Universität Freiburg
Dr. Ksenia Fedosova
Andreas Demleitner

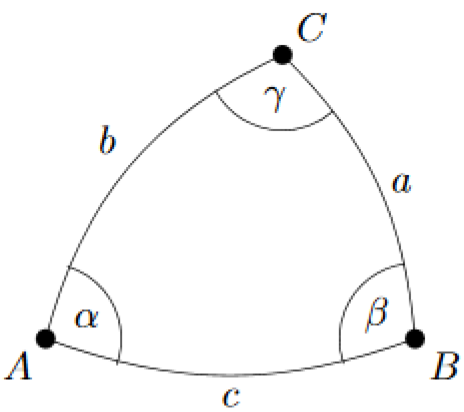
SS 2019
15.07.2019

Übungsaufgaben zur Vorlesung „Elementargeometrie“

Lösungsskizze zu Übungsblatt 11

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Sei ΔABC ein sphärisches Dreieck wie in der untenstehenden Skizze. Zeigen Sie, dass gilt

$$\alpha + \beta < \pi + \gamma.$$



Lösung: Wir bezeichnen mit $\Delta A'B'C'$ das Polardreieck zu ΔABC, und wie üblich nutzen wir die Bezeichnungen

$$a' := \sphericalangle(B, C), \quad b' := \sphericalangle(A, C), \quad c' := \sphericalangle(A, B).$$

Nach Vorlesung gilt $a' = \pi - \alpha$, $b' = \pi - \beta$, $c' = \pi - \gamma$. Die zu zeigende Ungleichung $\alpha + \beta < \pi + \gamma$ ist also äquivalent zu

$$2\pi - (a' + b') < 2\pi - c' \iff a' + b' > c'.$$

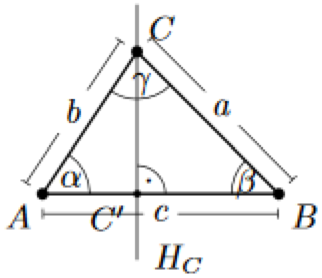
Nach der Dreiecksungleichung gilt $a' + b' \geq c'$. Da $\Delta A'B'C'$ ein sphärisches Dreieck ist, sind A', B', C' in $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig und somit gilt sogar $a' + b' > c'$, was zu zeigen war. $\square$

Universität Freiburg
Dr. Ksenia Fedosova
Andreas Demleitner

Aufgabe 2:

(a) Sei ΔABC ein Dreieck in der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$. Wir bezeichnen mit C' den Schnittpunkt der Geraden H_C, die C enthält und auf der Geraden $g(A,B)$ durch A, B senkrecht steht. Zeigen Sie: Sind die Bezeichnungen wie im Bild unten, so gilt

$$h_C := \|C - C'\| = b \cdot \sin(\alpha) = a \cdot \sin(\beta).$$



(b) Formulieren und beweisen Sie eine ähnliche Aussage in der hyperbolischen oder sphärischen Geometrie.

Lösung: (a) Nach dem Sinussatz gilt

$$\begin{aligned}\frac{\|C - C'\|}{\sin(\alpha)} &= \frac{b}{\sin(\pi/2)} = b, \text{ und} \\ \frac{\|C - C'\|}{\sin(\beta)} &= \frac{b}{\sin(\pi/2)} = a.\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

(b) *Sei ΔABC ein hyperbolisches Dreieck mit den üblichen Bezeichnungen der Seitenlängen und Winkelbeträge. Sei H_C die Gerade, die C enthält und auf der Geraden $g(A,B)$ durch A, B senkrecht steht. Sei C' der Schnittpunkt von H_C und $g(A,B)$. Dann gilt*

$$\sinh(\|C - C'\|) = \sinh(b) \cdot \sin(\alpha) = \sinh(a) \cdot \sin(\beta).$$

(Folgt analog zu oben aus dem hyperbolischen Sinussatz.)

Universität Freiburg
Dr. Ksenia Fedosova
Andreas Demleitner

Aufgabe 3: (5 Punkte)
Sei $\mathbb{H}$ die hyperbolische Halbebene und g, h zwei Geraden in $\mathbb{H}$, die parallel sind. Weiterhin seien zwei verschiedene Punkte P, P' auf g gegeben, sodass der Abstand von P zu h gleich dem Abstand von P' zu h ist (vgl. Übungsblatt 8, Aufgabe 2). Zeigen Sie, dass eine Gerade $\ell \subset \mathbb{H}$ existiert, die ein Lot auf g und h ist (d.h. senkrecht auf g und h steht).

Lösung: Nach Voraussetzung existieren zwei verschiedene Punkte $Q, Q' \in h$, sodass $d_{\mathbb{H}}(P,Q) = d_{\mathbb{H}}(P',Q')$.
Sei ℓ die Mittelsenkrechte von $\overline{QQ'}$ und bezeichne mit Q'' den Schnittpunkt von ℓ mit h. Die Gerade ℓ und die Gerade $g(P,Q)$ durch P, Q haben eine gemeinsame Senkrechte (nämlich h). Da ℓ und $g(P,Q)$ verschieden sind, folgt, dass ℓ und $g(P,Q)$ sich nicht schneiden (genauer: schnitten sie sich in einem Punkt R, so wäre $\Delta Q'QR$ ein hyperbolisches Dreieck mit zwei rechten Winkeln, was zum Widerspruch führt, da die Innenwinkelsumme in hyperbolischen Dreiecken echt kleiner als π ist). Analog zeigt man, dass ℓ und $g(P',Q')$ sich nicht schneiden.
Wir behaupten, dass ℓ und g einen gemeinsamen Schnittpunkt besitzen. Dies folgt daraus, dass ℓ zwischen $g(P,Q)$ und $g(P',Q')$ verläuft, also parallel zu diesen ist, und daraus, dass die beiden letzteren Geraden einen Schnittpunkt mit g haben.
Es werde nun mit P'' der Schnittpunkt von ℓ und g bezeichnet, welcher nach obiger Bemerkung notwendigerweise zwischen P und P' liegt. Nach Konstruktion gilt:

