Rechnen mit ungenauen Daten

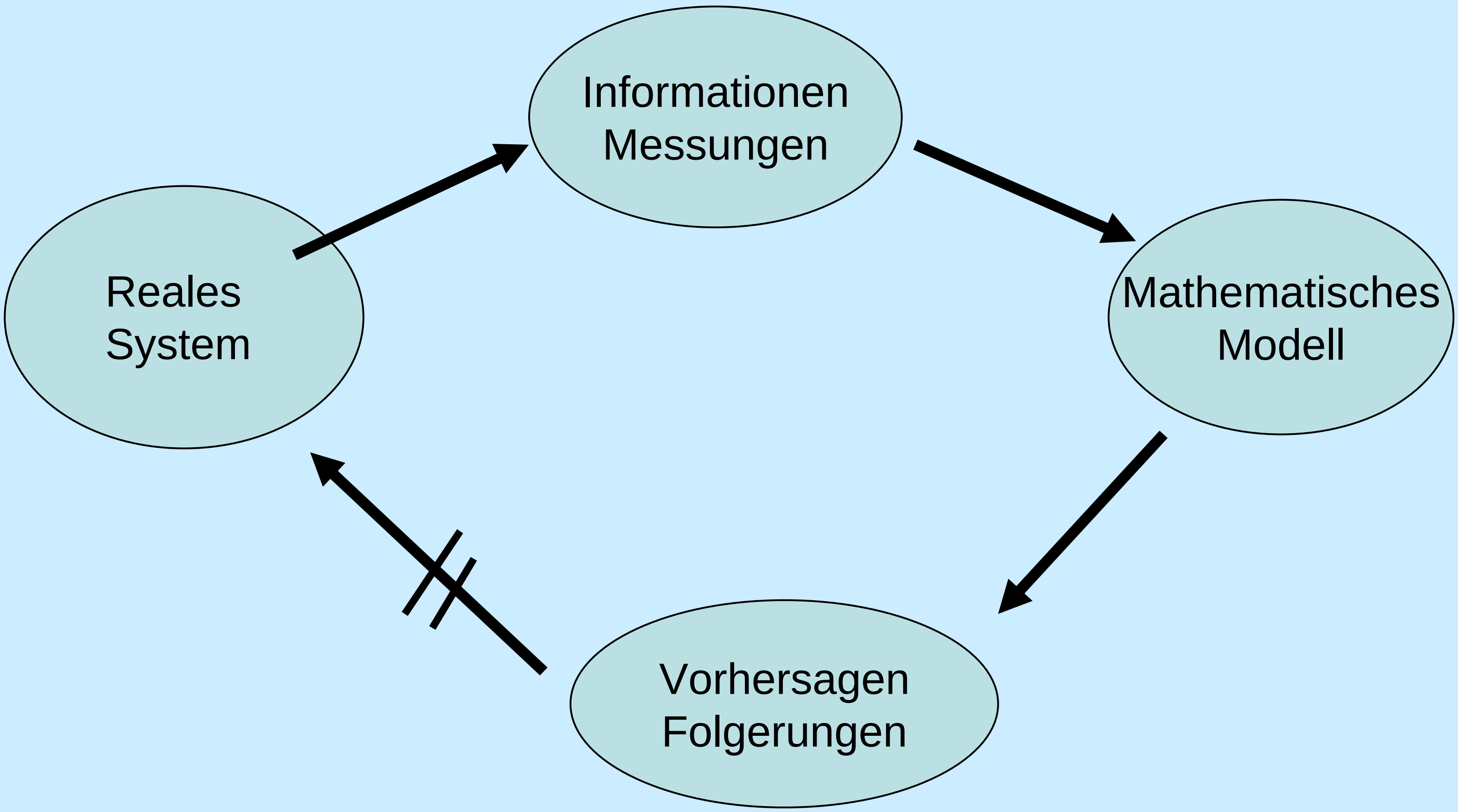
„Der Mangel an mathematischer Bildung gibt sich durch nichts so auffallend zu erkennen, wie durch maßlose Schärfe im Zahlenrechnen“.

C.F. Gauß

Inhalte:

- Einführung
- Fehler bei der Volumenmessung eines Quaders
- Fehlergesetze
- Fehlerschätzung
- Ausblick

Mathematik und Realität



Typisch für realitätsnahe Aufgaben:

→ Daten entstammen in der Regel Messungen

→ Messungen haben (stets) einen Fehler

→ Fehler bewirken Ungenauigkeit in den Ergebnissen

→ Schüler haben Probleme Ungenauigkeiten richtig einzuschätzen!

