

# Elementargeometrie

Universität Freiburg, SS 2019

Nadine Große  
überarbeitet von Ksenia Fedosova

Skript - Version vom 25. Juli 2019



# Inhaltsverzeichnis

<b>I. Axiomatik der euklidischen Geometrie</b>	<b>1</b>
I.1. Inzidenzstruktur . . . . .	1
I.2. Parallelität und affine Ebenen . . . . .	3
I.3. Anordnungsaxiome . . . . .	4
I.4. Kongruenzaxiome . . . . .	7
I.5. Hilberts Axiome der euklidischen Geometrie . . . . .	10
I.6. Das kartesische Modell der euklidischen Geometrie . . . . .	12
I.6.1. Abstandsfunktion, Isometrien – Bewegungsgruppe . . . . .	13
I.6.2. Trigonometrie in der euklidischen Ebene . . . . .	15
<b>II. Ebene hyperbolische Geometrie</b>	<b>17</b>
II.1. Axiomatischer Zugang . . . . .	17
II.2. Die hyperbolische Halbebene . . . . .	17
II.3. Andere hyperbolische Modelle . . . . .	20
II.3.1. Das Poincaresche Kreisscheibenmodell . . . . .	20
II.4. Isometriegruppe der hyperbolischen Ebene . . . . .	20
II.4.1. Isometriegruppe für $\mathbb{H}$ . . . . .	21
II.4.2. Isometriegruppe für $\mathbb{D}$ . . . . .	22
II.5. Trigonometrie der hyperbolischen Ebene . . . . .	23
<b>III. Einschub: Kegelschnitte</b>	<b>27</b>
<b>IV. Sphärische Geometrie</b>	<b>31</b>
IV.1. Axiomatik . . . . .	31
IV.2. Abstände, Winkel, Trigonometrie und Isometrien . . . . .	31
<b>Vergleich: Euklidische, hyperbolische und sphärische Geometrie</b>	<b>35</b>
<b>V. Projektive Geometrie</b>	<b>37</b>
V.1. Projektionen . . . . .	37
V.2. Projektive Räume . . . . .	37
V.3. Zusammenhang projektive und affine Geometrie (über Vektorräumen) . . . . .	39
<b>VI. Polygone und Polyeder</b>	<b>41</b>
VI.1. Konvexe Polytope . . . . .	41
VI.2. Konvexe Polgone . . . . .	41
VI.3. Konvexe Polyeder . . . . .	42



# I. Axiomatik der euklidischen Geometrie

## I.1. Inzidenzstruktur

**Definition I.1.1.** Seien  $P, G$  Mengen und  $I \subseteq P \times G$  eine Teilmenge des kartesischen Produktes, dann heißt das Tripel  $\mathcal{I} := (P, G, I)$  eine *Inzidenzstruktur*.<sup>†</sup> Die Elemente der Menge  $P$  heißen *Punkte* und die Elemente der Menge  $G$  heißen *Geraden* der Inzidenzstruktur  $\mathcal{I}$ .

Bis auf die Bezeichnungen Punkte und Geraden hat eine Inzidenzstruktur bisher keine geometrische Eigenschaft.

**Definition I.1.2.** Ein Punkt  $p \in P$  liegt genau dann auf einer Geraden  $g \in G$ , falls  $(p, g) \in I$  gilt. Wir sagen zwei Geraden *schneiden sich*, falls es einen Punkt gibt, der auf beiden Geraden liegt.

**Definition I.1.3.** Inzidenzstrukturen  $\mathcal{I} = (P, G, I)$  und  $\mathcal{I}' = (P', G', I')$  heißen *isomorph*, wenn es bijektive Abbildungen  $\sigma: P \rightarrow P'$  und  $\tau: G \rightarrow G'$  gibt, so dass  $(p, g) \in I$  genau dann gilt, wenn  $(\sigma(p), \tau(g)) \in I'$  gilt. Wir kennzeichnen einen Isomorphismus durch  $(\sigma, \tau): \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}'$ .

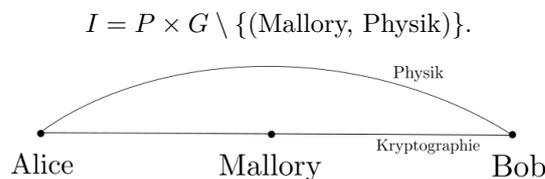
**Definition I.1.4.** Sei  $(P, G, I)$  eine Inzidenzstruktur und  $X \subseteq P$  eine Menge von Punkten, dann heißen die Punkte aus  $X$  *kollinear*, wenn es ein  $g \in G$  ( $g$  element groß  $G$ ) mit  $(x, g) \in I$  für alle  $x \in X$  gibt (d.h. die Punkte aus  $X$  liegen alle auf einer Geraden).

Die meisten von uns betrachteten Geometrien sind spezielle Inzidenzgeometrien. Eine *Inzidenzgeometrie* wird durch eine Inzidenzstruktur  $\mathcal{I} = (P, G, I)$  gegeben, welche die *Inzidenzaxiome* (I1)–(I3) erfüllt:

- (I1) Durch je zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade.
- (I2) Jede Gerade enthält mindestens zwei Punkte.
- (I3) Es gibt drei nicht kollineare Punkte (d.h. es gibt drei Punkte, die nicht alle auf einer Geraden liegen).

Das Axiom (I3) besagt, dass in Inzidenzgeometrien ein Dreieck existiert.

**Beispiel I.1.5** (Nicht-Beispiel). Wir setzen die Menge  $P = \{\text{Alice, Bob, Mallory}\}$ ,  $G := \{\text{Kryptographie, Physik}\}$ . Es gelte nun  $(p, g) \in I \subset P \times G$ , falls  $g$  ein Hobby von  $p$  ist. Nehmen wir an, Alice und Bob mögen Kryptographie und Physik und Mallory mag nur Kryptographie. Dann

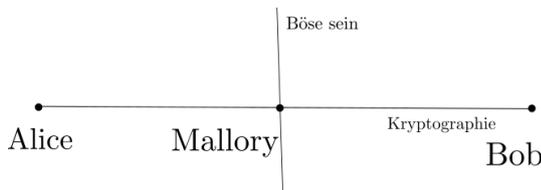


Diese Inzidenzstruktur erfüllt das erste Axiom (I1) nicht, da es zwei Punkte gibt durch die zwei verschiedene Geraden gehen.

**Beispiel I.1.6.** [Nicht-Beispiel] Wir setzen die Menge  $P$  wie vorher,  $G := \{\text{Kryptographie, Bösessein}\}$ . Nehmen wir an, Alice, Bob und Mallory mögen Kryptographie, und Mallory mag es böse zu sein.

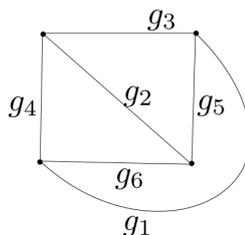
$$I = (\text{Alice, Kryptographie}) \cup (\text{Bob, Kryptographie}) \\ \cup (\text{Mallory, Kryptographie}) \cup (\text{Mallory, Böse sein}).$$

<sup>†</sup>Inzidenz (von lat. incidere ‚fallen‘)



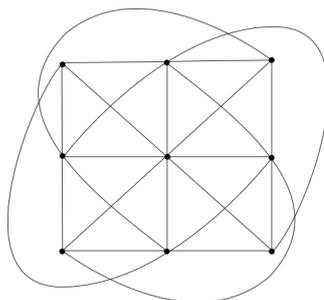
Eine Inzidenzstruktur erfüllt (I2) nicht, weil die Gerade 'Böse sein' nur einen Punkt enthält.

**Beispiel I.1.7.**  $P$  enthält  $2 \cdot 2 = 4$  Punkte, und  $G$  enthält  $2 \cdot 2 + 2 = 6$  Geraden. Die Inzidenzstruktur ist wie auf diesem Bild:



Die Inzidenzstruktur erfüllt die Inzidenzaxiomen (I1-I3). Beachten Sie, dass die Geraden  $g_1$  und  $g_2$  sich nicht schneiden.

**Beispiel I.1.8.**  $P$  enthält  $3 \cdot 3 = 9$  Punkte, und  $G$  enthält 12 Geraden. Die Inzidenzstruktur ist wie auf dem Bild:



**Beispiel I.1.9.** Wir betrachten den Vektorraum  $P = \mathbb{R}^n$ . Auch die Geraden unserer Inzidenzstruktur  $(P, G, I)$  sollen die 'normalen' Geraden in  $\mathbb{R}^n$  werden und  $p \in P$  indiziert mit einer Geraden  $g$  genau dann, wenn  $p$  eine Element der 'normalen' Geraden  $g \subset \mathbb{R}^n$  ist. Wir wollen das jetzt formalisieren: Eine Gerade in  $\mathbb{R}^n$  kann mittels  $(a$  plus  $R$  mal  $b)$   $a + \mathbb{R} \cdot b = \{a + \lambda b \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n$  mit  $b \in \mathbb{R}_*^n := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$  parametrisiert werden. Dabei beschreiben aber verschiedene Parametrisierungen die gleiche Gerade.

Beispiel:  $n = 2$ ,  $a_1 = a_0 = (0, 0)$ ,  $b_1 = (1, 0)$ ,  $b_2 = (2, 0)$ . Die Geraden wird mittels  $(2, 0) \cdot \mathbb{R}$  und  $(1, 0) \cdot \mathbb{R}$  parametrisiert, und das sind die gleichen Gerade.

Deshalb definieren wir Äquivalenzrelation auf der Menge der Parametrisierungen, also auf  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_*^n$ , durch  $(a, b) \sim (a', b')$  genau dann, wenn  $a + \mathbb{R} \cdot b = a' + \mathbb{R} \cdot b' \subset \mathbb{R}^n$ . Die Menge der Geraden der Inzidenzstruktur wird also durch den Quotienten  $G := \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_*^n / \sim$  beschrieben und das Paar  $(p, g = [(a, b)]) \in P \times G$  sei genau dann in  $I$ , wenn  $p \in a + \mathbb{R} \cdot b \subset \mathbb{R}^n$ . Damit haben wir eine Inzidenzstruktur  $\mathcal{I} = (P, G, I)$  definiert. Man überprüft leicht, dass sie (I1) und (I2) erfüllt. Falls  $n > 1$  ist, ist auch (I3) erfüllt. Für  $n = 2$  nennt man diese Geometrie *kartesische Ebene*.

**Beispiel I.1.10.** Die Objekte einer Inzidenzstruktur heißen zwar Punkte bzw. Geraden, müssen a priori aber erst mal nichts mit Geometrie zu tun haben. Wir setzen  $P := \{\text{Anna, Berta, Charlie, Doris, Emil}\}$ ,  $G := \{\text{lesen, kochen, tanzen, reisen, stricken}\}$ . Es gelte  $(p, g) \in I \subset P \times G$ , falls  $g$  ein Hobby von  $p$  ist und  $I$  sei durch die Tabelle in Abb. I.1 gegeben. Die Inzidenzstruktur  $(P, G, I)$  erfüllt (I1)–(I3).

Auch  $\mathcal{I}' = (P', G', I')$  gegeben in Abb. I.1 mittels Punkten und Geraden ist eine Inzidenzstruktur. Die beiden Inzidenzstrukturen  $\mathcal{I}$  und  $\mathcal{I}'$  sind isomorph.

	Anna	Berta	Charlie	Doris	Emil
lesen	ja	ja	ja	ja	nein
tanzen	ja	nein	nein	nein	ja
kochen	nein	ja	nein	nein	ja
reisen	nein	nein	ja	nein	ja
stricken	nein	nein	nein	ja	ja

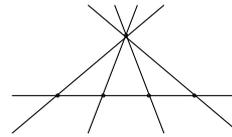


Abb. I.1.: Links: Inzidenztabelle zu Bsp. I.1.10, Rechts: Isomorphe Inzidenzstruktur.

**Beispiel I.1.11.** Die Inzidenzstruktur der sphärischen Geometrie ist gegeben durch

$$P = S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

$$G = \{E \cap S^2 \mid E \subset \mathbb{R}^3 \text{ ist eine Ebene durch den Ursprung}\} = \{\text{Großkreise}\}$$

und  $(p, g) \in I$  genau dann, wenn  $p$  auf dem Großkreis  $g$  liegt. Diese Inzidenzstruktur erfüllt (I2) und (I3) aber nicht das Axiom (I1) (denn zwei Großkreise haben immer zwei Punkte gemeinsam).

Als Beispiel: Längengrade auf einem Globus sind Großkreise, Breitenkreise hingegen nicht.

**Bemerkung I.1.12.** Zwei verschiedene Geraden einer Inzidenzstruktur, die (I1) erfüllt, haben höchstens einen gemeinsamen Punkt (d.h. es gibt höchstens einen Punkt, der auf beiden Geraden liegt).

*Beweis.* Seien  $g$  und  $h$  zwei Geraden, die die Punkte  $p$  und  $q$  gemeinsam haben. Sei  $p \neq q$ . Dann gibt es nach Axiom (I1) eine eindeutige Gerade durch  $p$  und  $q$ . Also ist  $g = h$ .  $\square$

## I.2. Parallelität und affine Ebenen

Ein weiteres wichtiges Inzidenzaxiom der euklidischen Ebene wird das Parallelenaxiom sein.

**Definition I.2.1.** Geraden  $g$  und  $h$  sind *parallel* (Bezeichnung  $g \parallel h$ ), wenn  $g$  und  $h$  keinen gemeinsamen Punkt haben oder es gilt  $g = h$ .

**Bemerkung I.2.2.** Im  $\mathbb{R}^n$  gibt es schon einen Begriff von Parallelität (unabhängig von der Inzidenzstruktur): Zwei Geraden im  $\mathbb{R}^n$  werden normalerweise parallel genannt, wenn sie den gleichen Richtungsvektor besitzen. Betrachten wir nun die Inzidenzstruktur auf  $\mathbb{R}^n$ , vgl. Beispiel I.1.9. Dann gibt uns obige Definition einen anderen Begriff von Parallelität. Nur im  $\mathbb{R}^1$  und  $\mathbb{R}^2$  stimmen diese überein. Im  $\mathbb{R}^3$  gibt es zum Beispiel noch windschiefe Geraden, siehe Bild, die nicht den gleichen Richtungsvektor besitzen, aber auch keinen Punkt gemeinsam haben.

Man kann verschiedene Parallelenaxiome formulieren, z.B.:

- (P) (Parallelenaxiom) Für jede Gerade  $g$  und jeden Punkt  $p$ , der nicht auf  $g$  liegt, gibt es höchstens eine Gerade  $h$  durch  $p$  mit  $g \cap h = \emptyset$  ( $g \cap h = \emptyset$  gilt per Definition gdw.  $g$  und  $h$  keinen gemeinsamen Punkt haben).
- (PE) (Strenges Parallelenaxiom) Für jede Gerade  $h$  und jeden Punkt  $p$  von  $\mathcal{I}$  gibt es genau eine durch  $p$  verlaufende Gerade  $g$ , die parallel zu  $h$  ist.

**Definition I.2.3.** Eine Inzidenzstruktur  $\mathcal{I}$  heißt *affine Ebene*, wenn sie den Axiomen (I1),(I2) und (I3) und dem strengen Parallelenaxiom (PE) genügt.

Den Begriff des affinen Raumes kennen wir bereits aus der linearen Algebra, zum Beispiel ist die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems ein affiner Raum. Weitere Beispiele: Beispiel I.1.6 und I.1.7. Es zeigt sich, dass eine affine Ebene (mit endlicher Anzahl von Punkten) einige sehr einschränkende Eigenschaften aufweist.

**Satz I.2.4.**

- (a) Zwei Geraden in einer affinen Ebene besitzen eine gleichmächtige Anzahl von Punkten.

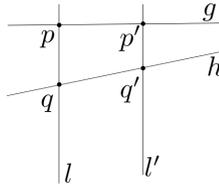
## I. Axiomatik der euklidischen Geometrie

(b) *Besitzt eine Gerade der affinen Ebene genau  $n$  Punkte, dann gibt es genau  $n^2$  Punkte und  $n^2 + n$  Geraden in dieser affinen Ebene.*

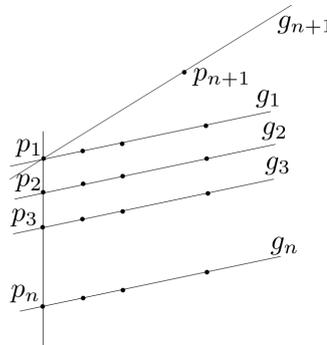
Wir werden das in der nächsten Vorlesung beweisen.

*Beweis.* Zu a): Sei  $g \neq h$ . Wähle Punkte  $p$  auf  $g$  und  $q$  auf  $h$ , so dass  $p$  nicht auf  $h$  und  $q$  nicht auf  $g$  liegt. Dann gibt es eine eindeutige Gerade  $l$  durch  $p$  und  $q$ , insbesondere gilt  $g \neq l$  und  $h \neq l$ . Ist jetzt  $p'$  ein Punkt auf  $g$  und  $l'$  die eindeutige Parallele zu  $l$  durch  $p'$ , dann schneidet  $l'$  die Gerade  $h$  in höchstens einem Punkt, vgl. Bem. I.1.12. Falls kein Schnittpunkt existiert, gilt  $l' \parallel h$  und damit  $l \parallel h$  (da Parallelität eine Äquivalenzrelation ist). Das ist ein Widerspruch, da  $q$  sowohl auf  $l$  als auch auf  $h$  liegt, aber  $l \neq h$  ist (da  $p$  auf  $l$  aber nicht auf  $h$  liegt). Also schneiden sich  $l'$  und  $h$  in genau einem Punkt  $q'$ . Umgekehrt gibt es zu gegebenem Punkt  $q'$  genau eine zu  $l$  Parallele  $l'$  die  $q'$  enthält, und die Gerade  $g$  in genau einem Punkt  $p'$  schneidet. Also gibt es eine Bijektion

$$\{\text{Punkte auf } g\} \rightarrow \{\text{Punkte auf } h\}.$$



Zu b): Nach Teil a) besitzt jede Gerade genau  $n$  Punkte. Sei eine Gerade  $g_1$ , ein Punkt  $p_1$  auf  $g_1$  und ein Punkt  $p_2$ , der nicht auf  $g_1$  liegt, gegeben ( $p_2$  existiert nach (I3)). Die Gerade durch  $p_1$  und  $p_2$  enthält die Punkte  $\{p_1, \dots, p_n\}$  und schneidet  $g_1$  in  $p_1$ . Wir betrachten jetzt die Parallelen  $g_j$  zu  $g_1$  durch  $p_j$  für  $j = 1 \dots n$ . Da jede Gerade  $g_j$  genau  $n$  Punkte enthält und  $g_i$  parallel ist zu  $g_j$ , besitzt die affine Ebene mindestens  $n^2$  Punkte. Sei jetzt  $p_{n+1}$  ein Punkt, der nicht auf den  $g_i$ ,  $i = 1 \dots n$  liegt, und  $g_{n+1}$  die Gerade, welche den Punkt  $p_1$  und  $p_{n+1}$  enthält. Falls  $g_j$  und  $g_{n+1}$  für ein  $j = 2, \dots, n$  keinen Punkt gemeinsam haben, dann sind  $g_j$  und  $g_{n+1}$  parallel. Wenn  $g_1 \parallel g_j$ , ist damit aber auch  $g_1$  parallel zu  $g_{n+1}$  (Da Parallelität für affine Ebenen eine Äquivalenzrelation ist). Dies ist aber ein Widerspruch zu  $g_1 \neq g_{n+1}$  und  $p_1$  liegt auf  $g_1$  und  $g_{n+1}$ . Also schneiden sich  $g_i$  und  $g_{n+1}$  für alle  $i = 2 \dots n$ . Damit liegen aber auf  $g_{n+1}$  mindestens  $n + 1$ -Punkte und wir haben den Widerspruch. D.h. die affine Ebene enthält genau  $n^2$  Punkte.



Zur Anzahl der Geraden: Durch je zwei Punkte geht genau eine Gerade. Es gibt  $\binom{\text{Punkte in der Ebene}}{2} = \binom{n^2}{2}$  (über) Punktpaare ( $n! = n$  Fakultet). Auf jeder Geraden gibt es  $\binom{\text{Punkte auf einer Geraden}}{2} = \binom{n}{2}$  verschiedene Punktpaare. Also gibt es insgesamt  $\binom{n^2}{2} / \binom{n}{2} = n(n+1)$  verschiedene Geraden.  $\square$

### I.3. Anordnungsaxiome

In diesem Abschnitt soll es um Lagebeziehungen von Punkten bzw. Geraden gehen. Solche Beziehungen werden noch nicht durch eine Inzidenzgeometrie gegeben, weshalb wir zusätzliche Daten brauchen.

**Definition I.3.1.** Eine *Anordnung* auf einer Inzidenzgeometrie  $\mathcal{I}$  ist eine Teilmenge  $\mathcal{A} \subset P \times P \times P$ . Ist  $(p, q, r) \in \mathcal{A}$ , dann sagen wir, dass  $q$  zwischen  $p$  und  $r$  liegt. Die *Strecke* von  $p \in P$  und  $r \in P$  ist definiert als

$$\overline{pr} = \{q \in P \mid q = p, q = r, \text{ oder } (p, q, r) \in \mathcal{A}\}.$$

Die Anordnungen der euklidischen Ebene erfüllt gewisse Bedingungen, die in weiteren Axiome gefordert werden:

**Anordnungsaxiome.** (A1) Falls  $q$  zwischen  $p$  und  $r$  liegt, dann sind  $p, q, r$  paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden.

