und Wahrscheinlichkeitstheorie für die Lösung des Collatz–Problems entwickelt wurden, ohne dass die Bastion erstürmt werden konnte. Man fragt als Außenstehender vielleicht: Wozu diese Anstrengungen? Bringt die Lösung des Problems irgendeinen Nutze? Die letzte Frage kann zur Zeit nicht mit „ja“ beantwortet werden. Eine treibende Kraft ist sicher der Ehrgeiz, einem Geheimnis auf die Spur zu kommen, und dies im Wettstreit mit vielen anderen. Man kann es vergleichen mit dem Bestreben, als Erster die Eiger–Nordwand durchstiegen zu haben, wobei in der Mathematik zum Glück keine Lebensgefahr besteht. Andererseits läßt sich nie voraussagen, welche mathematischen Errungenschaften einmal für Anwendungen wichtig sein können. Es gibt zahlreiche Beispiele dafür, dass Physiker bei der Formulierung ihrer Theorie auf mathematische Ergebnisse zurückgreifen konnten, die nur um ihrer selbst willen erzielt worden waren. Beispielsweise Albert Einstein mit der Relativitätstheorie. So auch beim Collatz–Problem: Es ist zur Zeit nicht zu sehen, dass seine Lösung irgendeinen Nutzen bringen sollte, aber es kann keineswegs ausgeschlossen werden.