Die Messfehlerproblematik tritt schon früh im Unterricht auf!

→ Bisher widmen wir dem Problem **nicht** die nötige Aufmerksamkeit!

Auffassungen von Schülern/ Lehrern/ Schulbüchern zum Thema Messfehler

• Die Ergebnisse einer Mathematikaufgabe sind exakt!
→ Fehler gibt es in der Mathematik nicht.

• Die Mathematik macht nur **theoretische** Aussagen,
in der Wirklichkeit ist alles ganz anders!
→ Mathematik hat keine „praktische“ Bedeutung

• Bei Aufgaben aus Anwendungen sind alle Ergebnisse auf **zwei Stellen nach dem Komma** zu runden!

• Rechenergebnisse sind bei Anwendungen **sinnvoll** zu runden!

Erste Erfahrungen mit Ungenauigkeiten in der Unterstufe

Miss die Seiten eines Quaders:

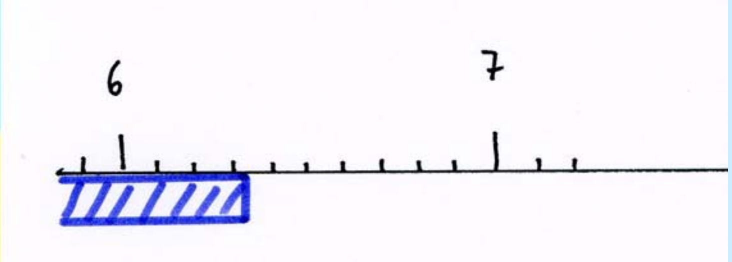
- Länge: *12,4cm*
- Breite: *5,5cm*
- Höhe: *6,8cm*
- TR berechnet daraus: V=463,76cm^3

Was sollen wir angeben: V=463,76cm^3? Ist V=464cm^3 sinnvoller?

Umrechnen in mm^3: V=463760mm^3!
Umrechnen in dm^3 : V=*0,46376*dm^3 !
Jeweils auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet:
463760,00mm^3 bzw. *0,46*dm^3!
→ unterschiedliche Werte!

- Eine Rundungsregel feste Anzahl von Dezimalstellen ist nicht sinnvoll!
- Was heißt sinnvoll runden?

Ablesefehler bei Skalen



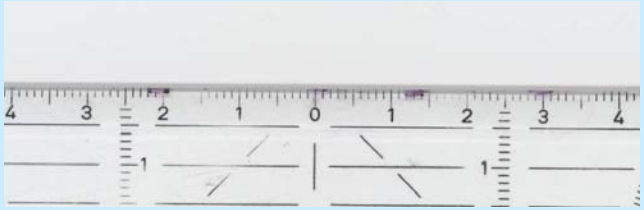
- Die „Schätzer“: $l \approx 6{,}33cm$
- Die „Einschließer“: $6{,}3cm \leq l \leq 6{,}4cm$
- Die „Bestableser“ : $l = 6{,}3cm \pm 0{,}05cm$

Ablesungenauigkeiten bei Längenmessung

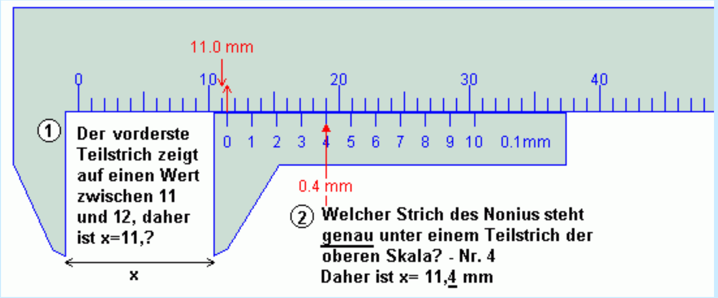
Schüler mit unterschiedlich genauen Messgeräten messen lassen!! → auch im Mathematikunterricht!

- Sportmaßband: Ablesefehler $\pm 5mm$

- Geo Dreieck: Ablesefehler $\pm 0,5mm$



- Schiebelehre: Ablesefehler $\pm 0,05mm$



Schüler messen Längen von konkreten Gegenständen
→ Bausteine, Tischplatten, Holzquader, ….