(A2) Falls  $q$  zwischen  $p$  und  $r$  liegt, dann liegt  $q$  auch zwischen  $r$  und  $p$ .

(A3) Für je zwei verschiedene Punkte  $p$  und  $q$  gibt es einen Punkt  $r$ , so dass  $q$  zwischen  $p$  und  $r$  liegt.

(A4) Von drei Punkten liegt höchstens einer zwischen den beiden anderen.

(A5) Seien  $p, q, r$  drei nicht kollineare Punkte und  $g$  eine Gerade, die keinen dieser Punkte enthält. Falls  $g$  die Strecke  $\overline{pq}$  schneidet (d.h. es gibt einen Punkt  $s$  auf  $g$  und zwischen  $p$  und  $q$ ), dann schneidet  $g$  auch genau eine der beiden Strecken  $\overline{pr}, \overline{qr}$ .

Eine Inzidenzgeometrie mit einer Anordnung, die (A1)–(A5) erfüllt, nennen wir *angeordnete Inzidenzgeometrie*.

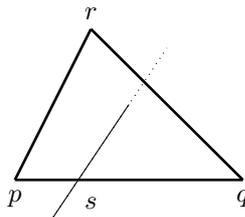


Abb. I.2.: Axiom (A5)

**Definition I.3.2.** Sei  $g$  eine Gerade und  $p, q, r$  Punkte auf  $g$ . Wir sagen, dass  $q$  und  $r$  auf der *gleichen Seite* von  $p$  auf  $g$  liegen, wenn  $p$  nicht zwischen  $q$  und  $r$  liegt. Auf diese Weise erhalten wir den *Strahl* zweier Punkte  $p \neq q$  ausgehend von  $p$ :

$$S(p, q) = \{r \in P \mid r = p, r = q \text{ oder } q \text{ liegt zwischen } p \text{ und } r \text{ oder } r \text{ liegt zwischen } p \text{ und } q\}.$$

Ist  $g$  eine Gerade und sind  $p, q$  Punkte, die nicht auf  $g$  liegen, dann liegen  $p$  und  $q$  auf *derselben Seite* von  $g$ , wenn  $g$  die Strecke  $\overline{pq}$  nicht schneidet.

**Bemerkung I.3.3.** Mit Hilfe dieser Axiome kann man jetzt eine Reihe von Folgerungen ableiten:

- (i) Jede Gerade enthält unendlich viele Punkte.
- (ii) Von drei paarweise verschiedenen Punkten auf einer Geraden liegt genau einer der Punkte zwischen den beiden anderen.

**Bemerkung I.3.4.**

- (i) Sei die Inzidenzgeometrie  $\mathbb{K}^n$ , wie in Beispiel I.1.9, gegeben, mit  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{Q}$ . Dann erhalten wir eine Anordnung durch:

$r$  liegt genau dann zwischen  $p$  und  $q$ , wenn  $r = \lambda p + (1 - \lambda)q$  für ein  $\lambda \in (0, 1)$  ( $\lambda$  ein Element des offenen Intervall von 0 und 1 ist).

Dann sind (A1)–(A4) erfüllt. Für  $\mathbb{R}^2, \mathbb{Q}^{2*}$  ist auch (A5) erfüllt, für  $n \geq 3$  nicht, vgl. Abb. I.3.

- (ii) Die Bezeichnung auf der selben Seite einer Geraden zu liegen kommt wie alles andere auch aus der ebenen Geometrie. Für  $\mathbb{R}^n$  mit  $n \geq 3$  liegen allerdings zwei Punkte  $p, q$  allerdings z.B. auf der selben Seite von  $g$  sobald sie keine gemeinsame Ebene aufspannen.

\*Für  $\mathbb{Q}^2$  folgt (A5), da Geraden mit rationalen Steigungen auch immer rationale Schnittpunkte haben.

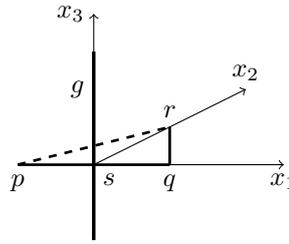


Abb. I.3.: (A5) ist nicht erfüllt für  $\mathbb{R}^3$  bzw.  $\mathbb{Q}^3$

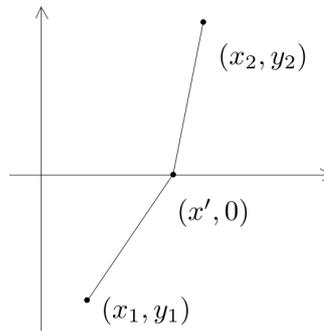
**Beispiel I.3.5.** Sei  $P := \mathbb{R}^2$ ; ein Punkt in  $P$  hat die Koordinaten  $(x, y)^t$ . Sei  $G_1$  die Menge der Geraden der Form  $\{(x, y)^t \in P \mid x = x_0\}$  für  $x_0 \in \mathbb{R}$  oder  $\{(x, y)^t \in P \mid y = m(x - x_0)\}$  mit  $m < 0$  und  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Eine 'geknickte Gerade',  $G_2$ , sei definiert durch  $m \geq 0$  und  $b \in \mathbb{R}$  und durch die folgende Menge

$$\{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2 \mid y = m^2 \cdot (x - x_0) \text{ für } x \geq x_0 \text{ bzw. } y = m \cdot (x - x_0) \text{ für } x < x_0\}.$$

Sei  $G = G_1 \cup G_2$ . Wir definieren  $I \subset P \times G$  durch:  $(p, g) \in I$  falls  $p \in g \subset \mathbb{R}^2$  gilt. Eine Inzidenzstruktur  $\mathcal{I}$  ist eine Inzidenzgeometrie: (I3) ist erfüllt, weil ein Dreieck existiert; (I2) ist erfüllt, weil jede Gerade unendlich viele Punkte per Definition enthält.

Das Axiom (I1) ist ein bisschen komplizierte. Durch je zwei verschiedene Punkte,  $(x_1, y_1)^t$  und  $(x_2, y_2)^t$  geht genau eine Gerade. Nehmen wir an, dass  $x_2 \geq x_1$ ,  $y_1 < 0$ ,  $y_2 > 0$ . Wir möchten zeigen dass ein Punkt,  $(x', 0)^t$  mit  $x_1 < x' < x_2$ , und  $m > 0$  existiert so dass

$$y_2/(x_2 - x') = m, \quad y_1/(x' - x_1) = m^2,$$



oder dass eindeutige  $x'$  mit  $x_1 < x' < x_2$  existiert s.d.

$$F(x') := (y_2/(x_2 - x'))^2 - y_1/(x' - x_1) = 0.$$

Diese funktion,  $F(x')$ , von  $x'$  ist sowohl stetig als auch monoton. Also

$$\lim_{x \rightarrow (x_2)_-} F(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow (x_1)_+} F(x) = -\infty,$$

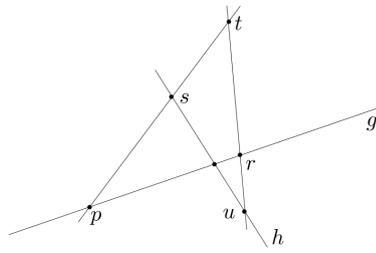
dann  $x'$  existiert und ist eindeutig.

Erhalten wir eine Anordnung durch: Anordnung:  $q = (x_q, y_q)^t$ ,  $p = (x_p, y_p)^t$  und  $r = (x_r, y_r)^t$

1. wenn  $x_p = x_q = x_r$  ist: sagen wir dass  $q$  zw.  $p$  und  $r$  liegt: wenn  $y_p < y_q < y_r$  oder  $y_p > y_q > y_r$ ,
2. sonst wenn  $x_p < x_q < x_r$  oder  $x_p > x_q > x_r$ .

**Folgerung I.3.6.** Zu je zwei verschiedenen Punkten  $p$  und  $r$  gibt es einen Punkt  $q$ , der zwischen  $p$  und  $r$  liegt.

*Beweis.* Zunächst gibt nach (I3) es einen Punkt  $s$ , der nicht auf der Geraden  $g$  durch  $p$  und  $r$  liegt und dann einen weiteren Punkt  $t$  nach (A3), so dass  $s$  zwischen  $p$  und  $t$  liegt. Dann gibt es ebenfalls nach (A3) einen Punkt  $u$ , so dass  $r$  zwischen  $t$  und  $u$  liegt.



□

Betrachte nun für (A5) das Dreieck mit den Ecken  $p, t, r$  und die Gerade  $h$  durch  $s$  und  $u$ . Die Punkte  $p, t, r$  sind nicht kollinear, denn  $t$  liegt nicht auf  $g$ , da sonst auch  $s$  nach (I1) auf  $g$  liegen würde. Außerdem liegt keiner der Punkte  $p, t$  und  $r$  auf  $h$ . Nach Konstruktion schneidet  $h$  die Strecke  $\overline{pt}$  in  $s$ . Wegen der Eindeutigkeit des Schnittpunktes zweier Geraden, siehe Bem. I.1.12, schneidet  $h$  die Strecke  $\overline{tr}$  nicht, also schneidet  $h$  nach (A5) die Strecke  $\overline{pr}$ . Der Schnittpunkt liegt dann zwischen  $p$  und  $r$ .

### I.4. Kongruenzaxiome

Wir betrachten jetzt eine Relation  $\cong$  für Strecken, wobei wir der Strecke  $\overline{pq}$  a-priori keinen Wert zuordnen. Im Hinterkopf haben wir dabei aber die euklidische Ebene und Längen von Strecken. Ist  $\overline{pq} \cong \overline{p'q'}$ , dann sagen wir, dass die Strecken  $\overline{pq}$  und  $\overline{p'q'}$  kongruent sind.

**Kongruenzaxiome für Strecken.** Sei eine angeordnete Inzidenzgeometrie gegeben, d.h. (I1)–(I3) und (A1)–(A5) gelten.

(K1) (Abtragung von Strecken) Seien  $p, q, r, s$  Punkte mit  $r \neq s$ , dann gibt es genau einen Punkt  $t \in S(r, s)$ , so dass  $\overline{pq} \cong \overline{rt}$ .

(K2)  $\cong$  ist eine Äquivalenzrelation.

(K3) (Addition von Strecken) Sei  $q$  zwischen  $p$  und  $r$ , sowie  $b$  zwischen  $a$  und  $c$ . Falls  $\overline{pq} \cong \overline{ab}$  und  $\overline{qr} \cong \overline{bc}$  gilt, dann gilt auch  $\overline{pr} \cong \overline{ac}$ .

**Beispiel I.4.1.** Für  $\mathbb{R}^2$  mit der natürlichen Inzidenz- und Anordnungsstruktur, vgl. Bsp. I.1.9 und Bem. I.3.4, definieren wir eine Relation auf Strecken mittels

$$\overline{pq} \cong \overline{p'q'} \text{ genau dann, wenn } |\overline{pq}| := \|p - q\| = |\overline{p'q'}|.$$

Es gelten (K1)–(K3). Die analoge Relation für  $\mathbb{Q}^2$  erfüllt nur (K1) und (K2), jedoch nicht (K3), da die Strecke  $\overline{(0,0), (1,1)}$  nicht auf  $S(\overline{(0,0), (1,0)})$  abtragbar ist. Warum? Weil die Länge der Strecke gleich Wurzel aus 2  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ . Dieser Zusammenhang war vor mehr als 2500 Jahren bereits bekannt. Gerüchten zufolge wurde es als Geheimwissen unter den Pythagoräer gesehen und hatte unglückliche Folgen für einen dieser. Es ist der vermutlich erste Unglücksfall in einer ganzen Reihe in der Geschichte der Elementargeometrie. Hippasus wurde ermordet, weil er das Geheimnis enthüllt hatte. Zumeist, da es stets an der Vorstellung des idealen geometrischen Weltbildes der Allgemeinheit zu kratzen schien.

**Beispiel I.4.2.** Für  $\mathbb{R}^2$  mit der Inzidenzstruktur aus Bsp. I.1.9 definieren wir

$$d'(p, q) := \begin{cases} \|p - q\| & \text{falls die Gerade durch } p \text{ und } q \text{ waagrecht oder senkrecht ist,} \\ 2\|p - q\| & \text{sonst,} \end{cases}$$

und eine Relation auf Strecken mittels

$$\overline{pq} \cong \overline{p'q'} \text{ genau dann, wenn } d'(p, q) = d'(p', q').$$

Auch für diese Relation gelten (K1)–(K3).

Ähnlich wie Strecken wollen wir auch Winkel vergleichen können, also eine Äquivalenzrelation auf Winkeln einführen. Dazu brauchen wir aber erst einmal eine Definition von Winkeln für eine angeordnete Inzidenzgeometrie:

**Definition I.4.3.** Ein *Winkel* ist eine Äquivalenzklasse von Tripeln von Punkten  $p, q$  und  $r$ , die nicht kollinear sind, wobei die Tripel  $(p, q, r)$  und  $(p', q', r')$  genau dann äquivalent sind, wenn  $q = q'$  und eine der beiden folgenden Bedingungen gilt:

- (i)  $p' \in S(q, p)$  und  $r' \in S(q, r)$ .
- (ii)  $p' \in S(q, r)$  und  $r' \in S(q, p)$ .

Eine Äquivalenzklasse von Winkeln bezeichnen wir mit  $\sphericalangle pqr$ . Der Punkt  $q$  heißt *Scheitelpunkt* des Winkels  $\sphericalangle pqr$ .

**Bemerkung I.4.4.** Eine äquivalente Definition eines Winkels wäre: Ein Winkel ist durch einen Punkt  $p$  und zwei verschiedene, von  $p$  ausgehende Strahlen gegeben.

Vorl. 3

Wir betrachten jetzt eine Relation  $\cong$  für Winkel. Gilt  $\sphericalangle pqr \cong \sphericalangle p'q'r'$ , dann sagen wir, dass die Winkel  $\sphericalangle pqr$  und  $\sphericalangle p'q'r'$  *kongruent* sind.

**Kongruenzaxiome für Winkel.** Sei eine angeordnete Inzidenzgeometrie gegeben und die Kongruenzaxiome für Strecken gelten.

- (K4) Die Kongruenz von Winkeln definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Winkel.
- (K5) (Abtragung von Winkeln) Sei  $\sphericalangle pqr$  ein Winkel und  $p', q', u$  drei nicht kollineare Punkte. Dann gibt es genau einen Winkel  $\sphericalangle p'q'r'$  kongruent zu  $\sphericalangle pqr$ , so dass  $r'$  und  $u$  auf der gleichen Seite der Gerade durch  $p'$  und  $q'$  liegen.
- (K6) Seien  $(p, q, r)$  und  $(p', q', r')$  Tripel von Punkten, die jeweils nicht kollinear sind. Dann gilt mit

$$\overline{pq} \cong \overline{p'q'}, \quad \overline{pr} \cong \overline{p'r'}, \quad \text{und} \quad \sphericalangle pqr \cong \sphericalangle p'q'r'$$

auch  $\sphericalangle pqr \cong \sphericalangle p'q'r'$ .

Das Axiom (K6) imitiert also den Kongruenzsatz (SWS) der euklidischen Geometrie.

Unter den Voraussetzungen von (K6) sagen wir, dass die *Dreiecke*  $pqr$  und  $p'q'r'$  *kongruent* sind.

**Beispiel I.4.5.** Auf  $\mathbb{R}^2$  wie in Bsp. I.1.9 definieren wir eine Äquivalenzrelation auf Winkeln mittels

$$\sphericalangle pqr \cong \sphericalangle p'q'r' \text{ genau dann, wenn } |\sphericalangle pqr| := \arccos \frac{\langle p - q, r - q \rangle}{|\overline{pq}| \cdot |\overline{qr}|} = |\sphericalangle p'q'r'|.$$

Hierbei ist  $\langle p_1 = (x_1, y_1), p_2 = (x_2, y_2) \rangle := x_1x_2 + y_1y_2$  (das euklidische Skalarprodukt). Insbesondere ist  $|\sphericalangle pqr| \in (0, \pi)$ .

**Beispiel I.4.6.** (Hyperbolische Ebene) Für die obere Halbebene aus Übungsaufgabe 2 gibt es auch eine Relation für Strecken und Winkel, die die Axiome (K1)–(K6) erfüllt.

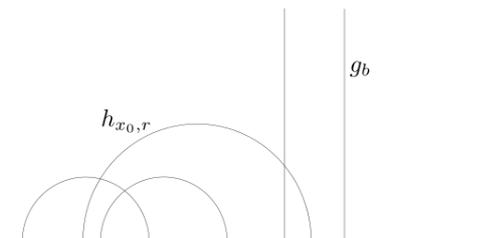
Der Winkel zwischen zwei Kreisbögen über deren Tangenten am Schnittpunkt bestimmt wird. Lassen uns formalisieren: Sei  $P := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$ . Die Menge der Geraden sehen aus wie folgend:

$$g_b = \{(b, y) \in P \mid y > 0\}$$

bzw.

$$h_{x_0, r} = \{(x, y) \in P \mid (x - x_0)^2 + y^2 = r^2, y > 0\}$$

sei jeweils eine Gerade.



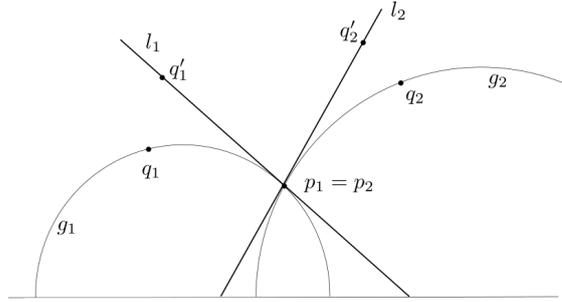
Betrachten wir zwei Geraden,  $g_1$  und  $g_2$ . Betrachten wir zwei Mengen von Punkten,  $l_1$  und  $l_2$ , s.d.

$$l_1 := l_1(a_1, b_1, c_1) := \{(x_1, y_1)^t \in P, a_1x_1 + b_1y_1 = c_1\}, \quad l_2 := l_2(a_2, b_2, c_2) := \{(x_2, y_2)^t \in P, a_2x_2 + b_2y_2 = c_2\}$$

für  $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , so dass

1. (es existiert nur 1 Punkt  $p_1$  der  $l_1$  und  $g_1$  gehört) oder ( $l_1 = g_1$ ),
2. (es existiert nur 1 Punkt  $p_2$  der  $l_2$  und  $g_1$  gehört) oder ( $l_2 = g_2$ ),
3.  $p_1 = p_2$ .

Seien  $q_1 \in g_1$ ,  $q_2 \in g_2$ , und seien  $q'_1 \in l_1$ ,  $q'_2 \in l_2$  paarweise verschiedene Punkte so dass  $\langle p_1 - q_1, p_1 - q'_1 \rangle > 0$  und  $\langle p_2 - q_2, p_2 - q'_2 \rangle > 0$ .



Dann

$$\sphericalangle q_1 p_1 q_2 = \arccos \frac{\langle q'_1 - p_1, q'_2 - p_1 \rangle}{|p_1 q'_1| \cdot |p_1 q'_2|}.$$

Beispiel:  $g_1 = \{x = 0\}$ ,  $g_2 = \{x^2 + y^2 = 1\}$ . Dann ist der Winkel zwischen diese zwei Kreisbögen  $\pi/2$ .

**Satz I.4.7.** *Es gelten (I1)–(I3) bis , (A1)–(A5), (K1)–(K6). Unter den Voraussetzungen von (K6) gilt auch*

$$\sphericalangle p r q \cong \sphericalangle p' r' q' \quad \text{und} \quad \overline{q r} \cong \overline{q' r'}.$$

*Beweis.* Die Winkelkongruenz folgt mittels (K6) durch Umbenennung ( $q \leftrightarrow r$  und  $q' \leftrightarrow r'$ ). Wir zeigen als nächstes  $\overline{q r} \cong \overline{q' r'}$ . Nach (K1) gibt es auf der Gerade durch  $q'$  und  $r'$  einen Punkt  $s'$ , der auf der selben Seite von  $q'$  liegt wie  $r'$  und für den  $\overline{q r} \cong \overline{q' s'}$  gilt. Die Tripel  $(p, q, r)$  und  $(p', q', s')$  erfüllen die Voraussetzungen von (K6), und damit ist  $\sphericalangle q p r \cong \sphericalangle q' p' s'$ . Weiterhin liegen  $r'$  und  $s'$  auf der selben Seite der Geraden durch  $q'$  und  $p'$  (wegen Eindeutigkeit des Schnittpunktes von Geraden). Damit folgt aus  $\sphericalangle q p r \cong \sphericalangle q' p' s'$  und (K5), dass  $r'$ ,  $s'$  und  $p'$  auf einer Geraden liegen. Wäre  $r' \neq s'$ , würde auch  $q'$  auf dieser Geraden liegen. Das wäre ein Widerspruch zu den Voraussetzungen von (K6). Also ist  $r' = s'$  und damit ist  $\overline{q r} \cong \overline{q' r'}$ .  $\square$

**Bemerkung I.4.8.** Weiterhin können wir verschiedene andere Sätze, wie wir sie aus der euklidischen Geometrie kennen, ableiten; z.B. Kongruenz von Neben- und Gegenwinkeln. Hingegen folgt der Stufenwinkelsatz nicht aus den Axiomen (I1)–(I3), (A1)–(A5), (K1)–(K6), sondern er ist äquivalent zum Parallelenaxiom (P).

