Universität Freiburg
Dr. Ksenia Fedosova
Andreas Demleitner

SS 2019
03.07.2019

Übungsaufgaben zur Vorlesung „Elementargeometrie“

Übungsblatt 10

Aufgabe 1: (3 Punkte)
Seien P, Q zwei verschiedene Punkte der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ und sei $\lambda > 1$. Zeigen Sie: Die Menge der Punkte $X \in \mathbb{R}^2$ mit $\|X - Q\| = \lambda \cdot \|X - P\|$ bildet einen Kreis. Was ist sein Mittelpunkt und Radius?

Aufgabe 2: (3+3+3+3 Punkte)
Finden Sie die Normalformen der folgenden Kegelschnitte. Die neuen Koordinaten sollen $(\tilde{x}, \tilde{y})$ heißen.

(a) $C\colon 7x^2 - 48xy - 7y^2 = 1$. Skizzieren Sie C und das neue Koordinatensystem $(\tilde{x}, \tilde{y})$ im alten Koordinatensystem (x, y).

(b) $C_a\colon 2xy - a\,(x^2 + y^2) = 1$. Bestimmen Sie den Typ von C_a in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ (d.h. für welche a ist C_a eine Ellipse, eine Hyperbel, ein Geradenpaar, usw).

(c) $-\,(5a^2 + 7)\,x^2 + 10a\sqrt{1 - a^2}xy + (5a^2 - 12)\,y^2 = 1$ für $1 - a^2 > 0$, $a \in \mathbb{R}$.

(d) $\cos(2a)\,(y^2 - x^2) - 2xy\sin(2a) = 1$ für $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3: (3+4 **Bonuspunkte***)
Gegeben seien der Doppelkegel $K\colon x^2 + y^2 = z^2$ und die Ebene $E\colon y = x + 1$ im $\mathbb{R}^3$.

(a) Ein naheliegender Ansatz für die Bestimmung der Normalform des Kegelschnittes $K \cap E$ wäre es, $y = x + 1$ (oder äquivalenterweise $x = y - 1$) in die Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ einzusetzen und dann die Normalform der so erhaltenen quadratischen Gleichung zu bestimmen. Erklären Sie, weswegen dies **kein** korrekter Ansatz ist, um die Normalform von $K \cap E$ zu bestimmen.

(a) Bestimmen Sie die Normalform des Kegelschnitts $K \cap E$.
Hinweis: Finden Sie zuerst eine euklidische Isometrie, die die gegebene Ebene in die Ebene $z = 0$ überführt.

Abgabedetails: Abgabe am Freitag, den **12. Juli 2019** vor der Vorlesung in den Briefkästen 3.21 und 3.22 im Untergeschoss des mathematischen Instituts.

- Briefkasten 3.21: Gruppen Mi 10-12, Do 10-12.
- Briefkasten 3.22: Gruppen Di 10-12, Di 12-14.