Beispiel 1: 20 quadratische Betonplatten werden direkt aneinandergelegt. Wie lang wird die Reihe?
Messung einer Platte:

Sportmaßband Messwert 25cm: $24,5cm \leq a \leq 25,5cm$

Meterstab Messwert 24.9cm: $24,85cm \leq a \leq 24,95cm$

Gesamtlänge $490cm \leq a \leq 510cm$ Fehler $\pm 10cm$

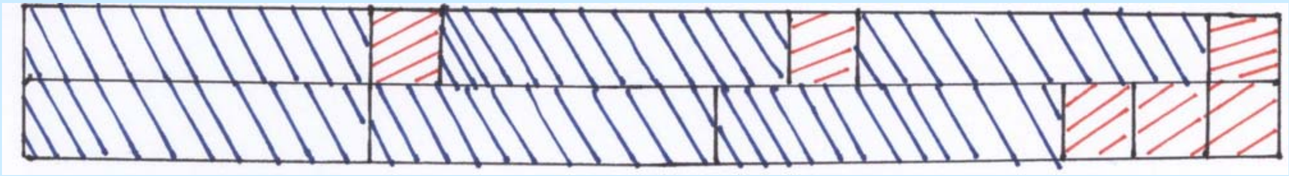
bzw. $497cm \leq a \leq 499cm$ Fehler $\pm 1cm$

Welche Aussage ist aussagekräftiger?
Welche ist zuverlässiger?

Grafische Veranschaulichung

Eine Strecke mit Fehler:

3 dieser Strecken addiert mit Gesamtfehler



Beispiel 2: Volumen eines Holzquaders

Sportmaßband	12cm	Länge →	$11,5cm \le l \le 12,5cm$
	5cm	Breite →	$4,5cm \le b \le 5,5cm$
	7cm	Höhe →	$6,5cm \le h \le 7,5cm$
TR-Wert:	420cm^3	**Volumen**	$336,3cm^3 \le V \le 515,6cm^3$
Geodreieck	12,4cm	Länge	$12,35cm \le l \le 12,45cm$
	5,5cm	Breite	$5,45cm \le h \le 5,55cm$
	6,8cm	Höhe	$6,75cm \le b \le 6,85cm$
TR-Wert:	463,76cm^3	**Volumen**	$454,3cm^3 \le V \le 473,3cm^3$
Schiebelehre	12,39cm	Länge	$12,385cm \le l \le 12,395cm$
	5,53cm	Breite	$5,525cm \le b \le 5,535cm$
	6,77cm	Höhe	$6,765cm \le h \le 6,775cm$
TR-Wert:	463,85806cm^3	**Volumen**	$462,9cm^3 \le V \le 464,8cm^3$

Zwei Längen werden genau, eine Länge wird ungenau gemessen

Holzquader

Länge	$11,5cm \le l \le 12,5cm$	Sportmaßband
Breite	$5,525cm \le b \le 5,535cm$	Schiebelehre
Höhe	$6,765cm \le h \le 6,775cm$	Schiebelehre

TR-Wert: $449,2cm^3$ Volumen $429,8cm^3 < V < 468,8cm^3$

Der Fehler ist **ähnlich groß**, wie wenn alle Größen ungenau (mit Sportmaßband) gemessen werden!

Auf dieser Lernstufe lassen sich folgende Erkenntnisse erarbeiten:

- Messfehler können durch Intervalle erfasst werden.
- Ungenaue Messwerte bedingen ungenaue Rechenergebnisse.
- Schranken für die Rechenergebnisse erhält man durch Betrachtung größter und kleinster möglicher Ergebnisse.
- Je genauer die Messwerte sind, desto weniger schwanken die möglichen Resultate.
- Für genaue Messwerte benötigt man genaue Messgeräte.
- Ein einziger sehr ungenauer Messwert macht ein Rechenergebnis sehr ungenau.

Klasse 8/9: Einfache Fehlerrechnung

Was kann man über den Fehler von Summe, Differenz, Produkt, Quotient zweier Messwerte aussagen?