Mit Hilfe der Kongruenzaxiome kann man jetzt die Existenz einer Parallelen zeigen. Die Eindeutigkeit der Parallelen und damit das Parallelenaxiom (P), folgt aber nicht aus diesen Axiomen. Wir werden bald eine nicht-euklidische Geometrie kennenlernen, die bis auf das Parallelenaxiom (P) alle Axiome der euklidischen Geometrie erfüllt.

**Satz I.4.9** (Existenz einer Parallelen). *Gegeben sei eine angeordnete Inzidenzgeometrie und Kongruenzrelationen für Strecken und Winkel, so dass (K1)–(K6) gilt. Ist  $g$  eine Gerade und  $p$  ein Punkt, dann gibt es eine zu  $g$  parallele Gerade  $h$ , die den Punkt  $p$  enthält.*

*Beweis.* (vgl. Abb. I.4) Die Aussage ist offensichtlich, wenn  $p$  auf  $g$  liegt. Sei also  $p$  nicht auf der Geraden  $g$ . Sei  $g'$  eine Gerade durch  $p$ . Wenn  $g'$  die Gerade  $g$  nicht schneidet, dann sind  $g$  und  $g'$  parallel. Umgekehrt, wenn  $g'$  und  $g$  nicht parallel sind, gibt es einen Schnittpunkt  $q$ , einen Punkt  $r \neq q$  auf  $g$  und nach (A3) auch einen Punkt  $u$  auf  $g$ , der auf der anderen Seite von  $g'$  liegt wie  $r$ . Nach (K5) gibt es jetzt einen Punkt  $s$  auf der anderen Seite von  $g'$  wie  $u$  und mit  $\sphericalangle p q r \cong \sphericalangle q p s$ . Sei  $h$  die Gerade durch  $p$  und  $s$ , dann sind  $g$  und  $h$  parallel durch folgenden Widerspruch: Angenommen es gibt einen Schnittpunkt  $t$  von  $g$  und  $h$ , und  $t$  liege

ohne Einschränkung auf der gleichen Seite von  $g'$  wie  $r$  (andernfalls vertausche die Rollen der Punkte). Wir konstruieren einen Punkt  $v$  auf der Geraden  $h$ , so dass sich  $v$  auf der anderen Seite von  $g'$  wie  $t$  befindet und für den  $\overline{qt} \cong \overline{pv}$  gilt. Nach (K6) gilt dann  $\sphericalangle vqp = \sphericalangle tpq$ . Aus der Kongruenz von Nebenwinkeln (Übungsaufgabe 5) und Axiom (K5) folgt, dass  $v$  auf  $g$  liegt. Also schneiden sich  $g$  und  $h$  in den Punkten  $t$  und  $v$ . Da jedoch  $g \neq h$  ist, steht das im Widerspruch zu (I1).  $\square$

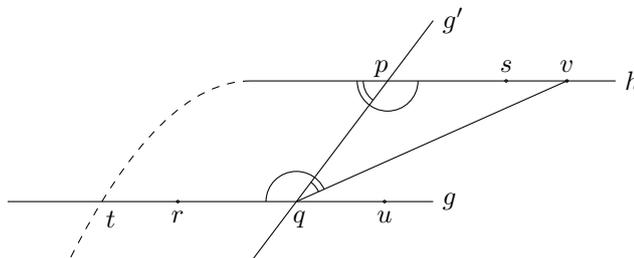


Abb. I.4.: Zum Beweis von Satz I.4.9.

## 1.5. Hilberts Axiome der euklidischen Geometrie

Für eine angeordnete Inzidenzgeometrie, die (K1)–(K6) und (P) erfüllt, können noch viele weitere Eigenschaften gefolgert werden. Wir geben hier nur einige wichtige an (ohne Beweis):

- (i) Existenz von rechten Winkeln/Senkrechten.
- (ii) Sei  $L$  die Menge aller Strecken modulo der Äquivalenzrelation darauf. Auf  $L$  können wir eine Addition definieren durch  $[\overline{pq}] + [\overline{rs}] := [\overline{pt}]$ , wobei  $t$  der Punkt auf der Geraden durch  $p$  und  $q$  ist, der auf der anderen Seite von  $q$  liegt als  $p$  und für den  $\overline{qt} \cong \overline{rs}$  gilt ( $t$  ist durch (K1) eindeutig bestimmt). Die Addition ist wohldefiniert, kommutativ und assoziativ. Das neutrale Element ist  $[\overline{pp}]$  und durch Hinzufügen von inversen Elementen erhalten wir eine abelsche Gruppe  $(K, +)$ .

Wir können die Menge der Punkte einer Geraden  $g$  mit  $K$  identifizieren: Seien  $p$  und  $q$  Punkte, die auf  $g$  liegen. Wir identifizieren  $p$  mit der Null  $[\overline{pp}]$  in  $L$ , ein  $r \in S(p, q)$  mit  $[\overline{pr}] \in L$  und ein  $s$  auf der anderen Seite von  $p$  als  $q$  mit  $-\overline{pr} \in K$ .

- (iii) Wir fixieren ein Element  $[\overline{xy}] \in L \setminus \{0\}$ . Auf  $L$  können wir auch eine Multiplikation definieren durch  $[\overline{pq}] \cdot [\overline{rs}] := [\overline{zu}]$ , wobei  $z$  und  $u$  wie folgt bestimmt sind (vgl. Abb. I.5):

Sei  $g$  die Gerade durch  $x$  und  $y$ . Sei  $z$  der Punkt auf  $S(x, y)$  mit  $\overline{xz} \cong \overline{rs}$  (existiert und ist eindeutig bestimmt nach (K1)). Sei  $\ell$  bzw.  $\ell'$  die Senkrechte zu  $g$  durch  $y$  bzw.  $z$ . Sei  $v$  ein Punkt auf  $\ell$  mit  $\overline{vy} \cong \overline{pq}$ . Wir betrachten die Gerade  $h$  durch  $x$  und  $v$ . Angenommen die Geraden  $h$  und  $\ell'$  würden sich nicht schneiden, dann wäre  $h \parallel \ell'$ . Wegen  $\ell \parallel \ell$  und da (P) gilt, folgt  $\ell \parallel h$  (vgl. Übungsaufgabe 2). Da jedoch  $h$  und  $\ell$  den Punkt  $v$  gemeinsam haben, wäre dann schon  $h = \ell$ . Das ist ein Widerspruch, da  $x$  auf  $h$  aber nicht auf  $\ell$  liegt. Also schneiden sich  $h$  und  $\ell'$  in einem Punkt  $u$ , der eindeutig bestimmt ist, da  $h \neq \ell'$  gilt.

Das fixierte Element  $[\overline{xy}]$  übernimmt die Rolle der Eins, des neutralen Elements der Multiplikation. Diese Multiplikation können wir auf  $L$  erweitern, so dass  $K$  ein Körper wird.

- (iv) Wir erhalten auf  $K$  eine totale Ordnung: Sei  $[\overline{pq}], [\overline{rs}] \in L \setminus \{0\}$  gegeben. Sei  $t$  der Punkt auf der Geraden durch  $p$  und  $q$  ist, der auf der gleichen Seite von  $p$  liegt wie  $q$  und für den  $\overline{pt} \cong \overline{rs}$  gilt ( $t$  ist durch (K1) eindeutig bestimmt). Wir definieren  $[\overline{pq}] \leq [\overline{rs}]$ , falls  $t$  zwischen  $p$  und  $q$  liegt oder  $q = t$  ist. Weiterhin gelte immer  $-\overline{pq} \leq [\overline{pp}] = 0 \leq [\overline{rs}]$  und es gelte  $-\overline{pq} \leq -\overline{rs}$  genau dann, falls  $[\overline{rs}] \leq [\overline{pq}]$  gilt. Man kann zeigen, dass  $L$  mit  $\leq$  einen geordneten Körper bildet.

- (v)  $\mathbb{Q}$  ist ein Teilkörper von  $L$ .

Leider reicht das alles noch nicht, um zu folgern, dass die vorliegende Geometrie die euklidische Ebene sein muss. Insbesondere muss  $L$  noch nicht der Körper der reellen Zahlen sein. Was kann noch schiefgehen?

Zum einen kann  $L$  zuviele Elemente haben. Das folgende Axiom soll das verhindern.

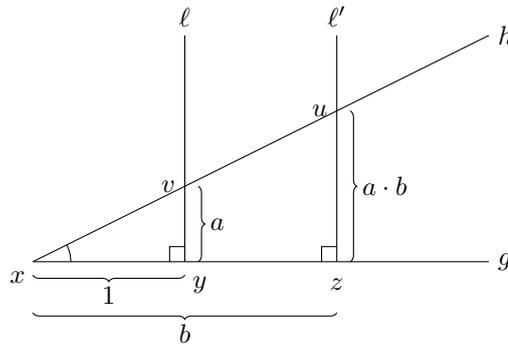


Abb. I.5.: Grundidee der Multiplikation

(V1) *Axiom von Archimedes:* Seien  $p, q, r$  drei paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden  $g$ , so dass  $p$  nicht zwischen  $q$  und  $r$  liegt. Dann gibt es Punkte  $q = q_1, q_2, \dots$  auf  $g$  mit  $\overline{q_i q_{i+1}} \cong \overline{pq}$ . Außerdem liegt  $q_i$  zwischen  $p$  und  $q_{i+1}$ . Nach endlich vielen Schritten liegt  $r$  zwischen  $p$  und  $q_k$ .

Das Axiom ist wirklich nötig, da es geordnete Körper gibt, die  $\mathbb{R}$  als Teilkörper enthalten (also für unser Ziel – die euklidische Ebene – zu groß sind). Das sind z.B. die sogenannten hyperreellen Zahlen, womit sich die Nichtstandardanalysis beschäftigt.\* Sie erweitert die reellen Zahlen um infinitesimal benachbarte Zahlen sowie um unendlich große (infinite) Zahlen.

Zum anderen kann  $L$  auch zu wenig Elemente enthalten. Es gibt zum Beispiel geordnete Körper, die  $\mathbb{Q}$  als Teilkörper und auch alle Wurzeln von rationalen Zahlen, aber keine transzendenten Zahlen (wie z.B.  $\pi, e$ ) enthalten, der Körper der reellen algebraischen Zahlen: †

**Definition I.5.1.** Eine reelle algebraische Zahl ist eine reelle Zahl, die Nullstelle eines Polynoms vom Grad größer als Null mit rationalen Koeffizienten ist.

Um dies auszuschließen, werden wir noch eine Maximalitätsforderung stellen. Dazu brauchen wir noch einige Definitionen:

**Definition I.5.2.** Sei  $(P, G, I, \mathcal{A})$  eine angeordnete Inzidenzgeometrie mit einer Relation  $\cong_S$  auf Strecken und einer Relation  $\cong_W$  auf Winkeln. Falls das 6-Tupel  $M_1 := (P, G, I, \mathcal{A}, \cong_S, \cong_W)$  die Axiome (K1)–(K6), (P) und (V1) erfüllt, nennen wir es ein *vorläufiges Modell der euklidischen Ebene*. Wir nennen ein vorläufiges Modell der euklidischen Ebene  $M_2 = (P', G', I', \mathcal{A}', \cong'_S, \cong'_W)$  eine *Erweiterung* von  $M_1$  falls  $P \subset P', G \subset G', I \subset I' \cap (P \times G), \mathcal{A} \subset \mathcal{A}' \cap (P \times P \times P)$  und falls die Relationen  $\cong'_S$  bzw.  $\cong'_W$  auf den Strecken und Winkeln in  $M_1$  mit  $\cong_S$  bzw.  $\cong_W$  übereinstimmen. Ein vorläufiges Modell  $M_1$  heißt *maximal*, wenn für jede Erweiterung  $M_2$  schon  $P = P'$  und  $G = G'$  gilt.

Unser letztes Axiom ist nun:

(V2) *Maximalität:* Das vorläufige Modell der euklidischen Ebene ist maximal.

**Definition I.5.3.** Eine *euklidische Ebene* ist ein vorläufiges Modell der euklidischen Ebene, welches (V2) erfüllt.

Ein *Isomorphismus* von euklidischen Ebenen

$$(P, G, I, \mathcal{A}, \cong_S, \cong_W) \rightarrow (P', G', I', \mathcal{A}', \cong'_S, \cong'_W)$$

ist gegeben durch einen Isomorphismus  $(\sigma, \tau): (P, G, I) \rightarrow (P', G', I')$ , welcher die Anordnung und die Kongruenzrelationen erhält, d.h.  $\sigma: P \rightarrow P'$  und  $\tau: G \rightarrow G'$  sind Bijektionen mit folgenden Eigenschaften:

- (i)  $(p, g) \in I \iff (\sigma(p), \tau(g)) \in I'$ .
- (ii)  $(p, q, r) \in \mathcal{A} \iff (\sigma(p), \sigma(q), \sigma(r)) \in \mathcal{A}'$ .
- (iii)  $\overline{pq} \cong_S \overline{uv} \iff \overline{\sigma(p)\sigma(q)} \cong'_S \overline{\sigma(u)\sigma(v)}$ .
- (iv)  $\sphericalangle pqt \cong_W \sphericalangle uvw \iff \sphericalangle \sigma(p)\sigma(q)\sigma(t) \cong'_W \sphericalangle \sigma(u)\sigma(v)\sigma(w)$ .

Man kann zeigen, dass die euklidische Ebene bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.

\*[https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperreal\\_number](https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperreal_number)

†Z.B., [https://en.wikipedia.org/wiki/Euclidean\\_field](https://en.wikipedia.org/wiki/Euclidean_field).

## 1.6. Das kartesische Modell der euklidischen Geometrie

Im 16. Jahrhundert lebte in Frankreich ein Mann, welcher seit seiner Kindheit, durch häufige Krankheit geplagt, bis spät mittags im Bett lag und der viel seiner Zeit mit Philosophie und Mathematik verbrachte. Der Legende nach sah er eine Fliege an der Decke und machte sich Gedanken, wie er die Position der Fliege jemand anderem beschreiben könne. Er kam zu dem Schluss, wie einfach es doch sei hierfür den Abstand der Wände zur Fliege nutzen. Diese Idee übertrug er zur Beschreibung von Punkten in einer Ebene. Man nennt es heutzutage immernoch die "Kartesische Ebene", Renè Descartes zu Ehren.

Der axiomatische Zugang zur euklidischen Geometrie ist zwar sehr anschaulich, konkrete Rechnungen sind aber oft sehr mühsam. Deshalb benutzt man häufig ein konkretes Modell - den 2-dimensionalen euklidischen Vektorraum wie den  $\mathbb{R}^2$  zur Beschreibung der euklidischen Ebene:

**Definition I.6.1.** Das *kartesische Modell* der euklidische Ebene  $K := (P, G, I, \mathcal{A}, \cong_S, \cong_W)$  ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}
 P &= \mathbb{R}^2 \\
 G &= \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_*^2 / \sim, \text{ wobei } (a, b) \sim (a', b') \text{ genau dann, wenn } a + \mathbb{R}b = a' + \mathbb{R}b' \quad (\text{vgl. Bsp. I.1.9}) \\
 I &\subset P \times G, \text{ wobei } (p, g) \in I \text{ genau dann, wenn } p \in g. \\
 \mathcal{A} &\subset P \times P \times P, \text{ wobei } (p, r, q) \in \mathcal{A} \text{ genau dann, wenn } r = \lambda p + (1 - \lambda)q \text{ für ein } \lambda \in (0, 1) \quad (\text{vgl. Bem. I.3.4}). \\
 \overline{pq} &\cong_S \overline{p'q'} \text{ genau dann, wenn } \|p - q\| = \|p' - q'\| \quad (\text{vgl. Bsp. I.4.1}). \\
 \sphericalangle pqr &\cong_W \sphericalangle p'q'r' \text{ genau dann, wenn } |\sphericalangle pqr| := \arccos \frac{\langle p - q, r - q \rangle}{|pq| \cdot |qr|} = |\sphericalangle p'q'r'| \quad (\text{vgl. Bsp. I.4.5}).
 \end{aligned}$$

Man kann leicht nachrechnen (z.B. mittels Vektorrechnung), dass (I1)–(I3), (A1)–(A5), (K1)–(K6), (P) und (V1) erfüllt sind. Wir haben also ein vorläufiges Modell der euklidischen Ebene. Um zu zeigen, dass wir ein Modell der euklidischen Ebene haben, müssen wir noch (V2) die Maximalität überprüfen:

**Lemma I.6.2.** *Das kartesische Modell der euklidischen Ebene erfüllt (V2).*

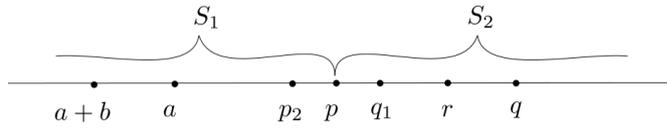
*Beweis.* Sei  $M := (P', G', I', \mathcal{A}', \cong'_S, \cong'_W)$  eine Erweiterung des kartesisches Modell. Wir werden die Behauptung in drei Schritten zeigen:

- (i) Sei  $g \in G \subset G'$ . Jeder Punkt  $p \in P'$  auf  $g$  ist schon in  $P$ .
- (ii)  $P = P'$ .
- (iii)  $G = G'$ .

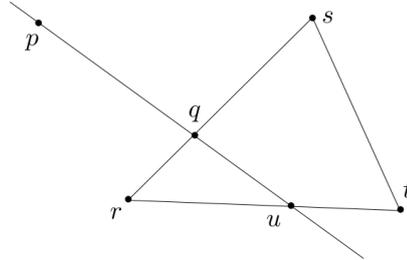
Zu (i): Sei  $g \in G \subset G'$ . Alle Punkte aus  $P$  auf  $g$  haben die Form  $a + \lambda b$  mit  $\lambda \in \mathbb{R}$  für festes  $a, b \in \mathbb{R}^2$ . Insbesondere sind  $a + b, a \in \mathbb{R}^2$  Punkte aus  $P$  auf  $g$ . Sei  $p \in P'$  ein weiterer Punkt auf  $g$ . Genau ein Punkt liegt zwischen den anderen beiden. O.B.d.A. können wir annehmen, dass  $a$  nicht zwischen  $a + b$  und  $p$  liegt (sonst vertausche die Rollen von  $a$  und  $a + b$ ). Nach (V1) gibt es nun einen Punkt  $q \in P$ , so dass  $p$  zwischen  $a$  und  $q$  liegt. O.B.d.A. sei im Folgenden  $a < q$  (sonst vertausche im Folgenden die Rollen der beiden Punkte). Wir setzen

$$S_1 := \underbrace{S(p, a)}_{\subset P'} \cap \underbrace{(a + \mathbb{R}b)}_{\substack{\text{alle Punkte auf } g, \\ \text{die schon in } P \text{ liegen}}} \quad \text{und} \quad S_2 := S(p, q) \cap (a + \mathbb{R}b).$$

Dann ist  $S_1 \cup S_2 = a + \mathbb{R}b \cong \mathbb{R}$ . Es gilt  $a \in S_1$  und  $q \in S_2$ , die Mengen sind also nicht leer. Falls  $p \in P' \setminus P$  liegt, sind  $S_1$  und  $S_2$  sogar disjunkt. Eine solche Zerlegung der reellen Zahlen heißt Dedekindscher Schnitt. **Zur Erinnerung: Sie sollten bei der Definition der reellen Zahlen schon einmal den Dedekind Schnitt verwendet haben.** Aus der Vollständigkeit der reellen Zahlen folgt, dass entweder  $S_1$  ein Maximum oder  $S_2$  ein Minimum besitzt. O.B.d.A. habe  $S_1$  ein Maximum  $p_2 := a + t \cdot b$  für ein  $t \in \mathbb{R}$  hat. Wir zeigen nun, dass dieses Maximum schon  $p$  und damit  $p \in P$  sein muss: Die Punkte  $a$  und  $p_2$  liegen auf der gleichen Seite von  $g$  bezüglich  $p$ . Da  $p_2$  das Maximum von  $S_1$  ist, muss  $q_1 = a + 2tb \in S_2$  liegen. Wir wenden nun (V1) an und erhalten  $r \in S(p, q)$ , so dass  $k[\overline{p_2 p}] = [\overline{p_2 r}]$  für ein  $k \in \mathbb{N}$  ist und  $q$  zwischen  $p_2$  und  $r$  liegt. Wir setzen  $p_3 := p_2 + \frac{t}{k}b$ . Dann gilt  $k[\overline{p_2 p_3}] = [\overline{p_2 q}] < [\overline{p_2 r}] = k[\overline{p_2 p}]$ , also  $[\overline{p_2 p_3}] < [\overline{p_2 p}]$ . Somit liegt  $p_3$  zwischen  $p_2$  und  $p$  und damit  $p_3 \in S_1$ . Das ist jedoch ein Widerspruch zur Maximalität von  $p_2$ . Also muss  $p_2 = p$  und damit  $p \in P$  sein.