(i) $d_{\mathbb{H}}(Q,Q'') = d_{\mathbb{H}}(Q',Q'')$,

(ii) $|\sphericalangle PQQ''| = |\sphericalangle P'Q'Q''| = \frac{\pi}{2}$,

(iii) $|\sphericalangle P''Q''Q| = |\sphericalangle P''Q''Q'| = \frac{\pi}{2}$,

und da die Dreiecke $\Delta PQ''Q$, $\Delta P'Q''Q'$ ebenfalls nach Voraussetzung die gleich langen Seite n$\overline{PQ}$ bzw. $\overline{P'Q'}$ besitzen, folgt aus (i), (ii) mit dem Kongruenzsatz (SWS), dass diese beiden Dreiecke kongruent sind. Insbesondere gilt

(a) $d_{\mathbb{H}}(P,Q'') = d_{\mathbb{H}}(P',Q'')$,

(b) $|\sphericalangle PQ''Q| = |\sphericalangle P'Q''Q'|$.

Betrachte nun die Dreiecke $\Delta PP''Q''$, $\Delta P'P''Q''$. Laut (a) sind deren Seiten $\overline{PQ''}$, $\overline{P'Q''}$ gleich lang. Des Weiteren folgt aus (iii), (b) und Winkeladdition, dass

$$|\sphericalangle PQ''P''| = |\sphericalangle P'Q''P''|.$$

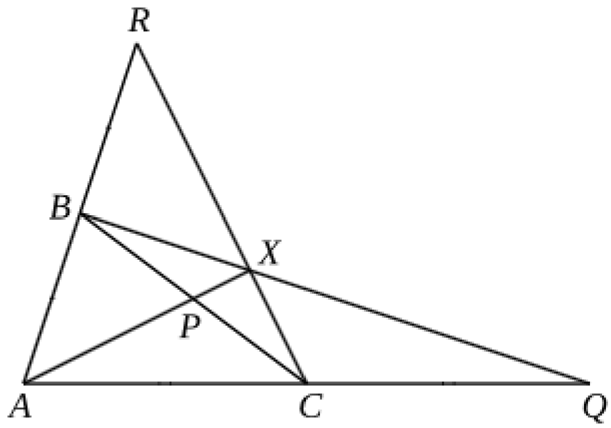
Außerdem haben die beiden Dreiecke die gemeinsame Seite $\overline{P''Q''}$. Nach Kongruenzsatz (SWS) sind also die Dreiecke $\Delta PP''Q''$, $\Delta P'P''Q''$ kongruent. Insbesondere gilt

$$|\sphericalangle Q''P''P| = |\sphericalangle Q''P''P'|.$$

Da P'' zwischen P und P' liegt, sind die letztgenannten Winkel also rechte Winkel. Das heißt, dass ℓ senkrecht auf g steht, was zu zeigen war. $\square$

Bemerkung: Nach minimaler Anpassung des Arguments mit der Innenwinkelsumme ist obiger Beweis (und auch die Aussage der Aufgabe) in der euklidischen Geometrie gültig.

Aufgabe 4: (3 Punkte)
Seien $\overline{AR}$ eine Strecke in der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ mit Mittelpunkt B und $\overline{AQ}$ eine Strecke mit Mittelpunkt C, die $\overline{AR}$ nur in A schneidet. Sei mit X der Schnittpunkt von $\overline{QB}$ und $\overline{RC}$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass P der Mittelpunkt von $\overline{BC}$ ist.
Hinweis: Nutzen Sie Übungsblatt 7, Aufgabe 1.



Lösung: Wir bemerken vorab, dass der Satz von Ceva (= Blatt 7, Aufgabe 1 (a)) unter allgemeineren Voraussetzungen gültig ist, als wir ihn formuliert haben:

Vorbemerkung: Auf Blatt 7, Aufgabe 1 (a) wurde vorausgesetzt, dass die Punkte p' bzw. q' bzw. r' im Inneren der Seiten $\overline{qr}$ bzw. $\overline{pr}$ bzw. $\overline{pq}$ liegen.
Im Beweis der Aussage wurde das jedoch nicht verwendet. Es wurde lediglich verwendet, dass p', q', r' verschieden von den Punkten p, q, r sind, und dass p', q, r bzw. q', p, r bzw. r', p, q kollinear sind.
Deswegen ist die Aussage des Satzes von Ceva ebenfalls gültig, falls p' bzw. q' bzw. r' auf den Verlängerungen der Seiten $\overline{qr}$ bzw. $\overline{pr}$ bzw. $\overline{pq}$ liegen und verschieden von p, q, r sind.

Aus der Vorbemerkung folgt nun, dass

$$\frac{|\overline{AR}|}{|\overline{RB}|} \cdot \frac{|\overline{QC}|}{|\overline{AQ}|} \cdot \frac{|\overline{BP}|}{|\overline{PC}|} = 1. \qquad (*)$$

Nach Voraussetzung gilt $|\overline{AR}| = 2|\overline{RB}|$, $|\overline{AQ}| = 2|\overline{QC}|$. Setzt man dies in Gleichung $(*)$ ein, so erhält man

$$\frac{|\overline{BP}|}{|\overline{PC}|} = 1.$$

Dies zeigt die Behauptung. $\square$