Ein Messergebnis wird geschrieben als $a \pm \Delta a$,

→ dabei ist $\boldsymbol{a}$ der abgelesene Messwert und
→ Δa der **absolute Messfehler**; z.B.

$$2,4kg \pm 0,2kg \Leftrightarrow 2,2kg \le m \le 2,6kg$$

Der **relative Fehler** wird festgelegt durch $\dfrac{\Delta a}{a}$ und

in % angegeben; z.B. obige Messung $\dfrac{0,2}{2,4} = 8,3\%$

Bei einer Messung einer „**kurzen**“ Strecke $a = 4cm \pm 0,5cm$ mit dem Sportmaßband, sind der

- absolute Fehler $\Delta a = 0,5cm$ groß;

- der relative Fehler $\frac{\Delta a}{a} = 12,5\%$ groß.

Bei der Messung einer „**langen**“ Strecke $a = 50,52m \pm 0,5cm$ mit dem Sportmaßband ist der

- absolute Fehler $\Delta a = 0,5cm$ groß,

- der relative Fehler $\frac{\Delta a}{a} \approx 0,01\%$ aber sehr klein!

Fehler der Summe/Differenz von zwei Messwerten

$$(8 \pm 2) + (4 \pm 1) = [8-2\,;8+2] + [4-1\,;4+1] = ?$$

$$[8-2\,;8+2] + [4-1\,;4+1] = [(8-2)+(4-1)\,;(8+2)+(4+1)] = [8+4-3\,;8+4+3]$$

Demnach ist der absolute Fehler der Summe = 3 = 2+1 = Summe der absoluten Fehler der Summanden!

$$(a \pm \Delta a) + (b \pm \Delta b) = a + b \pm (\Delta a + \Delta b)$$

Ein analoges Fehlergesetz gilt für die Differenz:

$$(a \pm \Delta a) - (b \pm \Delta b) = a - b \pm (\Delta a + \Delta b)$$

Fehler beim Produkt/Quotient von zwei positiven Messintervallen

Es seien $[a-\Delta a \mid a+\Delta a]$ und $[b-\Delta b \mid b+\Delta b]$ **positive** Messintervalle.

Dann berechnet sich das Produktmessintervall zu:

$$(a \pm \Delta a)\cdot(b \pm \Delta b) = [(a-\Delta a)\cdot(b-\Delta b) \mid (a+\Delta a)\cdot(b+\Delta b)]$$

Dies lässt sich umformen zu:

$$[a\cdot b-\Delta a\cdot b-\Delta b\cdot a+\Delta a\cdot\Delta b \mid a\cdot b+\Delta a\cdot b+\Delta b\cdot a+\Delta a\cdot\Delta b]$$

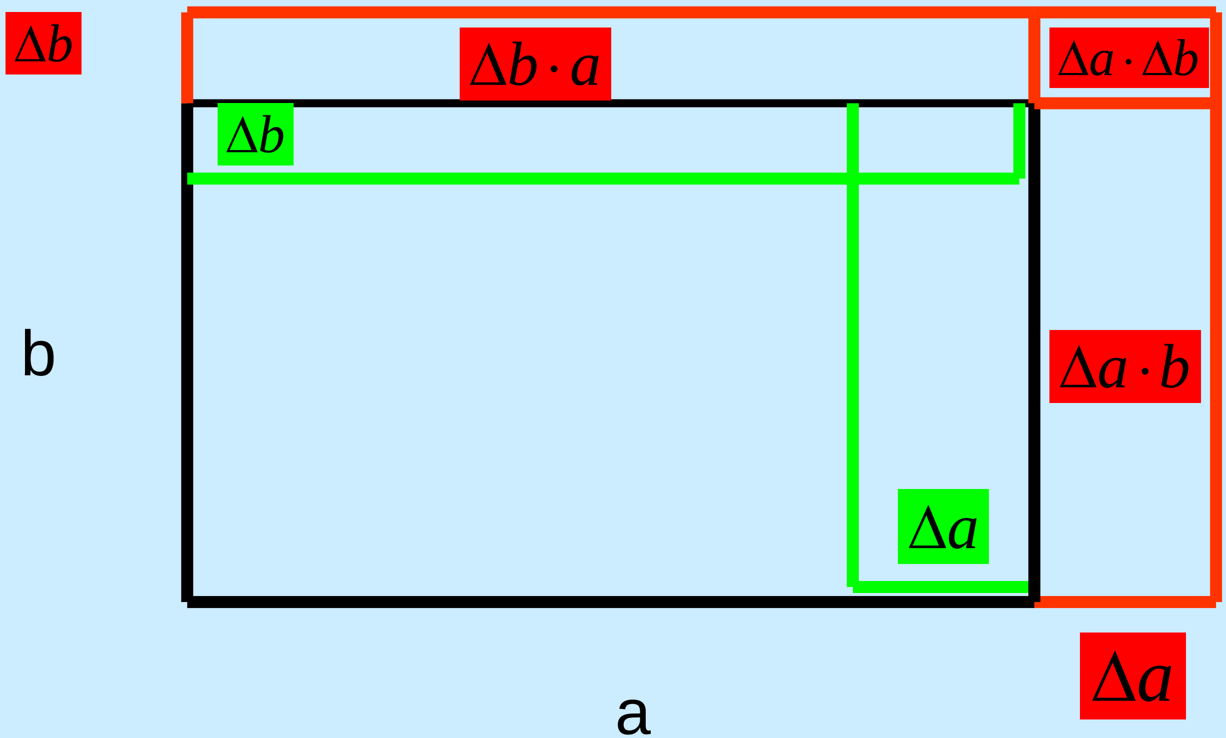
Demnach gilt für den absoluten Fehler des Produkts:

$$\frac{1}{2}\cdot(a\cdot b+\Delta a\cdot b+\Delta b\cdot a+\Delta a\cdot\Delta b-a\cdot b+\Delta a\cdot b+\Delta b\cdot a-\Delta a\cdot\Delta b) = \frac{1}{2}(2\Delta a\cdot b+2\Delta b\cdot a)$$

Also gilt für den relativen Fehler des Produkts: $\frac{\Delta a\cdot b+\Delta b\cdot a}{a\cdot b} = \frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}$

Bei der **Multiplikation/Division** von zwei Messwerten **addieren** sich die **relativen** Fehler!

Grafische Veranschaulichung für positive Messintervalle



Bei der Division ist die Herleitung schwieriger und das Gesetz gilt nur näherungsweise → nur Betrachtung von Beispielen

Beispiel: a) zwei Längen gemessen; Differenz?

$$c = 6,0cm \pm 0,04cm,\ \ p = 3,7cm \pm 0,08cm$$

$$\Rightarrow q = c - p = 2,3cm \pm 0,12cm \Leftrightarrow 2,18cm \leq q \leq 2,42cm$$

Beispiel: b) Weg und Zeit gemessen; Geschwindigkeit?

$$s = 3,00m \pm 0,01m,\ t = 1,21s \pm 0,02s$$

$$\frac{\Delta s}{s} = 0,3\%,\ \frac{\Delta t}{t} = 1,7\% \Rightarrow \frac{\Delta v}{v} = 2\%$$

$$\Rightarrow v = 2,48\frac{m}{s} \pm 0,05\frac{m}{s} \Rightarrow 2,43\frac{m}{s} \leq v \leq 2,53\frac{m}{s}$$

Fehlerschätzungsmethode Klasse 8/9/10

Fehlerrechnungen sind umfangreich und zeitraubend!
Kann man ökonomischer arbeiten, ohne den Fehler ganz aus den Augen zu verlieren?

→**Methode Fehlerschätzung**

In der Angabe eines Messwerts ist sein **Fehler** codiert!

23,53cm bedeutet $23{,}53cm \pm 0{,}005cm$,
Fehler stets *5* Einheiten der nicht mehr notierten Stelle.

1m bedeutet $1m \pm 0{,}5m$,
also einen **sehr ungenau gemessenen** Wert.

Dagegen ist $1{,}00m = 1{,}00m \pm 0{,}005m$ hundertmal genauer!
Konsequenz: $1m \neq 1{,}00m$

Der absolute Fehler ist für Messwerte mit der gleichen **Anzahl von gültigen Dezimalen** (bei gleicher Einheit) gleich groß!

$$a = 40,37m \Rightarrow \Delta a = 0,005m$$

$$b = 2,71m \Rightarrow \Delta b = 0,005m$$

$$c = 1,7m \Rightarrow \Delta c = 0,05m$$

Der relative Fehler ist bei Messwerten mit gleicher **Anzahl von gültigen Ziffern** ungefähr gleich groß!

$$a = 5,0 \cdot 10^3 m \Rightarrow \frac{\Delta a}{a} = \frac{0,05 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^3} = 1\% \quad zwei \quad gültige \quad Ziffern$$

$$b = 5,0 \cdot 10^1 m \Rightarrow \frac{\Delta b}{b} = \frac{0,05 \cdot 10^1}{5 \cdot 10^1} = 1\% \quad zwei \quad gültigeZiffern$$

$$c = 5 \cdot 10^1 m \Rightarrow \frac{\Delta c}{c} = \frac{0,5 \cdot 10^1}{5 \cdot 10^1} = 10\% \quad eine \quad gültige \quad Ziffer$$