Zu (ii): Sei  $p \in P'$ . Wir wählen drei nichtkollineare Punkte  $r, s, t \in P$  (existieren nach (I3) für das kartesische Modell  $K$ ). Sei  $q$  ein Punkt auf der Strecke  $\overline{rs}$ . Nach (i) ist  $q \in P$ . Wir betrachten die Gerade  $g$  durch  $p$  und  $q$ . Nach (A5) schneidet  $g$  eine der Strecken  $\overline{rt}$  oder  $\overline{st}$  in einem Punkt  $u \in P'$ . Da  $r, s, t \in P$  ist, folgt  $u \in P$  nach (i). Wiederum nach (i) ist liegt damit auch jeder Punkt auf der Geraden durch  $u, q$  schon in  $P$  – also insbesondere  $p \in P$ .



Zu (iii): Sei  $g \in G'$ . Nach (I2) gibt es  $p, q \in P'$ , die auf  $g$  liegen. Nach (ii) gilt  $p, q \in P$ . Nach (I1) für das kartesische Modell  $K$  gibt es eine Gerade  $h \in G$  durch  $p$  und  $q$ . Nach (I1) für die Erweiterung ist diese Gerade aber eindeutig bestimmt, also gilt  $h = g \in G$ . □

Vorl. 5

### I.6.1. Abstandsfunktion, Isometrien – Bewegungsgruppe

**Definition I.6.3.** Sei  $X$  eine Menge. Eine Funktion  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  mit

1.  $d(x, y) \geq 0$  für alle  $x, y \in X$  und Gleichheit gilt genau dann, wenn  $x = y$  ist.
2.  $d(x, y) = d(y, x)$  für alle  $x, y \in X$
3.  $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$  für alle  $x, y, z \in X$

heißt *Abstandsfunktion*. Dann nennt man  $(X, d)$  einen *metrischen Raum*.

**Beispiel I.6.4.** Für jede Menge,  $X$ , es existiert eine Abstandsfunktion:  $d(p, q) := \begin{cases} 0, & p = q, \\ 1, & p \neq q. \end{cases}$

**Beispiel I.6.5.**  $d(p, q) := \|p - q\|$  ist eine Abstandsfunktion für die euklidische Ebene  $E$  - die kanonische Abstandsfunktion.

**Definition I.6.6.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Eine surjektive Abbildung  $f: X \rightarrow X$  heißt *Isometrie*, wenn sie Abstände erhält, d.h.,

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

**Beispiel I.6.7.** Jede Translation in der euklidischen Ebene  $t_b: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, p \mapsto p + b, b \in \mathbb{R}^2$  fest, ist eine Isometrie.

**Bemerkung I.6.8.** Die Isometrien eines metrischen Raumes bilden mit der Hintereinanderausführung von Abbildungen eine Gruppe – die *Isometriegruppe* dieses metrischen Raumes (auch *Bewegungsgruppe* genannt).

**Satz I.6.9.** Sei  $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine Isometrie der euklidischen Ebene. Dann gibt es einen Vektor  $b \in \mathbb{R}^2$  und eine Matrix  $A \in O(2) := \{A \in M_{\mathbb{R}}(2) \mid A^T A = Id\}$ , so dass  $\psi(p) = Ap + b$  für alle  $p \in \mathbb{R}^2$  gilt. Andererseits ist jedes  $\psi$  dieser Form eine Isometrie.

## I. Axiomatik der euklidischen Geometrie

*Beweis.* Sei  $\psi(v) = Av + b$  für  $A \in O(2)$  und  $b \in \mathbb{R}^2$ . Dann gilt  $d(\psi(v), \psi(w))^2 = \|\psi(v) - \psi(w)\|^2 = \langle A(v-w), A(v-w) \rangle = \langle v-w, A^T A(v-w) \rangle = \|v-w\|^2 = d(v, w)$ . Also ist  $\psi$  eine Isometrie.

Sei nun  $\psi$  eine Isometrie. Wir setzen  $b := \psi(0)$  und definieren  $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $v \mapsto \psi(v) - b$ . Wegen  $d(\phi(v), \phi(w)) = \|\phi(v) - \phi(w)\| = \|\psi(v) - \psi(w)\| = d(\psi(v), \psi(w)) = d(v, w)$ , ist auch  $\phi$  eine Isometrie. Da  $\phi((0, 0)) = (0, 0)$  ist, folgt insbesondere  $\|\phi(v)\| = \|v\|$  für alle  $v \in \mathbb{R}^2$ . Damit folgt

$$\langle v, w \rangle \stackrel{\text{Paral.}}{=} \frac{1}{2} (\|v\|^2 + \|w\|^2 - \|v-w\|^2) \quad (\text{I.1})$$

$$\stackrel{\text{Isometr.}}{=} \frac{1}{2} (\|\phi(v)\|^2 + \|\phi(w)\|^2 - \|\phi(v) - \phi(w)\|^2) \quad (\text{I.2})$$

$$\stackrel{\text{Paral.}}{=} \langle \phi(v), \phi(w) \rangle. \quad (\text{I.3})$$

(Abbildungen, die (I.3) erfüllen, nennt man *orthogonal*.) Damit folgt

$$\begin{aligned} \|\phi(v+w) - \phi(v) - \phi(w)\|^2 &= \|\phi(v+w)\|^2 + \|\phi(v)\|^2 + \|\phi(w)\|^2 \\ &\quad - 2\langle \phi(v+w), \phi(v) \rangle - 2\langle \phi(v+w), \phi(w) \rangle + 2\langle \phi(v), \phi(w) \rangle \\ &= \|v+w\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\langle v+w, v \rangle - 2\langle v+w, w \rangle + 2\langle v, w \rangle \\ &= 0 \\ \|\phi(\lambda v) - \lambda\phi(v)\|^2 &= \|\phi(\lambda v)\|^2 + \|\lambda\phi(v)\|^2 - 2\langle \phi(\lambda v), \lambda\phi(v) \rangle \\ &= \|\phi(\lambda v)\|^2 + \lambda^2\|\phi(v)\|^2 - 2\lambda\langle \phi(\lambda v), \phi(v) \rangle \\ &= \|\lambda v\|^2 + \lambda^2\|v\|^2 - 2\lambda\langle \lambda v, v \rangle = 0. \end{aligned}$$

Also ist  $\phi$  eine lineare Abbildung. Es gibt also eine reelle  $2 \times 2$  Matrix  $A$  mit  $\phi(v) = Av$ . Mit (I.3) folgt dann  $\langle v, w \rangle = \langle Av, Aw \rangle = \langle v, A^T A w \rangle$  für alle  $v, w \in \mathbb{R}^2$ . Also gilt  $A^T A = \text{Id}$ , d.h.  $A \in O(2)$ .  $\square$

**Bemerkung I.6.10.** (i) Der letzte Satz gilt ganz analog für den euklidischen Raum  $\mathbb{R}^n$ .

(ii) Jede Translation  $t_b$ , Rotation um den Ursprung

$$r_\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

und Spiegelung an einer Geraden  $g = \{a + tb \mid t \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R}^2, b \neq 0\}$

$$s_g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad p \mapsto -p + 2 \left( a + \frac{\langle p-a, b \rangle}{\|b\|^2} b \right)$$

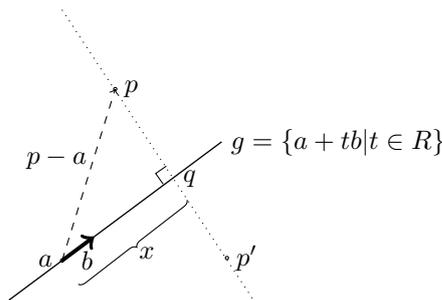


Abb. I.6.: Spiegelung:  $x = \langle p-a, \frac{b}{\|b\|} \rangle$ ,  $p-q = p-a-x \frac{b}{\|b\|}$ ,  $p-p' = 2 \left( p-a-x \frac{b}{\|b\|} \right)$ .

ist eine Isometrie. Ist z.B.  $g = \{t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$  die  $x$ -Achse, so ist die Spiegelung an  $g$  gegeben durch  $s_g: \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} p_1 \\ -p_2 \end{pmatrix}$ .

Eine beliebige Isometrie im euklidischen Raum ist eine Hintereinanderausführung dieser, s. Übungsaufgabe 9.

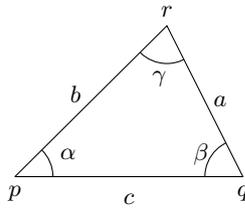


Abb. I.7.: Bezeichnungen für ein Dreieck

(iii) Wir können die Isometriegruppe  $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$  der euklidischen Ebene mit  $E(2) := O(2) \times \mathbb{R}^2$  identifizieren durch

$$\text{Isom}(\mathbb{R}^2) \rightarrow O(2) \times \mathbb{R}^2, (\psi: v \mapsto Av + a) \mapsto (A, a)$$

Hierbei steht  $O(2) \times \mathbb{R}^2$  für die Menge  $O(2) \times \mathbb{R}^2$  mit der Operation  $(A, a) \cdot (B, b) = (AB, Ab + a)$ . Damit wird  $O(2) \times \mathbb{R}^2$  zu einer Gruppe. Die Gruppenstruktur ist hierbei so gewählt, dass obige Identifizierung ein Gruppenhomomorphismus ist.

**Folgerung I.6.11.** Eine Isometrie der euklidischen Ebene ist winkelerhaltend.

*Beweis.* Sei  $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine Isometrie. Dann ist  $\psi(v) = Av + b$  mit  $A \in O(2)$  und  $b \in \mathbb{R}^2$  und wir haben

$$\begin{aligned} \cos \angle \psi(p)\psi(q)\psi(r) &= \frac{\langle \psi(p) - \psi(q), \psi(r) - \psi(q) \rangle}{\|\psi(p) - \psi(q)\| \|\psi(r) - \psi(q)\|} = \frac{\langle A(p - q), A(r - q) \rangle}{\|A(p - q)\| \|A(r - q)\|} \\ &= \frac{\langle p - q, r - q \rangle}{\|p - q\| \|r - q\|} = \cos \angle pqr. \end{aligned}$$

□

**Bemerkung I.6.12.** Umgekehrt ist aber nicht jede winkelerhaltende Abbildung eine Isometrie. Bsp: Zentrische Streckung.

**Folgerung I.6.13.** Jede Isometrie der euklidischen Ebene definiert einen Isomorphismus des kartesischen Modell auf sich selbst:  $\psi: P \rightarrow P$  und  $\tau: G \rightarrow G$ ,  $g = \{a + tb \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \mapsto \tau(g) := \{\psi(a) + t\psi(b) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

*Beweis.* Die Abbildung erhält offensichtlich Inzidenz- und Anordnungsstruktur. Da  $\psi$  eine Isometrie ist, bleibt auch die Kongruenzrelation von Strecken erhalten und nach Folg. I.6.11 auch die Kongruenzrelation von Winkeln. □

### I.6.2. Trigonometrie in der euklidischen Ebene

Seien jetzt  $p, q, r \in \mathbb{R}^2$  nicht kollineare Punkte, dann betrachten wir das Dreieck  $\triangle pqr$ , vgl. Abb. I.7, mit den Seitenlängen

$$a = |\overline{r\bar{q}}|, \quad b = |\overline{p\bar{q}}|, \quad c = |\overline{p\bar{r}}|$$

und den Winkelbeträgen:

$$\alpha = |\angle qpr|, \quad \beta = |\angle prq|, \quad \gamma = |\angle pqr|$$

**Lemma I.6.14.** (Rechtwinklige Dreiecke) Sei  $pqr$  ein Dreieck mit  $\angle pqr = \pi/2$ . Dann gilt

(i)  $\cos \alpha = \frac{b}{c}$

(ii)  $c^2 = a^2 + b^2$  (Satz des Pythagoras)

(iii)  $\sin \alpha = \frac{a}{c}$

*Beweis.* Übungsaufgabe 10 □

**Lemma I.6.15.** (Winkeladdition) Seien  $p, q, r, s$  vier Punkte, so dass  $pqr$  und  $pqs$  jeweils nicht kollinear sind. Weiterhin liegen  $r$  und  $s$  auf verschiedenen Seiten der Geraden durch  $p$  und  $q$ . Dann gilt  $\angle spr = \angle spq + \angle qpr$ .

*Beweis.* Übungsaufgabe 10 □

Andreas hat Ihnen den folgenden Satz bereits gezeigt.

**Satz I.6.16.** Seien  $p, q, r$  drei nichtkollineare Punkte in  $\mathbb{R}^2$ . Seien  $a, b, c$  bzw.  $\alpha, \beta, \gamma$  wie oben definiert. Dann gilt:

(i) *Cosinussatz:*  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$ .

(ii) *Sinussatz:*  $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$ .

(iii) *Winkelsumme:*  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ .

*Beweis.* (i) Da Isometrien Längen und Winkel erhalten, können wir ohne Einschränkung durch Verschieben des Dreieckes  $q = 0$  wählen. Dann gilt

$$\cos \gamma = \frac{\langle p, r \rangle}{a \cdot b} = \frac{1}{2ab} \cdot (-|p - r|^2 + |p|^2 + |r|^2) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

(ii) Durch Einzeichnen einer Höhe erhalten wir zwei rechtwinklige Dreiecke. Für diese wenden wir Lemma I.6.14.iii an und erhalten zusammen die Behauptung.

(iii) Sei  $g$  die eindeutig bestimmte Gerade durch  $r$ , die zur Geraden durch  $p$  und  $q$  parallel ist. Anwenden des Stufen- und Gegenwinkelsatzes und der Winkeladdition liefert die Behauptung.  $\square$

Mittels des letzten Satzes folgen sofort die Kongruenzsätze

**Satz I.6.17.** Seien  $p, q, r$  und  $p', q', r'$  jeweils drei nicht kollineare Punkte in einer Euklidischen Ebene.

(SSS) Gilt die Strecke  $\overline{pq} \cong \overline{p'q'}$ ,  $\overline{pr} \cong \overline{p'r'}$  und  $\overline{qr} \cong \overline{q'r'}$ , so sind die Dreiecke kongruent.

(SWS) Gilt  $\overline{pq} \cong \overline{p'q'}$ ,  $\overline{pr} \cong \overline{p'r'}$  und  $\sphericalangle qpr \cong \sphericalangle q'p'r'$ , so sind die Dreiecke kongruent.

(SSWg) Gilt  $\overline{pq} \cong \overline{p'q'}$ ,  $\overline{pr} \cong \overline{p'r'}$  und  $\sphericalangle qrp \cong \sphericalangle q'r'p'$ , wobei  $\sphericalangle qrp$  bzw.  $\sphericalangle q'r'p'$  jeweils der größte der Winkel im Dreieck ist, so sind die Dreiecke kongruent.

(WSW) Gilt der Winkel  $\overline{pq} \cong \overline{p'q'}$ ,  $\sphericalangle pqr \cong \sphericalangle p'q'r'$  und  $\sphericalangle qpr \cong \sphericalangle q'p'r'$ , so sind die Dreiecke kongruent.

**Bemerkung I.6.18.** (SSWg) gilt nicht, wenn man nicht fordert, dass der Winkel der größte im Dreieck ist, vgl. Abb. I.8. Wendet man hier den Sinussatz an, so erhält man zwar  $\sin \sphericalangle pqr$ . Ohne die Zusatzinformation, dass  $\sphericalangle pqr < \frac{\pi}{2}$  ist, gibt es i.A. aber zwei Lösungen  $\sphericalangle pqr \in (0, \pi)$ .

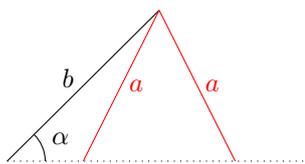


Abb. I.8.: Sind zwei Seiten gegeben und ein Winkel, der nicht der größeren Seite gegenüberliegt, ist das Dreieck nicht mehr eindeutig bestimmt.

## II. Ebene hyperbolische Geometrie

Die Notwendigkeit des Parallelenaxioms für die euklidische Geometrie war lange (d.h. etwa 2000 Jahre lang) nicht klar und wurde seit Euklid diskutiert.

Es gibt eine lange Liste von Personen, die glaubten das Parallelenaxiom durch die bestehenden herleiten zu können. (Ptolemy 2nd century, Proclus 5th century, Omar Khayyam 11th century, John Wallis 17th century, Heinrich Lambert 18th century, Legendre 18th century)

In deren vermeintlichen Beweisen wurden allerdings Annahmen getroffen, die sich bei genauerem Hinsehen als äquivalente Formulierung zum Parallelenaxiom herausstellen.

Es wurden zuerst äquivalente Axiome zum Parallelenaxiom gefunden. D.h. ersetzt man (P) durch ein solches äquivalentes Axiom ist die Geometrie, z.B.:

- Die Winkelsumme im Dreieck beträgt zwei Rechte ( $= 180^\circ$ ) – (wir haben schon gesehen dass das falsch ist in hyperbolischen Geometrie).
- Es gibt mindestens ein Rechteck.
- Zu jedem Dreieck gibt es ein ähnliches Dreieck beliebiger Größe.
- Stufenwinkel an Parallelen sind gleich groß. (vgl. ÜA 2)
- Durch einen Punkt im Inneren eines Winkels gibt es stets eine Gerade, die die beiden Schenkel schneidet.

Erst 1862 stellte Nikolai Lobatschewski eine neue Geometrie vor in der alle Axiome der euklidischen gelten – bis auf das Parallelenaxiom. Dies war die hyperbolische Geometrie. Auch diese Geometrie lässt sich axiomatisch eindeutig (bis auf Isomorphie) beschreiben, indem man die gleiche Axiomatik wie für die euklidische Ebene verwendet. Jedoch wird das Axiom (P) durch das folgende ersetzt:

(H) (Hyperbolisches Parallelenaxiom) Für jede Gerade  $g$  und jeden Punkt  $p$ , der nicht auf  $g$  liegt, gibt es mindestens zwei Geraden  $h$  durch  $p$  mit  $g \cap h = \emptyset$ .

### II.1. Axiomatischer Zugang

**Definition II.1.1.** Sei  $(P, G, I, \mathcal{A})$  eine angeordnete Inzidenzgeometrie mit einer Relation  $\cong_S$  auf Strecken und einer Relation  $\cong_W$  auf Winkeln. Falls das 6-Tupel  $M_1 := (P, G, I, \mathcal{A}, \cong_S, \cong_W)$  die Axiome (K1)–(K6), (H) und (V1) erfüllt, nennen wir es ein *vorläufiges Modell der hyperbolischen Ebene*. Die Begriffe einer Erweiterung eines vorläufigen Modells und eines maximalen Modells sind analog zu Definition I.5.2 wie gehabt.

Eine *hyperbolische Ebene* ist ein vorläufiges Modell der hyperbolischen Ebene, welches (V2) erfüllt.

Ein *Isomorphismus* von hyperbolischen Ebenen ist analog zum Isomorphismus von euklidischen Ebenen, vgl. Definition I.5.3.

**Bemerkung II.1.2.** (i) Obwohl die Parallele durch einen Punkt nicht mehr eindeutig ist, gibt es trotzdem noch eine ausgezeichnete Parallele zu  $\ell$  durch  $p$ , vgl. Übungsaufgabe 12.

(ii) Wie im euklidischen Fall ist die hyperbolische Ebene bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

### II.2. Die hyperbolische Halbebene

Wir wollen ein erstes Modell der hyperbolischen Ebene betrachten – die hyperbolische Halbebene. Wir haben dieses Modell schon einmal in den Übungsaufgaben kennengelernt.

Sei  $P := \mathbb{H} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \subset \mathbb{R}^2$ . Die Menge  $g_b = \{(b, y) \in P \mid y > 0\}$  bzw.  $h_{x_0, r} = \{(x, y) \in P \mid (x - x_0)^2 + y^2 = r^2, y > 0\}$  sei jeweils eine Gerade, vgl. Abbildung II.1. Die Menge aller dieser Geraden mit  $b, x_0 \in \mathbb{R}$  und  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  sei  $G$ . Es gelte  $(p, g) \in I \subset P \times G$  genau dann, wenn  $p \in g \subset P$  gilt.

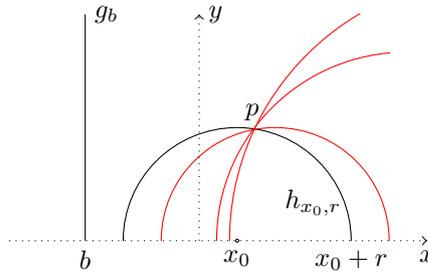


Abb. II.1.: Geraden der hyperbolischen Ebene; alle roten Kreise gehen durch den Punkt  $p$  und sind parallel zu  $g_b$  und z.B. auch zu jedem Kreis der links von  $g_b$  liegt.

**Lemma II.2.1.**

- (i)  $(P, G, I)$  ist eine Inzidenzgeometrie.
- (ii) Zu jeder Gerade  $\ell$  in  $G$  und jedem Punkt  $p \in P$ , der nicht auf  $\ell$  liegt, gibt es unendlich viele Geraden durch  $p$ , die zu  $\ell$  parallel sind.
- (iii) Eine Anordnung auf  $P$  erhalten wir, in dem wir auf Geraden der  $g_b$  die Anordnung wie in der euklidischen Ebene verwenden und Geraden der Form  $h_{x_0, r}$  mittels des (euklidischen) Kreiswinkels durch das Intervall  $(0, \pi)$  parametrisieren (also z.B.  $\alpha \mapsto (r \cos \alpha + x_0, r \sin \alpha)$ ) und dort die (euklidische) Anordnung verwenden. Diese Anordnung erfüllt die Anordnungsaxiome.

*Beweis.* (i) vgl. Übungsaufgabe 2

(ii) vgl. Abbildung II.1.

(iii) Der Beweis erfolgt durch direktes Nachrechnen. □

Wir werden im folgenden  $\mathbb{R}^2$  oft mit den komplexen Zahlen identifizieren und mit diesen rechnen.

Seien nun  $p, q \in P$ ,  $p \neq q$ . Nach Lemma II.2.1 gibt es eine eindeutige Gerade  $\ell$  durch  $p$  und  $q$ . Wir versehen als nächstes die hyperbolische Ebene mit einer Abstandsfunktion. Dazu definieren wir zuerst ein Hilfsobjekt

**Definition II.2.2.** Für vier komplexe Zahlen  $z_1, \dots, z_4$ , von denen mindestens drei verschieden sind, definieren wir das *Doppelverhältnis*

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3} \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \tag{II.1}$$

wobei  $(z_1, z_2, z_3, z_4) = \infty$  sein soll, falls  $z_1 = z_4$  oder  $z_2 = z_3$  ist. Für  $z_1, z_2, z_3$  verschieden sei

$$(z_1, z_2, z_3, \infty) := \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}. \tag{II.2}$$

**Bemerkung II.2.3.** (i) Es gelten die folgenden Isometrie gleichungen  $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_3, z_4, z_1, z_2) = (z_2, z_1, z_3, z_4)^{-1} = (z_1, z_2, z_4, z_3)^{-1} = (z_2, z_1, z_4, z_3)$  für (II.1).

- (ii) Es gilt  $(z_1, z_2, z_3, z_4) \rightarrow (z_1, z_2, z_3, \infty)$  für  $|z_4| \rightarrow \infty$  – somit ist die Definition in (II.2) die natürliche Wahl.  
Es gilt: Das Doppelverhältnis zett 1, zett 2, zett 3, zett 4 geht gegen das doppelverhältnis ..... unendlich, für den Fall, dass der Betrag von zett 4 gegen unendlich geht.

**Definition II.2.4.** Sei  $\ell$  die Gerade durch  $p, q \in \mathbb{H}$ ,  $p \neq q$ . Seien  $u, v$  die Punkte in  $\mathbb{R} \times \{0\} \cup \{\infty\}$ , die die *Randpunkte* der Geraden  $\ell$  bilden, vgl. Abb. II.2 links.

Wir setzen

$$d_{\mathbb{H}}(p, q) := |\ln |(p, q, u, v)|| \text{ und } d_{\mathbb{H}}(p, p) := 0$$

und definieren

$$\overline{pq} \cong \overline{rs} \text{ genau dann, wenn } d_{\mathbb{H}}(p, q) = d_{\mathbb{H}}(r, s)$$

gilt.

Ich habe Ihnen schon erklärt was Winkel in der hyperbolischen Geometrie sind.

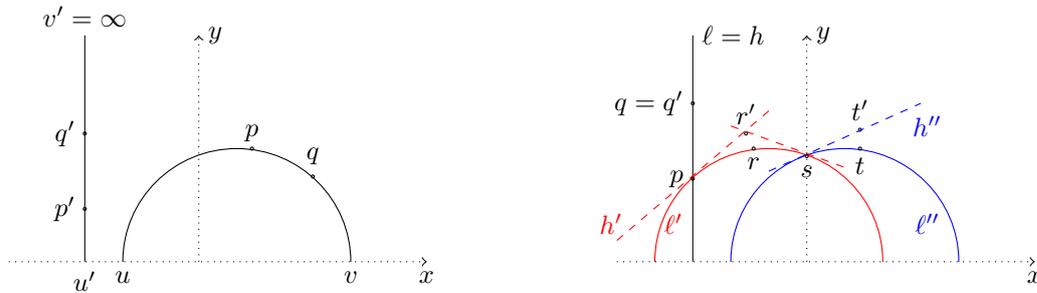


Abb. II.2.: Links:  $u$  und  $v$  sind die Randpunkte der Geraden durch  $p$  und  $q$ . Analog sind  $u'$  und  $v' = \infty$  sind die Randpunkte der Geraden durch  $p'$  und  $q'$ .  
 Rechts: Dem Winkel  $\sphericalangle qpr$  in hyperbolischer Ebene ordnen wir den Betrag des euklidischen Winkels  $\sphericalangle q'p'r'$  zu, analog dem Winkel  $\sphericalangle rst$  dem Betrag des euklidischen Winkels  $\sphericalangle r'st'$ .

Seien  $p, q, r$  drei nichtkollineare Punkte. Seien  $\ell$  bzw.  $\ell'$  die Geraden durch  $p$  und  $q$  bzw. durch  $q$  und  $r$ . Seien  $h$  und  $h'$  die Tangenten\* an  $\ell$  bzw.  $\ell'$  in  $p$ . Sei  $q'$  bzw.  $r'$  ein Punkt auf  $h$  bzw.  $h'$ , der auf der gleichen Seite von  $h'$  bzw.  $h$  liegt wie  $q$  bzw.  $r$ , vgl. Abb. II.2 rechts. Dem Winkel  $\sphericalangle qpr$  in hyperbolischer Ebene ordnen wir den Betrag des euklidischen Winkels  $\sphericalangle q'p'r'$  zu. Wir nennen zwei Winkel der hyperbolischen Ebene kongruent, wenn die Beträge der zugehörigen euklidischen Winkel übereinstimmen.

Es ist von der Definition des Abstands in der Hyperbolischen Ebene absolut nicht intuitiv, wie diese Funktion verhält. Daher lassen Sie uns dieses kleine Programm anschauen, welches den Abstand zwischen zwei Punkten für uns berechnet.

Zum Beispiel setzen wir den ersten Punkt auf  $-1, 1$  und den zweiten  $1, 1$ . Wir erhalten eine Distanz von etwa  $1,7$  (eins komma sieben) zwischen diesen.

Man kann sehen, dass wenn der Imaginäranteil zweier Punkte steigt, dass die Distanz zwischen ihnen sich verringert und umgekehrt: Wenn der Imaginärteil sinkt steigt damit ihre Distanz

Des weiteren sieht man, dass für sehr kleine Abstände zweier Punkte dieser nahezu mit dem Euklidischen Abstand übereinstimmt.

Hier ist ein künstlerischer Eindruck von hyperbolischer Geometrie.

**Bemerkung II.2.5.** (i) Man kann  $d_{\mathbb{H}}$  auch expliziter angeben:<sup>†</sup>

$$d_{\mathbb{H}}(p, q) = \operatorname{arcosh} \left( 1 + \frac{\|q - p\|^2}{2\Im p \Im q} \right).$$

Das kann man nachrechnen, in dem man die Randpunkte der Geraden durch  $p$  und  $q$  explizit berechnet<sup>‡</sup>. Für die meisten der folgenden Überlegungen, kann man aber mit dem Doppelverhältnis besser arbeiten.

(ii)  $d_{\mathbb{H}}$  ist eine Abstandsfunktion auf  $\mathbb{H}$ .<sup>§</sup>

(iii) Es gilt genau dann  $d_{\mathbb{H}}(p, r) = d_{\mathbb{H}}(p, q) + d_{\mathbb{H}}(q, r)$ , wenn  $p, q, r$  Punkte auf einer Geraden sind, so dass  $q$  zwischen  $p$  und  $r$  liegt. Das impliziert insbesondere, dass eine Isometrie der hyperbolischen Ebene, Geraden auf Geraden abbilden muss.

**Satz II.2.6.**  $\mathbb{H}$  mit obiger Inzidenz- und Anordnungsstruktur, sowie den obigen Relationen für Strecken und Winkel ist eine hyperbolische Ebene.

*Beweis.* Für die Inzidenz- und Anordnungsaxiome und Axiom (H) vgl. Lemma II.2.1. (K1)–(K6) und (V1) kann man recht einfach nachrechnen. (V2) folgt ähnlich wie in der euklidischen Ebene.  $\square$

\*Ist  $\ell$  schon eine euklidische Gerade, dann ist  $h = \ell$ .

<sup>†</sup>Hierbei ist  $\Im p$  der Imaginärteil von  $p$  und  $\operatorname{arcosh}$  die Umkehrfunktion vom Kosinus hyperbolicus  $\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

<sup>‡</sup>und  $\cosh(\ln(x)) = \frac{x^2 + 1}{2x}$  benutzt

<sup>§</sup>Das Nachrechnen der Dreiecksungleichung erfordert Arbeit.

## II.3. Andere hyperbolische Modelle

Vorl. 7

Wie kann man ganz einfach ein anderes Modell erhalten?  $P'$  sei eine Menge und soll die Menge der Punkte im neuen Modell, zu  $\mathbb{H}$  isomorphen Modell, werden. Hat man eine Bijektion  $f: \mathbb{H} \rightarrow M$ , dann kann man  $f$  nutzen um aus  $M$  ein Modell einer hyperbolischen Ebene zu machen:

- (i) Geraden in  $M$  seien genau die Bilder der Geraden in  $\mathbb{H}$ .
- (ii)  $p \in M$  liege genau dann auf einer Geraden in  $M$ , wenn  $f^{-1}(p)$  auf dem Urbild dieser Geraden in  $\mathbb{H}$  liegt.
- (iii)  $p$  liege in  $M$  zwischen  $q$  und  $r$  genau dann, wenn  $f^{-1}(p)$  in  $\mathbb{H}$  zwischen  $f^{-1}(q)$  und  $f^{-1}(r)$ .
- (iv) Strecken/Winkel sind in  $M$  kongruent, wenn ihre Urbilder in  $M$  kongruent sind.

Hat man so die nötigen Daten auf  $M$  definiert, kann man leicht zeigen, dass  $M$  ein Modell einer Ebene ist. Wir haben dabei alle benötigten Daten auf  $M$  genau so definiert, dass  $f$  ein Isomorphismus von hyperbolischen Ebenen wird.

Es wird also unendlich viele verschiedene isomorphe Modelle geben. Davon gibt es neben dem hyperbolischen Halbebenenmodell noch zweit weitere, die sehr oft verwendet werden:

- das Poincaresche Kreisscheibenmodell
- das Hyperboloidmodell

### II.3.1. Das Poincaresche Kreisscheibenmodell

Sei  $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D} := \{p \in \mathbb{C} \mid |p| < 1\}$  gegeben durch  $p \mapsto \frac{p-i}{p+i}$ , vgl. Abb. II.3. Man rechnet nach, dass  $f$  wohldefiniert ist (also wirklich nach  $\mathbb{D}$  abbildet) und bijektiv ist.

Wir nutzen nun  $f$ , wie oben beschrieben, um auf  $\mathbb{D}$  die Struktur einer hyperbolischen Ebene zu erhalten. Insbesondere seien:

- Geraden in  $\mathbb{D}$  sollen genau die Bilder von Geraden aus  $\mathbb{H}$  sein, vgl. Abb. II.3.
- $d_{\mathbb{D}}(p, q) := d_{\mathbb{H}}(f^{-1}(p), f^{-1}(q))$
- $\sphericalangle pqr := \sphericalangle f^{-1}(p)f^{-1}(q)f^{-1}(r)$

#### Bemerkung II.3.1.

- (i) Man kann nachrechnen, dass  $\sphericalangle pqr$  in  $\mathbb{D}$  genau dem euklidischen Winkel zwischen den Geraden in  $\mathbb{D}$  sind, vgl. Abb. II.3
- (ii)  $d_{\mathbb{D}}(p, q) = |\ln |(p, q, u, v)||$ , wobei  $u, v$  wieder die Randpunkte der Geraden durch  $p$  und  $q$  sind - also  $u, v \in S^1 = \{u \in \mathbb{C} \mid |u| = 1\}$ .
- (iii) Man sieht schon an dem Vergleich von  $\mathbb{H}$  und  $\mathbb{D}$ , dass man in verschiedenen Modelle bestimmte Eigenschaften mehr oder weniger gut sieht. In  $\mathbb{D}$  sieht man z.B. sehr gut eine Rotationssymmetrie der hyperbolischen Ebene: Rotiert man um einen Winkel  $\alpha$ , in komplexer Schreibweise:  $z \mapsto ze^{i\alpha}$ , dann werden auch die Geraden und damit auch die Randpunkte  $u$  und  $v$  dieser Geraden gedreht. Wegen  $d_{\mathbb{D}}(p, q) = |\ln |(p, q, u, v)|| = |\ln |(pe^{i\alpha}, qe^{i\alpha}, ue^{i\alpha}, ve^{i\alpha})|| = d_{\mathbb{D}}(pe^{i\alpha}, qe^{i\alpha})$ , ist die Rotation eine Isometrie.

## II.4. Isometriegruppe der hyperbolischen Ebene

Vorl. 8

Wir wollen als nächstes die Isometrien der hyperbolischen Ebene bestimmen.

**Lemma II.4.1.** Sei  $f: X \rightarrow Y$  eine Bijektion zwischen metrischen Räumen  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$ , die Abstände erhält, d.h.

$$d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

Sei  $\phi: X \rightarrow X$  eine Isometrie von  $(X, d_X)$ . Dann ist  $\psi := f \circ \phi \circ f^{-1}$  eine Isometrie von  $(Y, d_Y)$ .

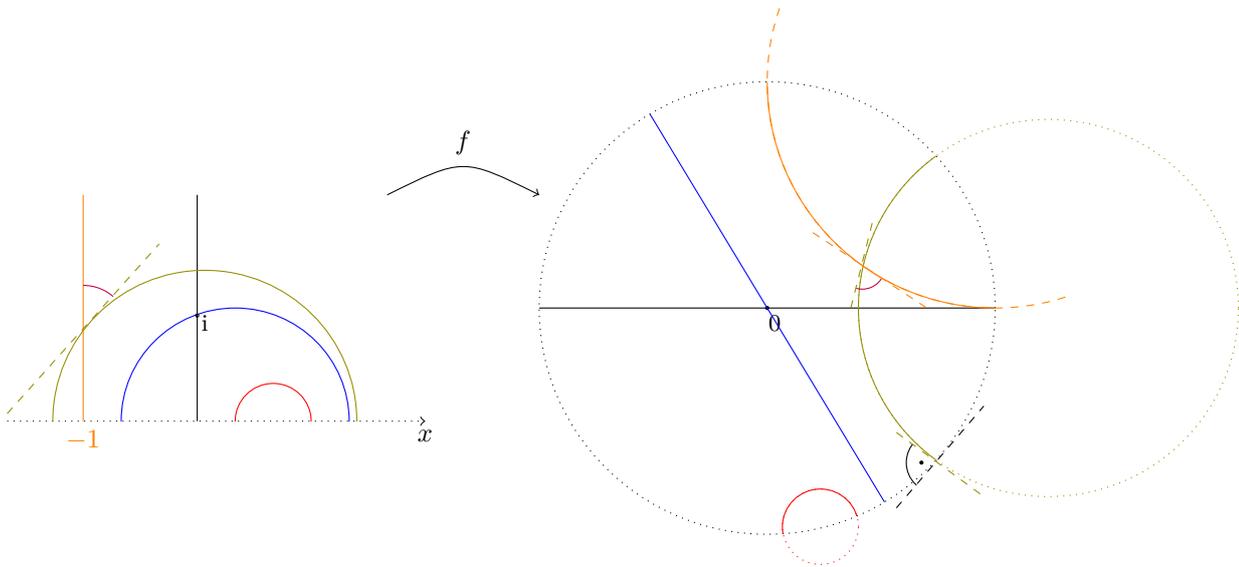


Abb. II.3.: Die Abbildung (nicht maßstabsgetreu) zeigt, wohin Geraden aus  $\mathbb{H}$  unter  $f$  abgebildet werden. Jede Gerade durch  $i \in \mathbb{H}$  wird auf eine Gerade durch  $0 \in \mathbb{D}$  abgebildet. Alle anderen Geraden aus  $\mathbb{H}$  werden auf Teilkreise (Schnitt eines Kreises mit  $\mathbb{D}$ ) abgebildet. Diese Teilkreise sind immer derart, dass sie den Einheitskreis (also den 'Rand' von  $\mathbb{D}$ ) im rechten Winkel schneiden (in der Abbildung nur für die grüne Gerade eingezeichnet). Die Beträge der Winkel in  $\mathbb{D}$  erhält man, analog wie in  $\mathbb{H}$ , als euklidischen Winkel der jeweiligen Tangenten - vgl. die lilanen Winkel.

*Beweis.*

$$d_Y(p, q) = d_X(f^{-1}(p), f^{-1}(q)) = d_X(\phi(f^{-1}(p)), \phi(f^{-1}(q))) = d_X(f^{-1}(\psi(p)), f^{-1}(\psi(q))) = d_Y(\psi(p), \psi(q))$$

□

Für uns heißt das: Die Isometrien werden für die einzelnen hyperbolischen Modelle verschieden sein, aber können bijektiv auf einander abgebildet werden. Es reicht also, die Isometrien für eines dieser Modelle zu bestimmen.

### II.4.1. Isometriegruppe für $\mathbb{H}$

**Definition II.4.2.** Eine Matrix  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$ , wenn  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  und  $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc = 1$ .

**Definition II.4.3.** Wir definieren den Rand einer hyperbolischen Ebene:

$$\partial\mathbb{H} := \{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C}, \text{Im}(z) = 0\}.$$

**Definition II.4.4.** Wir definieren eine Wirkung von Matrizen aus  $SL_2(\mathbb{R})$  auf  $\mathbb{H}$  und  $\partial\mathbb{H}$ :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \begin{cases} \infty, & cz + d = 0, \\ \frac{az+b}{cz+d}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad \text{wenn } z \neq \infty,$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \infty = \begin{cases} a/c, & c \neq 0, \\ \infty, & c = 0. \end{cases}$$

**Beispiel II.4.5.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot z = \begin{cases} z + 1, & z \neq \infty, \\ \infty, & z = \infty. \end{cases}$$

**Beispiel II.4.6.**

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \cdot z = \begin{cases} \frac{\cos \phi \cdot z + \sin \phi}{-\sin \phi \cdot z + \cos \phi}, & z \neq 1/\tan \phi, \\ \infty, & z = 1/\tan(\phi), \\ -1/\tan \phi, & z = \infty. \end{cases}$$

**Bemerkung II.4.7.** Es ist nicht genau das selbe wie eine Rotation in  $\mathbb{R}^2$ .

**Beispiel II.4.8.** Sei  $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , dann

$$\begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix} \cdot z = \begin{cases} e^{2r}z, & z \neq \infty, \\ \infty, & z = \infty. \end{cases}$$

**Bemerkung II.4.9** (Ohne Beweis). Seien  $A, B \in SL_2(\mathbb{R})$ . Dann gilt:  $\forall z \in \mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$ :

$$A.(B.z) = (A \cdot B).z.$$

**Lemma II.4.10.** Die orientierungserhaltende Isometrien der hyperbolische Ebene sind gegeben durch

$$\{A \in SL_2(\mathbb{R})\}.$$

*Beweis.* Wir werden nur beweisen dass eine Wirkung von Elementen aus  $SL_2(\mathbb{R})$  eine Isometrie ist. Sei  $c \neq 0$ . Dann

$$\begin{aligned} \frac{az + b}{cz + d} &= \frac{\frac{a}{c}(cz + d) - \frac{ad}{c} + b}{cz + d} \\ &= \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c^2z + cd} \\ &= \frac{a}{c} - \frac{1}{c^2(z + \frac{d}{c})}. \end{aligned}$$

Das bedeutet dass

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a/c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1/c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & d/c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da jede Wirkung dieser Matrizen eine Isometrie ist (siehe Hausaufgabe), dann ist die Komposition aus mehreren ebenfalls eine.

Sei  $c = 0$ , dann  $ad = 1 + bc = 1$  und  $d = 1/a$ , und

$$\frac{az + b}{d} = a^2z + ba, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ba \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}.$$

□

## II.4.2. Isometriegruppe für $\mathbb{D}$

**Lemma II.4.11.** Die orientierungserhaltende Isometrien der hyperbolische Ebene sind gegeben durch

$$\{A \in SU(1, 1)\},$$

wobei

$$SU(1, 1) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\}.$$

*Beweis.* Sei  $A \in SL_2(\mathbb{R})$ , dann

$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}^{-1} \in SU(1, 1).$$

□

## II.5. Trigonometrie der hyperbolischen Ebene

Seien  $p, q, r$  drei nicht kollineare Punkte in der hyperbolischen Ebene, dann betrachten wir das Dreieck  $\triangle pqr$ , vgl. Abb. II.4, mit den Seitenlängen **Vorl. 9**

$$a = |\overline{rq}|, \quad b = |\overline{pq}|, \quad c = |\overline{pr}|$$

und den Winkelbeträgen:

$$\alpha = |\angle qpr|, \quad \beta = |\angle prq|, \quad \gamma = |\angle pqr|$$

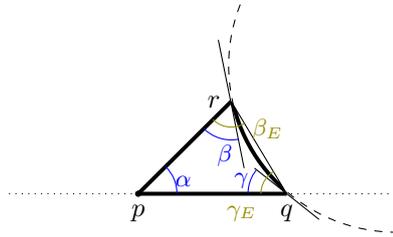


Abb. II.4.: Ein hyperbolisches Dreieck in  $\mathbb{D}$  mit  $p$  im Ursprung

Da die Seitenlängen und Winkel nicht vom Modell der hyperbolischen Ebene abhängen, können wir es frei wählen. Wir wählen  $\mathbb{D}$ . Da auch Isometrien diese Größen invariant lassen, können wir o.B.d.A. annehmen, dass  $p = 0, q \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $r = se^{i\alpha}$  ist, vgl. Übungsaufgabe und Abb. II.4.