Bei anderer Mantisse ändert sich dies etwas:

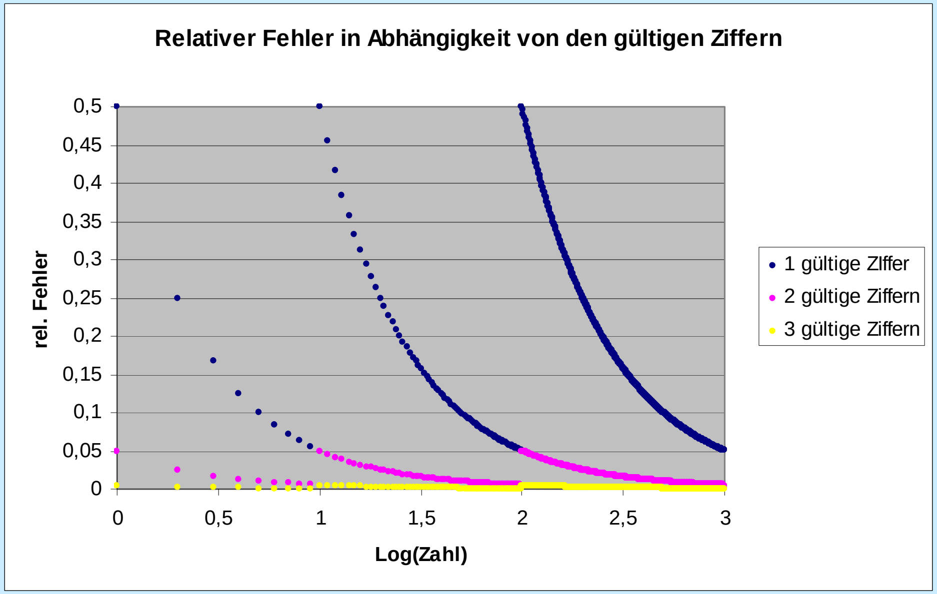
$$a = 2,0 \cdot 10^3 m \Rightarrow \frac{\Delta a}{a} = \frac{0,05 \cdot 10^3}{2,0 \cdot 10^3} = 2,5\%$$

$$a = 2,0 \cdot 10^1 m \Rightarrow \frac{\Delta a}{a} = \frac{0,05 \cdot 10^1}{2 \cdot 10^1} = 2,5\%$$

Entscheidend ist aber die Zahl der gültigen Ziffern:

$$2 \cdot 10^3 m \Rightarrow \frac{\Delta a}{a} = \frac{0,5 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^3} = 25\%$$

Man erhält für eine feste Anzahl von gültigen Ziffern für den relativen Fehler eine Funktion, die sich in Abständen von
… 0,01- 0,1 | 0,1-1 | 1- 10 | 10-100 | …. wiederholt!



Grundregel 1:

Addiert/Subtrahiert man zwei Messwerte (mit gleicher Einheit), so wird das Endergebnis auf so viele **gültige Dezimalen** gerundet, wie sie der **ungenaueste** eingehende Wert besitzt!

Beispiel:

Gemessen: c=6,03cm, p=3,7cm,
erster Messwert 2 gültige Dezimalen,
zweiter Messwert 1 gültige Dezimale,
also *q = c-p = 2,3cm*.
Der Fehler wird auf *0,05cm* geschätzt!

tatsächlich ist das Fehlerintervall: $2,275cm \leq q \leq 2,385cm$

<u>Grundregel 2:</u>
Multipliziert/Dividiert man zwei Messwerte,
so wird das Ergebnis auf so viele **gültige Ziffern** gerundet, wie sie der **ungenaueste** Messwert besitzt

Beispiel 1: *s=3,00m* und t=1,21s ergibt *v= s/t =2,48m/s*,
geschätzter Fehler *0,005m/s*,
tatsächlich $2,46\frac{m}{s} \le v \le 2,49\frac{m}{s}$

Beispiel 2: *s=3m, t=1,21s*, ergibt *v= s/t =2m/s*,
Fehler geschätzt *0,5m/s*,

tatsächlich $2,05\frac{m}{s} \le v \le 2,91\frac{m}{s}$

→ Messwertangaben erfordern Disziplin
vom Aufgabensteller!