**Lemma II.5.1.** Seien  $u, v \in \mathbb{D}$ . Dann

$$\cosh d_{\mathbb{H}}(u, v) = 1 + \frac{2\|u - v\|^2}{(1 - \|u\|^2)(1 - \|v\|^2)}.$$

*Beweis.* Sei  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$  so dass

$$f(p) = \frac{p - i}{p + i}.$$

Dann  $d_{\mathbb{D}}(u, v) = d_{\mathbb{H}}(f^{-1}(u), f^{-1}(v))$ , und

$$\begin{aligned} \cosh(d_{\mathbb{D}}(u, v)) &= \cosh(d_{\mathbb{H}}(f^{-1}(u), f^{-1}(v))) \\ &= 1 + \frac{\|f^{-1}(u) - f^{-1}(v)\|^2}{2 \cdot \operatorname{Im}(f^{-1}(u)) \cdot \operatorname{Im}(f^{-1}(v))}. \end{aligned}$$

Beachten Sie dass  $f^{-1}(p) = i \cdot \frac{p+1}{p-1}$  und dass

$$\begin{aligned} \|f^{-1}(u) - f^{-1}(v)\|^2 &= \left\| \frac{1+u}{-1+u} - \frac{1+v}{-1+v} \right\|^2 \\ &= 4 \frac{\|v-u\|^2}{\|u-1\|^2 \|v-1\|^2}, \\ \operatorname{Im}(f^{-1}(u)) &= \operatorname{Im} \left( i \frac{(1+u)\overline{(u-1)}}{(u-1)\overline{(u-1)}} \right) \\ &= \frac{\operatorname{Im}(i(-1+u\bar{u}-u+\bar{u}))}{\|u-1\|^2} \\ &= \frac{\|u\|^2 - 1}{\|u-1\|^2}. \end{aligned}$$

Dann  $\cosh(d_{\mathbb{D}}(u, v)) = 1 + \frac{2\|u-v\|^2}{(1-\|u\|^2)(1-\|v\|^2)}$ , was zu beweisen war. □

**Beispiel II.5.2.** Sei  $\alpha \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}$ , dann

$$\cosh(d_{\mathbb{D}}(0, se^{i\alpha})) = 1 + \frac{2\|se^{i\alpha}\|^2}{(1-0)(1-\|se^{i\alpha}\|^2)} = \frac{1+s^2}{1-s^2}.$$

## II. Ebene hyperbolische Geometrie

**Satz II.5.3.** (i) *Seitenkosinussatz:*  $\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma$ .

(ii) *Sinussatz:*  $\frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma}$ .

(iii) *Winkelkosinussatz:*  $\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cosh c$ .

*Beweis.* (i) Seien  $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$  wie oben. Dann

$$\begin{aligned}\cosh(c) &= 1 + \frac{2|r-q|}{(1-|r|^2)(1-|q|^2)}, \\ \cosh(b) &= \cosh d_{\mathbb{D}}(0, q) = \frac{1+q^2}{1-q^2}, \quad \cosh(a) = \frac{1+|r|^2}{1-|r|^2}, \\ \sinh(b) &= \sqrt{\cosh^2(b) - 1} = \frac{2q}{1-q^2}, \quad \sinh(a) = \frac{2|r|}{1-|r|^2}, \\ \cos(\gamma) &= \frac{|r|^2 + |q|^2 - |r-q|^2}{2|r|q}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\cosh(a) \cosh(b) - \sinh(a) \sinh(b) \cos(\gamma) &= \frac{1+q^2}{1-q^2} \cdot \frac{1+|r|^2}{1-|r|^2} - \frac{4q|r|^2}{(1-q^2)(1-|r|^2)} \cdot \frac{|r|^2 + |q|^2 - |r-q|^2}{2|r|q} \\ &= \frac{(1+q^2)(1+|r|^2) - 2q^2 - 2|r|^2 - 2|r-q|^2}{(1-q^2)(1-|r|^2)} \\ &= 1 + \frac{2|q-r|^2}{(1-|r|^2)(1-|q|^2)} \\ &= \cosh(c).\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sinh(c)}{\sin(\gamma)}\right)^2 &= \frac{\sinh^2(c)}{1 - \cos^2(\gamma)} \\ &= \frac{\sinh^2 c}{1 - \left(\frac{\cosh(a) \cosh(b) - \cosh(c)}{\sinh(a) \sinh(b)}\right)^2} \\ &= \frac{\sinh^2 a \cdot \sinh^2 b \cdot \sinh^2 c}{\sinh^2 a \cdot \sinh^2 b - (\cosh a \cdot \cosh b - \cosh c)^2} \\ &= \frac{\sinh^2 a \cdot \sinh^2 b \cdot \sinh^2 c}{\sinh^2 a (\sinh^2 b - \cosh^2 b) - \cosh^2 b - \cosh^2 c + 2 \cosh a \cdot \cosh b \cdot \cosh c} \\ &= \frac{\sinh^2 a \cdot \sinh^2 b \cdot \sinh^2 c}{-\sinh^2 a - \cosh^2 b - \cosh^2 c + 2 \cosh a \cdot \cosh b \cdot \cosh c}.\end{aligned}$$

Sowohl der Zähler als der Nenner sind symmetrisch in  $a, b$  und  $c$  und daraus folgt der Sinussatz.

(iii)

$$\begin{aligned}\cos(\gamma) &= \frac{\cosh a \cdot \cosh b - \cosh c}{(\cosh^2 a - 1)^{1/2} (\cosh^2 b - 1)^{1/2}}, \\ \cos(\beta) &= \frac{\cosh a \cdot \cosh c - \cosh b}{(\cosh^2 a - 1)^{1/2} (\cosh^2 c - 1)^{1/2}}, \\ \cos(\alpha) &= \frac{\cosh b \cdot \cosh c - \cosh a}{(\cosh^2 b - 1)^{1/2} (\cosh^2 c - 1)^{1/2}}.\end{aligned}$$

Sei  $D = 1 + 2 \cosh(a) \cdot \cosh(b) \cdot \cosh(c) - (\cosh^2(a) + \cosh^2(b) + \cosh^2(c))$ , dann

$$\sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha) = \frac{D}{(\cosh^2 b - 1)(\cosh^2 c - 1)},$$

$$\sin^2(\beta) = \frac{D}{(\cosh^2 a - 1)(\cosh^2 c - 1)},$$

$$\sin^2(\gamma) = \frac{D}{(\cosh^2 a - 1)(\cosh^2 b - 1)},$$

und

$$\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} = \dots = \frac{\cosh c \cdot (1 + 2 \cosh a \cdot \cosh b \cdot \cosh c - \cosh^2 a - \cosh^2 b - \cosh^2 c)}{D} = \cosh(c).$$

□

**Bemerkung II.5.4.** Aus dem letzten Satz folgen die Kongruenzsätze (SSS), (SWS), (WSW), (SWW), (SSWg), die es auch schon im Euklidischen gibt. Als neuer Kongruenzsatz folgt mit dem Winkelkosinussatz (WWW), insbesondere sind im hyperbolischen Dreieck die Seitenlängen schon durch die Winkel bestimmt.



### III. Einschub: Kegelschnitte

Wir betrachten den Kegel  $K := \{(x_0, x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = x_0^2\}$  und schneiden den mit einer Ebene  $E := \{(x_0, x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha x_0 + \beta x_1 + \gamma x_2 = \delta\}$ .

Die dabei entstehende Kurve nennt man *Kegelschnitt* oder *Quadrik*

$$E \cap K = \{(x_0, x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = x_0^2, \alpha x_0 + \beta x_1 + \gamma x_2 = \delta\}.$$

Die Lösungsmenge erfüllt dann eine Gleichung der Form

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0.$$

**Beispiel III.0.1.** Beispiele für Gleichungen der Form:  $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$  und ihre Lösungsmengen:

- (i)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a, b > 0$ : Das ist eine Ellipse. Ellipsen entstehen als Kegelschnitt, wenn die Ebene  $E$  einen zeitartigen Normalenvektor besitzt (und die Ebene damit nur raumartige Vektoren enthält) und nicht durch den Ursprung geht.
- (ii)  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, a, b > 0$ : Das ist eine Hyperbel. Hyperbeln entstehen als Kegelschnitt, wenn die Ebene  $E$  einen raumartigen Normalenvektor hat und nicht durch den Ursprung geht.
- (iii)  $\frac{x^2}{a^2} + y = 0$ : Das ist eine Parabel. Parabeln entstehen als Kegelschnitt, wenn die Ebene  $E$  einen lichtartigen Normalenvektor hat und nicht durch den Ursprung geht.
- (iv)  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, a, b > 0$ : Das ist ein Geradenkreuz. Ein Geradenkreuz entsteht als Kegelschnitt, wenn die Ebene  $E$  einen raumartigen Normalenvektor hat und den Ursprung enthält.
- (v)  $b_1x + b_2y = 0, b_1, b_2$  nicht gleichzeitig Null: Das ist eine Gerade. Ein einzelne Gerade entsteht als Kegelschnitt, wenn die Ebene  $E$  einen lichtartigen Normalenvektor und durch den Ursprung geht.
- (vi)  $a^2x^2 + b^2y^2 = 0, a$  und  $b$  nicht gleichzeitig Null. Dann besteht der Kegelschnitt nur noch aus dem Punkt  $\{0\}$ . Das ist dann der Fall, wenn enn die Ebene  $E$  einen zeitartigen Normalenvektor besitzt und durch den Ursprung geht.
- (vii)  $a^2x^2 + b^2y^2 + 1 = 0$ , die leere Menge
- (viii)  $y^2 = 1$ . Dann ist die Lösungsmenge zwei Geraden.
- (ix)  $0 = 0$  Lösungsmenge ist ganz  $\mathbb{R}^2$ .

Die letzten drei Beispiele können nicht als Schnitt eines Kegels mit einer Ebene auftreten.

Man kann zeigen, dass bis auf euklidische Isometrien die obigen Beispiele alle vorkommenden Kegelschnitte liefern. Diese Gleichungen werden Normalformen von Kegelschnitten genannt. Insbesondere kann man durch eine Koordinatentransformation jede Quadrik in Normalform überführen.

Dazu benutzen wir für die Kegelschnittgleichung folgende Schreibweise

$$(x, y)A(x, y)^T + b^T(x, y)^T + c = 0 \tag{III.1}$$

für eine symmetrische reelle Matrix  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  und  $c \in \mathbb{R}$ .

**Algorithmus um die Normalform eines Kegelschnittes zu erhalten:**

1. Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2$  von  $A$  mit zugehöriger, normierter Eigenvektorbasis  $v_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix}$  bestimmen.†

---

†Immer möglich, da  $A$  symmetrisch ist.

### III. Einschub: Kegelschnitte

2. Wir setzen

$$S := \begin{pmatrix} v_{11} & \pm v_{12} \\ v_{21} & \pm v_{22} \end{pmatrix}.$$

Das  $\pm$  wird dabei so gewählt, das  $S$  Determinante 1 hat, also in  $SO(2)$  liegt, und damit eine Drehmatrix ist\* Dann ist  $A = S \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) S^T$ . † und wir setzen

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = S^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

3. Es ist  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ . Einsetzen in (III.1) liefert eine Gleichung der Form

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + b'_1 x' + b'_2 y' + c = 0 \quad (\text{III.2})$$

4. a) Falls  $\lambda_1 \neq 0$  ist, quadratisch in  $x'$  ergänzen:

$$\lambda_1 \underbrace{\left(x' + \frac{b'_1}{2\lambda_1}\right)^2}_{=: \tilde{x}} + \lambda_2(y')^2 + b'_2 y' + c - \frac{(b'_1)^2}{4\lambda_1} = 0$$

Analoges Vorgehen falls  $\lambda_2 \neq 0$  für  $y'$  führt zur neuen Koordinate  $\tilde{y}$ .

b) Falls genau ein  $\lambda_i = 0$ , o.B.d.A.  $i = 1$ , ist, ist  $0 = \lambda_2 \tilde{y}^2 + b'_1 x' + c$ . Für  $b'_1 \neq 0$  setze  $\tilde{x} = x' + \frac{c}{b'_1}$  und wir erhalten die Normalform der Parabel. Für  $b'_1 = 0$ , bestimme die Lösungsmenge für  $\tilde{y}$  und setze  $\tilde{x} = x'$ . Die Lösungsmenge ist dann entweder leer oder besteht aus einer oder zwei Geraden, je und nach Vorzeichen von  $\tilde{y}$ .

c) Ist  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , gilt  $0 = b'_1 x' + b'_2 y' + c$ . Die Lösungsmenge ist entweder eine Gerade, die leere Menge (falls  $b'_1 = b'_2 = 0, c \neq 0$ ) oder ganz  $\mathbb{R}^2$  (falls  $b'_1 = b'_2 = c = 0$  ist). Im Falle der Geraden ist ein  $b'_i \neq 0$ , o.B.d.A. sei das  $b'_1$ . Setze dann  $\tilde{x} = x' + \frac{c}{b'_1}$  und  $\tilde{y} = y'$ . In den anderen beiden Fällen, setze  $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x', y')$ .

In allen diesen Fällen sind  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  aus  $(x', y')$  durch Verschiebung entstanden und damit aus  $(x, y)$  durch eine euklidische Bewegung und die verbliebene Gleichung hat Normalform, vgl. Beispiel III.0.2.

#### Beispiel III.0.2.

$$0 = x^2 + y^2 - 4xy + 2x + 2y - 5 \quad (\text{III.3})$$

Dann ist  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$  mit den Eigenwerten  $\lambda_1 = -1$  und  $\lambda_2 = 3$  und zugehörigen normierten Eigenvektoren  $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  bzw.  $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Wir setzen  $S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  - dann ist  $S \in SO(2)$ . Dann ist  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x' - y' \\ x' + y' \end{pmatrix}$ .

Einsetzen in (III.3) und quadratisches Ergänzen liefert

$$0 = -(x')^2 + 3(y')^2 + 2\sqrt{2}x' - 5$$

Dann ist  $\tilde{x} = x' - \sqrt{2}$  und  $\tilde{y} = y'$  und  $1 = -\frac{\tilde{x}^2}{3} + (\tilde{y})^2$  ist die gesuchte Normalform. Es ist eine Hyperbel. Die Normalform ist bzgl. des Koordinatensystems  $(\tilde{x}, \tilde{y}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) - \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y)\right)$  gegeben. Die zugehörigen Asymptoten sind  $\tilde{y} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{x}$ , siehe Abbildung III.1

\*Das muss man nicht so machen. Wenn man darauf verzichtet, hat das neue Koordinatensystem  $(x', y')$  ggf. die umgekehrte Orientierung.

†Denn:  $AS = A(v_1, v_2) = (v_1, v_2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$  und damit  $S^T AS = \underbrace{S^T S}_{=\text{Id}} \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ .

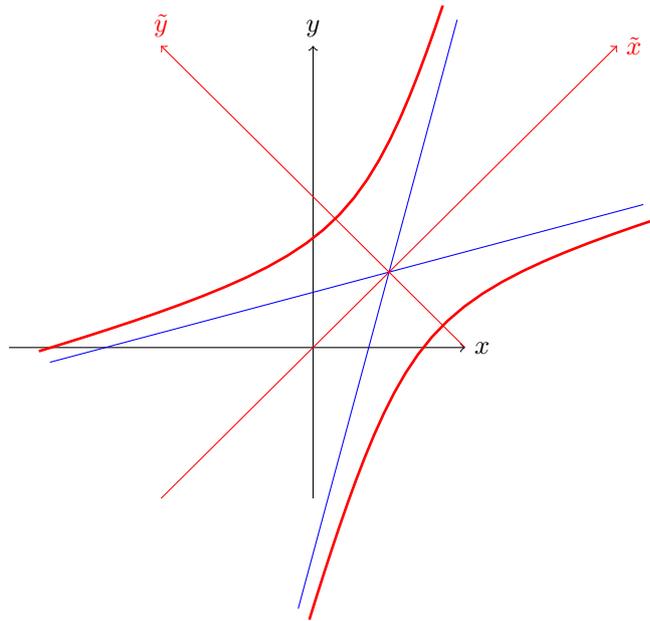


Abb. III.1.: Das neue Koordinatensystem: Die  $\tilde{x}$ -Achse ist die Gerade  $\tilde{y} = 0$ , also hier:  $\frac{1}{\sqrt{2}}(-x + y) = 0$ . Die  $\tilde{y}$ -Achse ist die Gerade  $\tilde{x} = 0$ , also hier:  $\frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) - \sqrt{2} = 0$ . Ein einfacher Weg die Richtung der neuen Achsen zu bestimmen, ist sich einen Punkt zu wählen, der nicht auf den neuen Achsen liegt, z.B. hier  $(x, y) = (1, 0)$ , dazu das Vorzeichen in den neuen Koordinaten zu bestimmen, hier  $\tilde{x} < 0$  und  $\tilde{y} < 0$ .

Nun kann man im neuen Koordinatensystem den Kegelschnitt einzeichnen. Im Falle einer Hyperbel, hilft es die Asymptoten zu bestimmen, hier (in blau)  $\tilde{y} = \pm\sqrt{3}\tilde{x}$ .

Eine andere Möglichkeit, das neue Koordinatensystem zu zeichnen:

Es ist  $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = r_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + t$ . Hier ist  $r_\alpha$  die Drehung um  $\alpha$  um den Ursprung – in unserem Beispiel  $\alpha = -45^\circ$ , d.h. die Koordinaten des Punktes  $(x, y)^T$  werden aktiv um  $-45^\circ$  gedreht. Will man – so wie wir – das Koordinatensystem drehen, der Punkt soll also passiv bleiben, muss man in die entgegengesetzte Richtung drehen, also um  $-\alpha = 45^\circ$ . Danach muss das neu erhaltene Koordinatensystem  $(x', y')^T$  noch um  $-t = (\sqrt{2}, 0)^T$  verschoben werden.



# IV. Sphärische Geometrie

$$P = S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

$$G = \{E \cap S^2 \mid E \subset \mathbb{R}^3 \text{ ist eine Ebene durch den Ursprung}\} = \{\text{Großkreise}\}$$

und  $(p, g) \in I$  genau dann, wenn  $p$  auf dem Großkreis  $g$  liegt, vgl. Beispiel I.1.11.

## IV.1. Axiomatik

Wir haben schon in Beispiel I.1.11 keine Inzidenzgeometrie in unserem Sinne ist. Trotzdem kann man sphärische Geometrie auch axiomatisch betreiben, man muss nur die Axiome anpassen. (s. beiliegendes pdf)

## IV.2. Abstände, Winkel, Trigonometrie und Isometrien

**Definition IV.2.1.** Abstände auf der Sphäre  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$

$$d_S(p, q) := \arccos \langle p, q \rangle \in [0, \pi]$$

**Bemerkung IV.2.2.** (i) Es ist  $p, q \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$  und damit  $\|p\| = \|q\| = 1$ . Sei  $\alpha \in [0, \pi]$  der Winkel, der von  $p, q$  eingeschlossen wird. Dann ist  $\langle p, q \rangle = \|p\| \|q\| \cos \alpha = \cos \alpha$ , also  $d_S(p, q) = \alpha$ .

(ii)  $x \mapsto \cos(x)$  ist auf  $[0, \pi]$  monoton fallend –  $\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$  sei die zugehörige Umkehrfunktion.

(iii)  $\|p \times q\| = \|p\| \|q\| \sin d_S(p, q) = \sin d_S(p, q)$ .<sup>†</sup>

**Lemma IV.2.3.**  $d_S$  ist eine Metrik auf  $S^2$ .

*Beweis.* Symmetrie klar

$d_S(x, y) = 0$  gdw.  $\langle x, y \rangle = 1$ . Es ist

$$1 = |\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\| \cos(\text{eingeschl. Winkel}) \leq \|x\| \|y\| = 1.$$

Es muss also in der Ungleichung Gleichheit gelten, also  $\cos(\text{eingeschl. Winkel}) = \pm 1$  sein, also  $x = \lambda y$  für  $\lambda = \pm 1$ . Da  $\langle x, y \rangle = 1$ , muss  $x = y$  sein.

Dreiecksungleichung: Ist  $d_S(x, y) + d_S(y, z) > \pi$ , dann gilt die Dreiecksungleichung trivialerweise. Sei nun  $d_S(x, y) + d_S(y, z) \leq \pi$ . Dann ist (mit Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

$$\begin{aligned} \cos(d_S(x, y) + d_S(y, z)) &= \cos d_S(x, y) \cos d_S(y, z) - \sin d_S(x, y) \sin d_S(y, z) \\ &= \langle x, y \rangle \langle y, z \rangle - \|x \times y\| \|y \times z\| \\ &\leq \langle x, y \rangle \langle y, z \rangle - \underbrace{\langle x \times y, y \times z \rangle}_{\langle x, y \rangle \langle y, z \rangle - \langle y, y \rangle \langle x, z \rangle} \\ &= \langle x, z \rangle = \cos d_S(x, z) \end{aligned}$$

<sup>†</sup>Nützliche Rechenregeln für Vektoren  $x, y, z, w \in \mathbb{R}^3$  mit Kreuzprodukt:

$$\begin{aligned} x \times y &= -y \times x = \|x\| \|y\| \sin \sphericalangle(x, y) \\ \langle x \times y, z \rangle &= \det(x, y, z) \\ x \times (y \times z) &= \langle x, z \rangle y - \langle y, z \rangle x \\ \langle x \times y, z \times w \rangle &= \langle x, z \rangle \langle y, w \rangle - \langle x, w \rangle \langle y, z \rangle \\ (x \times y) \times (w \times z) &= z \det(x, y, w) - w \det(x, y, z) \end{aligned}$$

#### IV. Sphärische Geometrie

Da sowohl  $d_S(x, y) + d_S(y, z)$  als auch  $d_S(x, z)$  in  $[0, \pi]$  liegen, können wir mittels der Umkehrfunktion  $\arccos$

$$d_S(x, y) + d_S(y, z) \geq d_S(x, z)$$

schließen. □

**Bemerkung IV.2.4.** Wenn Gleichheit in der Dreiecksungleichung gilt, dann müssen  $x \times y$  und  $y \times z$  linear abhängig sind. Da  $x \times y$  senkrecht auf der Ebene ist, die durch  $x$  und  $y$  aufgespannt ist, und analog  $y \times z$  senkrecht zu der von  $y$  und  $z$  aufgespannten, müssen diese beiden Ebenen übereinstimmen. Also müssen  $x, y, z$  die gleiche Ebene aufspannen und damit auf dem gleichen Großkreis liegen.

**Definition IV.2.5.** Sei  $K = S^2 \cap E$  ein Großkreis, sei  $p \in K$ . Dann heißen die Vektoren  $X \in E$  mit  $\langle X, p \rangle = 0$  *Tangentialvektoren* an  $K$  in  $p$ .

Sei  $K$  ein Großkreis,  $p \in K$  und  $X$  ein Tangentenvektor an  $K$  in  $p$ . Dann ist  $K = \{c(t) = \cos(t)p + \sin(t)X \mid t \in \mathbb{R}\}$ . Für  $t \in [0, \pi]$  gilt  $\cos d_S(p, c(t)) = \langle p, c(t) \rangle = \cos t$  und damit  $d_S(p, c(t)) = t$ .

**Lemma IV.2.6.** Seien  $A, B \in S^2$ . Gilt  $A \neq -B$ , d.h.  $A$  und  $B$  sind nicht antipodal, dann gibt es genau einen Großkreis  $K$ , der  $A$  und  $B$  enthält.

*Beweis.* Gilt  $A \neq -B$ . Dann liegen  $A, B, 0 \in \mathbb{R}^3$  nicht auf einer Geraden und bestimmen somit eindeutig eine Ebene  $E$ . Der Großkreis  $K = E \cap S^2$  enthält  $A$  und  $B$  und ist damit auch eindeutig bestimmt. □

**Definition IV.2.7.** Seien  $K_1 = \{c_1(t) := \cos(t)p + \sin(t)X \mid t \in \mathbb{R}\}$  und  $K_2 = \{c_2(t) := \cos(t)p + \sin(t)Y \mid t \in \mathbb{R}\}$  zwei Großkreisbögen durch  $p$ . Sei  $q = c_1(t_1)$  und  $r = c_2(t_2)$  für  $t_i \in (0, \pi)$ .<sup>\*</sup> Dann ist die Winkelgröße zwischen den Großkreisen definiert als

$$\sphericalangle qpr := \arccos \langle X, Y \rangle.$$

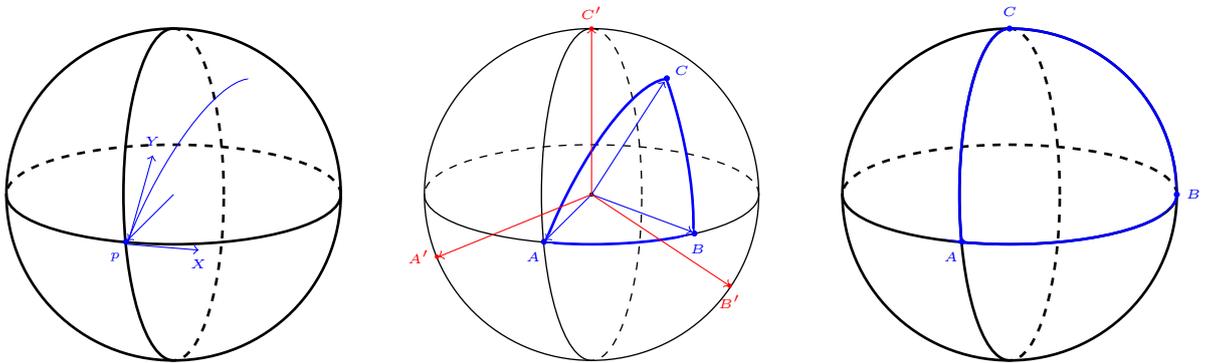


Abb. IV.1.: Mittig: Das Polardreieck  $A'B'C'$  zum Dreieck  $ABC$ .

Rechts: Ein Dreieck mit drei rechten Winkeln.

#### Vorl. 11

**Definition IV.2.8.** Ein *sphärisches Dreieck* auf  $S^2$  ist ein Tripel von Punkten  $A, B, C \in S^2$ , die paarweise verschieden und nicht antipodal sind und auch nicht alle auf einem Großkreis liegen.  $A, B, C$  sind die *Ecken* des Dreiecks, die kürzeren Großkreisbögen zwischen  $A$  und  $B$ , bzw.  $B$  und  $C$ , bzw.  $C$  und  $A$  heißen *Seiten* des Dreiecks. Die Seitenlängen sind jeweils durch  $c := d_S(A, B)$ ,  $a := d_S(B, C)$ ,  $b := d_S(C, A)$ . Die Winkelgrößen sind gegeben durch  $\alpha := \sphericalangle(B, A, C)$  etc.

**Beispiel IV.2.9.** Sphärisches Dreieck mit drei rechten Winkeln, vgl. Abbildung IV.1 rechts.

<sup>\*</sup>Damit bildet  $\{c_i(t) \mid t \in (0, t_i)\}$  den kürzeren Großkreisbogen zwischen  $p$  und  $q$  bzw.  $r$ .

**Lemma IV.2.10.** Sei  $A, B, C$  ein sphärisches Dreieck mit Winkelgrößen  $\alpha, \beta, \gamma$  wie oben. Dann gilt

$$\alpha = \sphericalangle(A \times B, A \times C).$$

(Hierbei werden  $A, B, C$  als Vektoren im  $\mathbb{R}^3$  aufgefasst.)

*Beweis.* Seien  $X, Y$  die Tangentenvektoren der Länge eins an  $AB$  und  $AC$  im Punkt  $A$  in Richtung des kürzeren Geodätenbogens. Dann gibt es  $c, b < \pi$  mit

$$B = \cos(c)A + \sin(c)X, \quad C = \cos(b)A + \sin(b)Y$$

(Wegen der Wahl von  $X$  und  $Y$  ist  $c = d_S(A, B)$  und  $b = d_S(A, C)$ , vgl. Definition IV.2.5 und darunter.) Dann ist  $A \times B = \sin(b)A \times X$  und  $A \times C = \sin(c)A \times Y$ , wobei  $A \times X$  und  $A \times Y$  jeweils Länge eins haben. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \cos \sphericalangle(A \times B, A \times C) &= \frac{\langle A \times B, A \times C \rangle}{\|A \times B\| \|A \times C\|} = \frac{\langle A \times X, A \times Y \rangle}{\|A \times X\| \|A \times Y\|} \\ &= \langle A \times X, A \times Y \rangle = \langle A, A \rangle \langle X, Y \rangle - \langle A, Y \rangle \langle X, A \rangle = \langle X, Y \rangle = \cos \alpha. \end{aligned}$$

□

**Bemerkung IV.2.11.** Sei  $ABC$  ein sphärisches Dreieck, d.h. insbesondere dass  $A, B$  und  $C$  linear unabhängig sind, also  $\det(A, B, C) \neq 0$ . Es gilt  $\det(A \times B, B \times C, C \times A) = \det(A, B, C)^2$  \*. Also sind  $B \times C, C \times A$  und  $A \times B$  linear unabhängig. Wir setzen  $\epsilon = \text{sign}(\det(A, B, C))$ ,  $A' = \epsilon \frac{B \times C}{\|B \times C\|}$ ,  $B' = \epsilon \frac{C \times A}{\|C \times A\|}$  und  $C' = \epsilon \frac{A \times B}{\|A \times B\|}$ . Somit bilden auch  $A'B'C'$  ein sphärisches Dreieck – das *Polardreieck* zu  $ABC$ , siehe Abbildung IV.1.

Zusammenhang  $ABC$  zu  $A'B'C'$ ?

$$a' = \sphericalangle(B', C') = \sphericalangle(C \times A, A \times B) = \sphericalangle(-A \times C, A \times B) = \pi - \sphericalangle(A \times C, A \times B) = \pi - \alpha$$

und analog  $b' = \pi - \beta$  und  $c' = \pi - \gamma$ .

**Satz IV.2.12.** Sei  $ABC$  ein sphärisches Dreieck, sei  $A'B'C'$  das Polardreieck zu  $ABC$ . Dann ist  $ABC$  das Polardreieck zu  $A'B'C'$ .

*Beweis.* Sei  $A''B''C''$  das Polardreieck zu  $A'B'C'$ . Wir wollen zeigen, dass  $C'' = C$  ist: Es ist  $C'' = \epsilon' \frac{A' \times B'}{\|A' \times B'\|}$ . Damit ist  $C''$  senkrecht auf  $A'$  und  $B'$ . Weiterhin steht aber auch  $C$  senkrecht auf  $A'$  und  $B'$  (nach Definition von  $A'$  und  $B'$ ). Also gilt  $C = \delta C''$  mit  $\delta = \pm 1$ .

$$\begin{aligned} \sphericalangle(C, C'') &= \sphericalangle(C, \epsilon' A' \times B') = \sphericalangle(C, \epsilon' \underbrace{\epsilon^2}_{=1} \underbrace{(B \times C) \times (C \times A)}_{=C \det(B, C, A) - A \det(B, C, C) = C \det(B, C, A)}) \\ &= \sphericalangle(C, \epsilon' \det(B, C, A) C) = \sphericalangle(C, \epsilon' \epsilon C) \end{aligned}$$

Mit  $\epsilon' = \text{sign} \det(A', B', C') = \epsilon^3 \text{sign} \det(B \times C, C \times A, A \times B) = \epsilon^3 \text{sign} \det(A, B, C)^2 = \epsilon^3$  erhalten wir

$$\sphericalangle(C, C'') = \sphericalangle(C, C) = 0$$

und damit  $\delta = 1$ .

□

**Satz IV.2.13.** (i) *Seitenkosinussatz:*  $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$ .

(ii) *Winkelkosinussatz:*  $\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c$ .

\*

$$\begin{aligned} \det(A \times B, B \times C, C \times A) &= \langle (A \times B) \times (B \times C), C \times A \rangle = \langle \langle A, B \times C \rangle B - \underbrace{\langle B, B \times C \rangle A}_{=0}, C \times A \rangle \\ &= \langle (\det(A, B, C) B, C \times A) = \det(A, B, C) \det(B, C, A) = \det(A, B, C)^2 > 0 \end{aligned}$$

#### IV. Sphärische Geometrie

(iii) Sinussatz:  $\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$ .

(iv) Winkelsumme:  $\alpha + \beta + \gamma > \pi$ .

*Beweis.* (Skizze) (i) Man hat  $\langle C \times A, C \times B \rangle = |C|^2 \langle A, B \rangle - \langle C, B \rangle \langle C, A \rangle = \cos c - \cos b \cos a$  und nutzt

$$\begin{aligned} \langle C \times A, C \times B \rangle &= |C \times A| \cdot |C \times B| \cdot \cos \sphericalangle(C \times A, C \times B) \\ &= \sin \sphericalangle(A, C) \sin \sphericalangle(B, C) \cos \sphericalangle(C \times A, C \times B) \\ &= \sin b \sin a \cos \gamma. \end{aligned}$$

(ii) folgt aus (i) mittels des Polardreiecks.

(iii) Sinussatz: Man überlegt sich  $|\det(A, B, C)| = \sin b \sin c \sin \alpha$  gilt, dann folgt der Rest durch permutieren.

(iv) Wir starten mit

$$\begin{aligned} \pi - \alpha &= \sphericalangle(A \times B, -A \times C) = \sphericalangle\left(\frac{A \times B}{\|A \times B\|}, \frac{C \times A}{\|C \times A\|}\right) \\ &= d_S\left(\underbrace{\frac{A \times B}{\|A \times B\|}}_{\in S^2}, \frac{C \times A}{\|C \times A\|}\right) \end{aligned}$$

und nutzen die Dreiecksungleichung. □

**Bemerkung IV.2.14.** Kongruenzsätze: Es gelten (SSS), (SWS), (SSwg), (SWW), (WSW) und (WWW).

**Satz IV.2.15.** Eine Abbildung  $\phi: S^2 \rightarrow S^2$  ist genau dann eine Isometrie, wenn es ein  $A \in O(3)$  mit  $\phi = A|_{S^2}$  gibt.

*Beweis.* Beweis analog zum hyperbolischen Fall, vgl. Satz ?? □

	euklidisch	hyperbolisch			sphärisch
Axiomatik					
Inzidenz	(I1)–(I3)	(I1)–(I3)			durch Antipoden mehr als eine Gerade $\rightarrow$ (I1')
Anordnung	(A1)–(A5)	(A1)–(A5)			zyklische Anordnung $\rightarrow$ (A4')
Kongruenz	(K1)–(K6)	(K1)–(K6)			(K1)–(K6)
Parallelen	(P)	(H)			–
Vollständigkeit	(V1)–(V2)	(V1)–(V2)			(V2)
Modelle	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{D}$	$H^2$	$S^2$
Geraden	eukl. Geraden	<ul style="list-style-type: none"> <li>• senkrechte Geraden</li> <li>• Halbkreise</li> </ul> (Radius auf $x$ -Achse)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Geraden durch 0</li> <li>• Kreise</li> </ul> (senkrecht zu $\partial\mathbb{D}$ )	Großhyperbel $= H^2 \cap (\text{Ebene} \subset \mathbb{R}^3 \text{ durch } 0)$	Großkreis $= S^2 \cap (\text{Ebene} \subset \mathbb{R}^3 \text{ durch } 0)$
Abstände	$d(p, q) = \ p - q\ $	$d_R(p, q) =  \ln  (p, q, u, v)  $ für $R = \mathbb{H}, \mathbb{D}$ $u, v$ die Randpunkte der Geraden durch $p, q$		$d_H(p, q) = \text{arcosh} \langle p, q \rangle_M $	$d_S(p, q) = \arccos\langle p, q \rangle$
Trigonometrie	Kosinussatz	Seitenkosinussatz			Seitenkosinussatz
	–	Winkelkosinussatz			Winkelkosinussatz
	Sinussatz	Sinussatz			Sinussatz
Winkelsumme im Dreieck	$\pi$	$< \pi$			$> \pi$
Kongruenzsätze	–	(SSS), (SWS), (SSWg), (SWW), (WSW)			(WWW)
	–	(WWW)			(WWW)



# V. Projektive Geometrie\*

## V.1. Projektionen

## V.2. Projektive Räume

**Definition V.2.1.** Sei  $V$  ein  $(n + 1)$ -dimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Die Menge  $P(V)$  der eindimensionalen Untervektorräume von  $V$  heißt der zu  $V$  gehörige *projektive Raum*. Die Elemente von  $P(V)$  heißen *Punkte* von  $P(V)$  und  $\dim P(V) := \dim V - 1$  heißt (*projektive*) *Dimension* von  $P(V)$ . Eine Teilmenge  $M$  eines projektiven Raumes  $P(V)$  heißt *projektiver Unterraum* von  $P(V)$  falls es einen Untervektorraum  $U$  von  $V$  mit  $P(U) = M$  gibt. Wir erlauben auch, dass  $V = \{0\}$  der Nullvektorraum ist. Dann ist  $P(\{0\}) = \emptyset$  und  $\dim P(\{0\}) = -1$ .

Vorl. 12

**Beispiel V.2.2.** (i) Sei  $V = \mathbb{R}^{n+1}$ . Dann schreibt man  $\mathbb{RP}^n := P(\mathbb{R}^{n+1})$  und  $\dim \mathbb{RP}^n = n$

a)  $n = 0: \mathbb{RP}^0 = \{*\}$ ,

b)  $n = 1: \mathbb{RP}^1 = S^1$ ,

c)  $\mathbb{RP}^n = S^n / \sim$  mit  $x \sim y$ , wenn  $x, y \in S^n$  antipodale Punkte in  $S^n$  sind.

(ii) Sei  $V = \mathbb{K}$  über  $\mathbb{K}$ . Dann ist  $P(V) = \{*\}$

(iii)  $P(\mathbb{F}_2^3)$  - Fano-Ebene<sup>†</sup>, siehe Abbildung V.1.

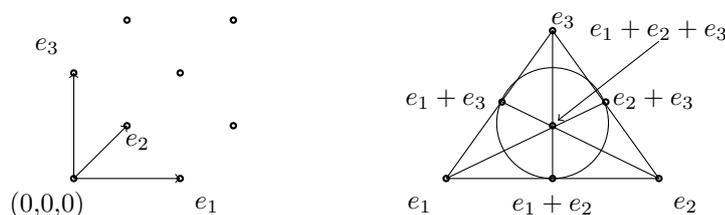


Abb. V.1.: Links sieht man den  $\mathbb{F}_2^3$ . Jeder der acht Punkte kann als Summe von den Basisvektoren  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)$ ,  $e_3 = (0, 0, 1)$  dargestellt werden. Da eine Ursprungsgerade durch einen Punkt, der nicht der Nullpunkt ist, beschrieben wird, hat  $P(\mathbb{F}_2^3)$  7 Punkte. Liegen drei Ursprungsvektoren im Vektorraum (links) in einer gemeinsamen Ebene durch den Ursprung, z.B.  $e_1$ ,  $e_2$  und  $e_1 + e_2$ , dann liegen die zugehörigen projektiven Punkte (rechts) auf einer gemeinsamen projektiven Geraden. Beachten Sie, dass auch  $e_1 + e_2$ ,  $e_2 + e_3$ ,  $e_1 + e_3$  auf einer Ursprungsebene liegen:  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$  (denn  $1 + 1 = 0$ ) und damit auch eine projektive Gerade definieren.

**Lemma V.2.3.** (i) Seien  $Q, R \in P(V)$ ,  $Q \neq R$ . Dann gibt es eine eindeutige bestimmte projektive Gerade in  $P(V)$  mit  $Q, R \in P(V)$ , genannt  $g_{QR}$ .

(ii) Zwei verschiedene projektive Geraden in der projektiven Ebene  $P(\mathbb{R}^3)$  haben immer genau einen gemeinsamen Punkt.

(iii) Seien  $A, B, C, D$  vier paarweise verschiedene Punkte in  $P(V)$  derart, dass  $g_{AB}$  und  $g_{CD}$  sich schneiden. Dann schneiden sich auch die Geraden  $g_{AC}$  und  $g_{BD}$ .

\*Projektive Geometrie kann man analog zur affinen Geometrie auch axiomatisch beschreiben, vgl. Definition I.2.3. Wir werden uns hier nur mit solchen projektiven Geometrien beschäftigen, die in engem Zusammenhang zu affinen Geometrien  $\mathbb{K}^n$ , mit  $\mathbb{K}$  Körper, stehen.

† $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$  ist der Körper mit zwei Elementen, d.h. insbesondere  $1 + 1 = 0$ .

*Beweis.* (i) Es ist  $\{Q\} = P(U_Q)$ ,  $\{R\} = P(U_R)$  für 1-dimensionale Untervektorräume  $U_Q, U_R$  von  $V$ . Da  $Q \neq R$ , ist  $U_Q \neq U_R$ . Sei  $W$  der von  $U_Q$  und  $U_R$  aufgespannte zweidimensionale Untervektorraum von  $V$ . Dann ist  $P(W)$  eine projektive Gerade durch  $Q$  und  $R$ . Sei anders herum eine projektive Gerade durch  $Q$  und  $R$  gegeben, dann gibt es dazu einen zweidimensionalen Untervektorraum, der  $U_Q$  und  $U_R$  enthält. Damit ist dieser Raum aber eindeutig bestimmt und gleich  $W$ .

(ii) Seien  $g = P(W_g)$ ,  $h = P(W_h)$  zwei verschiedene projektive Geraden in  $P(\mathbb{R}^3)$ , d.h.  $W_g$  und  $W_h$  sind zweidimensionale Untervektorräume von  $\mathbb{R}^3$  und verschieden. Dann ist  $W_g \cap W_h = U$  ein eindimensionaler Untervektorraum von  $\mathbb{R}^3$ . Damit ist  $g \cap h = P(U) = \{*\}$ .