Beispiele zum Umgang mit Messwerten aus Schulbüchern

- Aus Dorn - Bader Physik 11

Musteraufgaben

1. Geschwindigkeit und Zeit sind bekannt. $\boldsymbol{v, t \Rightarrow s}$

Wie groß ist der zurückgelegte Weg?

Nach 3 Sekunden erreicht ein Fahrzeug die Geschwindigkeit 0,52 m/s. Wir berechnen daraus zunächst den Beschleunigungswert. Nach dem t-v-Gesetz ist $a = v/t = (0{,}52\ \mathrm{m \cdot s^{-1}})/3\ \mathrm{s} = 0{,}173\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Wie groß ist der in 3 s zurückgelegte Weg?

Lösung: Es gilt $s(t) = \frac{1}{2}\, a\, t^2$, also

$s(3\ \mathrm{s}) = 0{,}5 \cdot 0{,}173\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \cdot (3\ \mathrm{s})^2 = \mathbf{0{,}78\ m}$.

Aus Lambacher - Schweizer Klasse 10, S.82

13 Berechne für einen Kreis mit dem Radius r den Flächeninhalt A des Kreisausschnittes mit dem Mittelpunktswinkel α.

a) $r = 9\,\text{m}$; $\alpha = 30°$ b) $r = 18\,\text{m}$; $\alpha = 18°$ c) $r = 12\,\text{dm}$; $\alpha = 118°$

Lösungsbuch:

S. 82 **13** a) $21{,}21\ \text{m}^2$ b) $50{,}89\ \text{m}^2$ c) $148{,}28\ \text{dm}^2$

Wie wären die Ergebnisse korrekt zu runden?

Aus Mathematik BW Klasse 10 (Cornelsen) S. 220

Von einem dreiseitigen geraden Prisma sind gegeben $h = 8\,\text{cm}$, $b = 5\,\text{cm}$, $c = 6\,\text{cm}$ und $\gamma = 90°$ (Bild 32).

$$V = A(G) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{c^2 - b^2} \cdot b \cdot h \approx 66{,}33\ \text{cm}^3.$$

Aufgabe Abiturprüfung 2004/05 Berufliches Gymnasium:

„In einer Höhle wurden Holzkohlereste entdeckt, die noch **13%** des ursprünglichen Gehalts an C^{14} aufweisen.

C^{14} hat eine Halbwertszeit von **5730** Jahren.

Wie alt ist die Probe?"

Lösung Handreichung:

$$\frac{1}{2}\cdot N_0 = N_0 \cdot e^{-k\cdot 5730} \Rightarrow k = 1{,}21\cdot 10^{-4}$$

$$\frac{13}{100}\cdot N_0 = N_0 \cdot e^{-kt} \Rightarrow t \approx 16861\ Jahre$$

- In Schulbüchern werden Daten als exakte Dezimalzahlen interpretiert!
- Obwohl diese Daten in der Realität durch Messungen gewonnen werden.
- Ein verantwortlicher Umgang mit Fehlern wird nicht geschult!

Ausblick: Weitere Arten von Fehlern/Unsicherheiten!

- **Ablesefehler** von Messgeräten sind die am einfachsten zu behandelnden Fehler.
- Schwieriger zu erfassen sind **systematische** Fehler und **statistische** Fehler.
- **Abbruchfehler** bei iterativen mathematischen Verfahren

  kann eventuell abgeschätzt werden.
- **Modellierungsfehler**

  auf Grund unvollkommener mathematischer Modelle → schwierig abzuschätzen
- In der **Wahrscheinlichkeitsrechnung** haben wir es grundsätzlich mit Unsicherheit zu tun.

Fazit:

→bei Anwendungen der Mathematik haben wir es grundsätzlich immer mit Unsicherheit und Ungenauigkeit zu tun

→wir können den Grad der Genauigkeit einschätzen!

→dies ist ein **wesentlicher** Teil der Interpretation einer Lösung in Bezug auf die Realität!

W. Lietzmann 1923

Die schon in der Mittelstufe erzielte Einsicht in die Grenzen der Genauigkeit solcher Rechnungen, die mit Messungen zusammenhängen, wird in den oberen Klassen in allen geeigneten Fällen zu einer Abschätzung der im Endergebnis erreichten Genauigkeit gesteigert.

Von diesem Ziel ist die Unterrichtspraxis 80 Jahre danach noch meilenweit entfernt!