(iii) hier ohne Beweis (Vorgehen wie bei (i) und (ii)) □

**Definition V.2.4.** Seien  $P_1, \dots, P_k$  Punkte in  $P(V)$ . Sei  $P_i = P(U_i)$ . Der von  $P_1, \dots, P_k$  aufgespannte projektive Raum ist  $P(\text{span}(U_1, \dots, U_k))$ . Man sagt auch,  $P_1, \dots, P_k$  erzeugen  $P(\text{span}(U_1, \dots, U_k))$ . Man nennt  $P_1, \dots, P_k$  *linear unabhängig* falls  $\dim \text{span}(U_1, \dots, U_k) = k$  ist. Man nennt  $P_1, \dots, P_k$  eine *Basis* von  $P(V)$ , falls die Punkte linear unabhängig sind und  $P(V)$  erzeugen. Seien  $L_1, \dots, L_k$  projektive Unterräume von  $P(V)$ . Sei  $L_i = P(Z_i)$ . Dann heißt  $L_1 + \dots + L_k := P(\text{span}(Z_1, \dots, Z_k))$  der von den  $L_i$  aufgespannte projektive Unterraum von  $P(V)$ .

**Beispiel V.2.5.** Seien  $A \neq B \in P(V)$ . Dann ist  $A + B = g_{AB}$ .

**Satz V.2.6.** (*Existenz und Vervollständigung einer Basis*) Sei  $P(V)$  ein projektiver Raum der Dimension  $n$  und  $A_1, \dots, A_k \in P(V)$  linear unabhängig. Dann gibt es  $A_{k+1}, \dots, A_{n+1}$  derart, dass  $A_1, \dots, A_{n+1}$  eine Basis von  $P(V)$  bilden.

*Beweis.* Sei  $A_i = P(\mathbb{K}v_i)$  für  $i = 1, \dots, k$ . Dann ist  $\dim \text{span}\{v_1, \dots, v_k\} = k$  und damit sind die  $v_i$  linear unabhängig. Wir vervollständigen diese  $v_i$  zu einer Basis von  $V$ :  $v_1, \dots, v_{n+1}$  und setzen  $A_i = P(\mathbb{K}v_i)$  für  $i > k$ . Dann bilden nach Konstruktion die  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, n + 1$  eine Basis von  $P(V)$ . □

**Satz V.2.7.** (*Dimensionssatz*) Seien  $L, K$  projektive Unterräume von  $P(V)$ . Dann ist

$$\dim L + K = \dim L + \dim K - \dim L \cap K.$$

**Beispiel V.2.8.** 1. Klar für  $L = K$ .

2. Zwei projektive Geraden  $g \neq h$  im  $\mathbb{RP}^2 = P(\mathbb{R}^3)$ : Sei  $g = P(W_g)$  und  $h = P(W_h)$ . Da  $g \neq h$  ist, erzeugen die zweidimensionalen  $W_g$  und  $W_h$  den  $\mathbb{R}^3$ , d.h.  $g + h = P(\mathbb{R}^3)$ . Weiterhin muss  $U := W_g \cap W_h$  eindimensional sein und damit  $g \cap h = P(U)$  ein Punkt sein. Also ist  $\dim g + h = 2 = \dim g + \dim h - \dim g \cap h$ .

*Beweis des Dimensionssatzes.* Sei erst einmal  $L \cap K \neq \emptyset$ . Wir wählen eine Basis  $P_1, \dots, P_s$  von  $L \cap K$  und vervollständigen diese jeweils zu Basen  $P_1, \dots, P_s, Q_1, \dots, Q_r$  von  $L$  und  $P_1, \dots, P_s, T_1, \dots, T_t$  von  $K$ . Es reicht zu zeigen, dass  $L + K$  von  $P_1, \dots, P_s, Q_1, \dots, Q_r, T_1, \dots, T_t$  erzeugt wird. Denn dann ist  $\dim L = r + s - 1$ ,  $\dim K = r + t - 1$ ,  $\dim L + K = r + s + t$  und die Dimensionsformel ist erfüllt. □

**Definition V.2.9.** Sei  $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$  eine Basis vom Vektorraum  $V$ . Dann hat jeder Vektor  $v \in V$  eine eindeutige Zerlegung  $v = a_0v_0 + \dots + a_nv_n$  und jedem Vektor werden die eindeutigen Koordinaten  $(a_0, \dots, a_n)$  zugeordnet. Die Ursprungsgerade  $U$  in  $V$  mit Richtung  $v$  hat die Darstellung  $\lambda \mapsto (\lambda a_0, \lambda a_1, \dots, \lambda a_n)$ . Wir sagen:  $P(U)$  hat die *homogenen Koordinaten*  $[a_0 : \dots : a_n]$ , wobei  $[a_0 : \dots : a_n]$  die Äquivalenzklasse von  $n + 1$ -Tupeln bzgl. der Äquivalenzrelation

$$[(a_0, \dots, a_n) \sim (b_0, \dots, b_n) \text{ genau dann wenn es ein } \lambda \in \mathbb{K}^* \text{ mit } a_i = \lambda b_i \text{ für alle } i \text{ gibt.}]$$

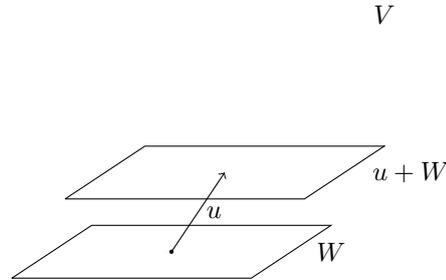
ist. ( $\mathbb{K}^* := \mathbb{K} \setminus \{0\}$ )

**Bemerkung V.2.10.** O.B.d.A. kann man die Einträge in den homogenen Koordinaten so wählen, dass der erste (oder letzte) Eintrag, der nicht Null ist, auf eins normalisiert ist.

### V.3. Zusammenhang projektive und affine Geometrie (über Vektorräumen)

**Definition V.3.1.** Die Abbildung  $p: V \setminus \{0\} \rightarrow P(V)$ ,  $v \mapsto [v]$ , wobei  $\{[v]\} = P(\mathbb{K}v)$  ist, heißt *kanonische Projektion* von  $P(V)$ .

Sei  $P(V)$  ein projektiver Raum mit  $\dim V = n + 1$ . Sei  $W$  ein  $n$ -dimensionaler Untervektorraum von  $V$ , dann ist  $P(W)$  eine projektive Hyperebene in  $P(V)$ . Sei  $u \in V \setminus W$  fest gewählt. Dann schneidet die affine Hyperebene  $u + W$  jedes Element in  $V \setminus W$  genau einmal, d.h.  $P(V)$  kann als Menge mit  $P(W) \sqcup W$  identifiziert werden.



Sei nun  $A := P(V) \setminus P(W) := \{[v] \mid v \in V \setminus W\}$ . Dann ist nach obigen Überlegungen  $A$  als Menge gleich  $W$ .

Wir wollen nun  $A$  als affinen Raum deuten: Dazu wählen wir wie oben ein festes  $u \in V \setminus W$ . Dann ist  $V = \mathbb{K}u \oplus W$ . Insbesondere lässt sich jedes  $v \in V$  eindeutig als  $v = ku + w$  mit  $k \in \mathbb{K}$  und  $w \in W$  schreiben. Sei nun  $[v] \in A$ , dann ist  $v \notin W$  und damit  $k \neq 0$ . Wir setzen  $h([v]) := k^{-1}w$ . Dann ist  $h: A \rightarrow W$  wohldefiniert: Sei  $[v] = [v']$ , d.h.  $v = \lambda v'$  für ein  $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ . Dann ist  $v' = \lambda ku + \lambda w$  und  $h([v']) = (\lambda k)^{-1} \lambda w = k^{-1}w$ . Weiterhin ist  $h$  injektiv, denn aus  $h([v]) = h([v']) = w$  folgt, dass es  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}^*$  mit  $u + w = \lambda v = \mu v'$  gibt, also  $[v] = [v']$ . Wegen  $h([u + w]) = w$  ist  $h$  außerdem surjektiv. Also ist  $A$  zu  $W \cong \mathbb{K}^n$  bijektiv und kann damit als affiner Raum betrachtet werden.



# VI. Polygone und Polyeder

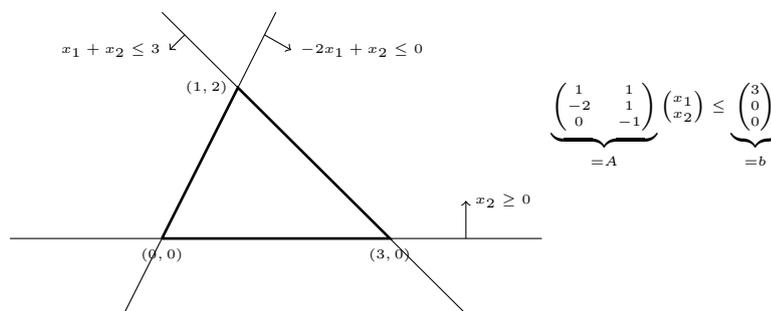
## VI.1. Konvexe Polytope

**Definition VI.1.1.** Ein *konvexes Polytop*  $P$  im  $\mathbb{R}^m$  ist gegeben den Schnitt endlich vieler Halbräume, d.h.

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$$

für  $A$  eine reelle  $m \times n$ -Matrix und  $b \in \mathbb{R}^m$ . Dabei sollen  $A$  und  $b$  derart gewählt sein, dass  $P$  beschränkt ist. Ein konvexes Polytop im  $\mathbb{R}^2$  nennen wir *konvexes Polygon*, eines im  $\mathbb{R}^3$  *konvexes Polytop*.

**Beispiel VI.1.2.** (i) Dreieck im  $\mathbb{R}^2$ :



(ii)  $P$  bestimmt  $A$  und  $b$  nicht eindeutig (insbesondere  $m$  nicht eindeutig), z.B.:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=b}$$

ergibt noch immer das obige Dreieck. Wir nehmen in Zukunft immer an, dass  $m$  minimal sind – dann sind  $A$  und  $b$  bis auf Skalierung eindeutig bestimmt.

**Bemerkung VI.1.3.** (i)  $P$  ist dann wirklich konvex, im Sinne dass für  $x, y \in P$  auch  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in P$  ist für  $\lambda \in [0, 1]$ .

(ii) Der Rand des Polygons ist die Menge  $\partial P = \{x \in P \mid x \text{ liegt auf dem Rand einer der definierenden Halbräume}\}$ .

(iii)  $P \subset \mathbb{R}^2$  ein konvexes Polygon ist durch seine Eckpunkte  $p_1 \dots p_n$  bestimmt. Dabei seien die Eckpunkte so numeriert, dass  $\overline{p_i p_{i+1}}$  jeweils im Rand des Polygons liegt ( $i = 1, \dots, n; p_{n+1} = p_1$ ) – also eine sogenannte *Kante* ist.

(iv)  $P \subset \mathbb{R}^3$  ein konvexes Polyeder: Der Rand besteht aus endlich vielen konvexen Polygonen, von denen zwei sich in höchstens in einer gemeinsamen Kante übereinstimmen.

## VI.2. Konvexe Polygone

**Lemma VI.2.1.** Ein konvexes Polygon mit  $n$  Ecken hat Innenwinkelsumme  $\pi(n - 2)$ .

## VI. Polygone und Polyeder

*Beweis.* Für ein Dreieck ist die Behauptung wahr. Wir nehmen nun an, die Aussage stimmt für ein Polygon mit  $n$  Ecken. Wir wollen zeigen, dass es dann auch für eines mit  $n + 1$  Ecken stimmt. Die Ecken seien zyklisch numeriert  $p_1, \dots, p_{n+1}$  aus. Da das Polygon konvex ist, liegt die Strecke  $\overline{p_1 p_n}$  im Inneren des Polygons. Die Strecke  $p_1 p_n$  zerlegt das Polygon dann in zwei konvexe Polygone – das Dreieck  $p_1 p_n p_{n+1}$  und das  $n$ -Eck  $p_1 \dots p_n$ . Wegen Winkeladdition ist die Innenwinkelsumme des  $(n + 1)$ -Ecks gleich der Summe der beiden Innenwinkelsummen der kleineren Polygone – also:  $\pi + \pi(n - 2) = \pi(n + 1 - 2)$ .  $\square$

**Definition VI.2.2.** Ein  $n$ -Eck  $p_1 \dots p_n$  heißt regulär, falls alle Seiten  $\overline{p_i p_{i+1}}$  ( $1 \leq i \leq n, p_{n+1} := p_1$ ) die gleiche Länge haben und alle Innenwinkel  $\sphericalangle p_{i-1} p_i p_{i+1}$  ( $1 \leq i \leq n, p_{n+1} := p_1, p_{-1} := p_n$ ) gleich groß sind.

**Lemma VI.2.3.** Für  $n \geq 3$  und gegebene Länge  $\ell$  gibt es (bis auf euklidische Bewegungen) genau ein reguläres  $n$ -Eck  $p_1 \dots p_n$  mit  $|\overline{p_1 p_2}| = \ell$ . Die Eckpunkte  $p_i$  liegen dann alle auf einem gemeinsamen Kreis.

*Beweis.* Existenz: Wir identifizieren  $\mathbb{R}^2$  mit  $\mathbb{C}$  und setzen  $p_i = k e^{i2\pi \frac{i}{n}}$ . Dann ist  $|\overline{p_i p_{i+1}}| = k |e^{i2\pi \frac{i+1}{n}} - e^{i2\pi \frac{i}{n}}| = k |1 - e^{i2\pi \frac{1}{n}}|$ . D.h. dass alle Seiten gleich lang sind. Setzen wir  $k = \ell |1 - e^{i2\pi \frac{1}{n}}|^{-1}$  haben wir ein regelmäßiges  $n$ -Eck mit  $|\overline{p_1 p_2}| = \ell$  gefunden. Nach Konstruktion liegen dessen Eckpunkte alle auf einem Kreis mit Radius  $k$ . Eindeutigkeit folgt aus (SWS).  $\square$

## VI.3. Konvexe Polyeder

**Satz VI.3.1. Eulersche Polyederformel** Sei  $P$  ein konvexes Polyeder mit  $f$  Flächen,  $k$  Kanten und  $e$  Ecken. Dann gilt  $e + f - k = 2$ .

*Beweis.* Sei  $x$  ein Punkt im Inneren des Polyeders und  $S$  eine Kugel um  $x$  mit Radius groß genug, dass  $P$  vollständig im Inneren von  $S$  liegt. Wir projizieren die Kanten und Ecken des Polyeders auf die Kugel, vgl. Abbildung VI.1. Da  $P$  konvex ist schneiden sich die Bilder zwei Kanten höchstens im Bild einer Ecke und das auch nur dann, wenn die beiden Kanten von dieser Ecke ausgingen. Wir wählen nun einen Punkt  $N$  auf  $S$ , der nicht im Bild der Kanten von  $P$  liegt und führen eine stereographische Projektion durch. Das gibt uns einen planaren zusammenhängenden Graph in der Ebene. Planar bedeutet, dass sich keine zwei Kanten des Graphen schneiden außer ggf. in einer gemeinsamen Ecke. Der entstehende Graph hat  $e$  Ecken und  $k$  Kanten. Die Kanten begrenzen  $f - 1$  Flächen, da die Fläche von  $P$ , die das Urbild von  $N$  enthält, auf die das 'Äußere' des Graphen abgebildet wird - vgl. Abbildung VI.1. Es reicht also die Eulersche Polyederformel für beliebige planare zusammenhängende Graphen zu zeigen. Das geschieht über Induktion über die Ecken- und Kantenzahl: Induktionsanfang: Der planare Graph bestehe nur aus einer Ecke und keiner Kante. Dann ist  $e = 1, k = 0$  und  $f = 1$  (die 'äußere' Fläche) und  $e + f - k = 2$ .

Die Eulersche Polyederformel gelte schon für einen planaren zusammenhängenden Graphen mit  $e'$  Ecken,  $k'$  Kanten und  $f'$  Flächen.

- Wir wollen eine Ecke hinzunehmen: Damit der Graph zusammenhängend bleibt, müssen wir dann automatisch eine von dort ausgehende Kante hinzunehmen:  $e = e' + 1, k = k' + 1$ . Es entsteht keine neue Fläche:  $f = f'$  und es ist  $e + f - k = e' + f' - k' = 2$ .
- Wir nehmen eine Kante zwischen zwei schon existierenden Eckpunkten hinzu. Dann ist  $e = e', k = k' + 1$ . Die neue Kante führt durch eine Fläche des alten Graphen und zerteilt diese in zwei neue Flächen, also ist  $f = f' + 1$ . Wir haben  $e + f - k = e' + f' - k' = 2$ .

$\square$

**Definition VI.3.2.** Ein konvexes Polyeder, dessen Seitenflächen kongruente reguläre Polygone sind und für welches sich in jeder Ecke die gleiche Anzahl von Polygonen treffen, heißt *platonischer Körper*.

**Lemma VI.3.3.** Sei  $P$  ein konvexes Polyeder. Sei  $q$  eine Ecke von  $P$ , in der sich die Polygone  $F_1, \dots, F_m$  treffen. Sei  $\alpha_i(q)$  der Innenwinkel des Polygons  $F_i$  in der Ecke  $q$ . Dann gilt  $\sum_{i=1}^m \alpha_i(q) < 2\pi$ .

*Beweis.* (Skizze) Da  $P$  konvex ist, gibt es eine Ebene  $E$ , die mit  $P$  nur den Punkt  $q$  gemeinsam hat. Wir projizieren, die von  $q$  ausgehenden Kanten orthogonal auf  $E$ . Dann kann man sich überlegen, dass der Winkel zwischen den projizierten Kanten immer kleiner als der Winkel zwischen ihren Originalen ist (hier benötigt man die Konvexität). Da die Summe der projizierten Winkel um  $q$  gleich  $2\pi$  ist, folgt die Behauptung.  $\square$

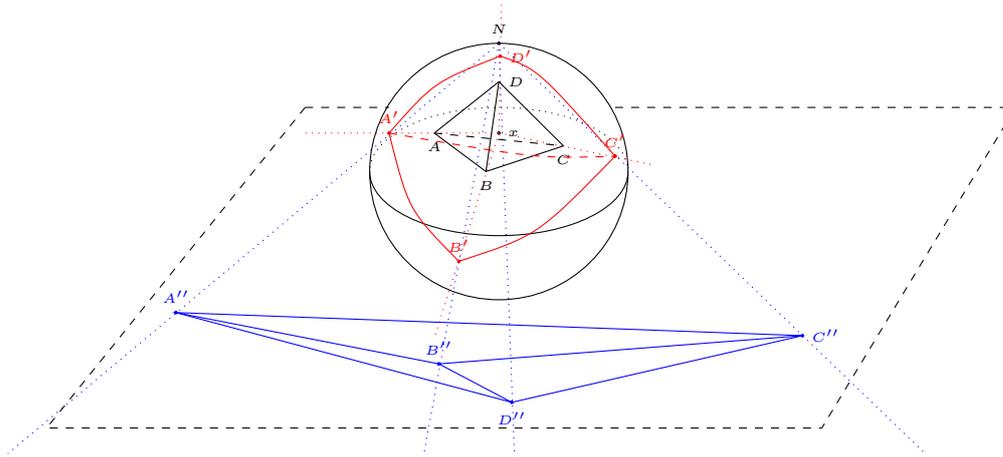


Abb. VI.1.: Zum Beweis der Eulerschen Polyederformel: Rot ist die Projektion der Kanten des Polyeders auf die Kugel. Blau ist die stereographische Projektion der roten Kurven auf die Ebene.

Platonischer Körper	Seitenfläche	$e$	$f$	$k$
Tetraeder	gleichschenkliges Dreieck	4	4	6
Würfel (Hexaeder)	Quadrat	8	6	12
Oktaeder	gleichschenkliges Dreieck	6	8	12
Dodekaeder	reguläres Fünfeck	20	12	30
Ikosaeder	gleichschenkliges Dreieck	12	20	30

**Satz VI.3.4.** Sei  $P$  ein platonischer Körper. Dann ist  $P$  genau eine der folgenden geometrischen Figuren

*Beweis.*  $P$  bestehe aus  $f$  regulären  $j$ -Ecken und in jeder Ecke treffen sich  $r$  dieser Polygone. Es ist  $r \geq 3$ ,  $j \geq 3$ ,  $f \geq 3$ . Da es sich um reguläre Seitenflächen handelt, sind alle Innenwinkel gleich  $\frac{j-2}{j}\pi$ . Nach Lemma VI.3.3, dass  $r\frac{j-2}{j}\pi < 2\pi$ , also  $r < \frac{2j}{j-2}$ . Außerdem gilt:  $fj = 2k$  (da jede Fläche  $j$  Kanten besitzt und jede Kante zu zwei Flächen gehört) und  $fj = re$  (da jede Fläche  $j$  Ecken besitzt und jede Ecke zu  $r$  Flächen gehört). Mit der Eulerschen Polyederformel folgt dann  $2 = e + f - k = \frac{fj}{r} + f - \frac{fj}{2}$ , also  $f = \frac{4r}{j(2-r)+2r}$ .  $\square$

$j$	3			4	5	$\geq 6$
$\frac{2j}{j-2}$	6			4	$\frac{10}{3}$	$\leq 3$
$r \quad (r < \frac{2j}{j-2})$	3	4	5	3	3	-
$f = \frac{4r}{j(2-r)+2r}$	4	8	20	6	12	
$e = \frac{fj}{r}$	4	6	12	8	20	
$k = e + f - 2$	6	12	32	12	30	