Universität Freiburg
Dr. Ksenia Fedosova
Andreas Demleitner

SS 2019
16.05.2019

Übungsaufgaben zur Vorlesung „Elementargeometrie“

Übungsblatt 4

Aufgabe 1: [Wiederholungsaufgabe zu Inzidenzstrukturen]
((2+(2+3*)+3+3*) + 3* Punkte), * = Bonuspunkte

(a) Sei $\mathcal{I} = (P, G, I)$ eine Inzidenzstruktur, für die das Axiom (I1) gilt. Des Weiteren sollen folgende Abwandlungen der Axiome (I2), (I3) gelten:

(I2') Je zwei Geraden $g, g' \in G$ schneiden sich, d.h. es existiert (mindestens) ein $p \in P$, sodass $(p, g), (p, g') \in I$.

(I3') Es gibt vier paarweise verschiedene Punkte $p_1, p_2, p_3, p_4 \in P$, sodass je drei davon nicht kollinear sind.

Zeigen Sie:

(i) Je zwei *verschiedene* Geraden in $\mathcal{I}$ schneiden sich in *genau* einem Punkt.

(ii) Es gibt mindestens zwei Geraden in $\mathcal{I}$, die mindestens drei Punkte enthalten. *(3 Bonuspunkte, wenn gezeigt wird, dass alle Geraden gleich viele Punkte enthalten, insbesondere liegen auf jeder Geraden mindestens drei Punkte.)*

(iii) Es gilt $|P| \geq 7$. Geben Sie außerdem ein Beispiel einer Inzidenzstruktur $\mathcal{I}$ wie oben an, für die $|P| = 7$ gilt (für das Beispiel ist keine Begründung notwendig, es reicht *z.B.* eine Skizze).

(iv) (Bonusaufgabe) Finden Sie alle Isomorphieklassen solcher Inzidenzstrukturen mit $|P| = 7$ (man erinnere sich an die Definition von Isomorphie zwischen Inzidenzstrukturen, vgl. Skript, S. 1).

(b) (Bonusaufgabe) Gegeben sei eine Inzidenzstruktur $\mathcal{I} = (P, G, I)$. Man definiere $\mathcal{I}^* := (G, P, I^*)$, wobei gelte

$$(g, p) \in I^* :\Longleftrightarrow (p, g) \in I.$$

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) $\mathcal{I}^*$ erfüllt (I1), (I2), (I3) genau dann, wenn $\mathcal{I}$ die Axiome (I1), (I2), (I3) erfüllt.

(ii) $\mathcal{I}^*$ erfüllt (I1), (I2'), (I3') genau dann, wenn $\mathcal{I}$ die Axiome (I1), (I2'), (I3') erfüllt.

Universität Freiburg
Dr. Ksenia Fedosova
Andreas Demleitner

SS 2019
16.05.2019

Aufgabe 2: (4+4 Punkte)
Sei $P = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$ die Inzidenzgeometrie von Übungsblatt 1, Aufgabe 2 (ii).

(a) Betrachten Sie für $\tau > 0$ die Punkte

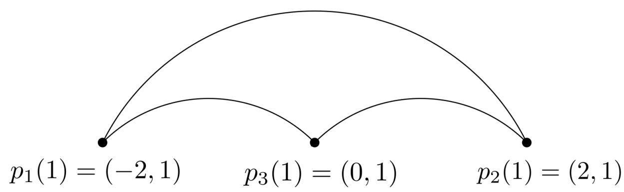
$$p_1(\tau) = \left(-2, \frac{1}{\tau}\right), \quad p_2(\tau) = \left(2, \frac{1}{\tau}\right), p_3(\tau) = \left(0, \frac{1}{\tau}\right).$$

Zeigen Sie, dass für die Innenwinkelsumme $\Sigma(\tau)$ im durch $p_1(\tau), p_2(\tau), p_3(\tau)$ gegebenen Dreieck gilt:

$$\Sigma(\tau) \to 0 \text{ für } \tau \to \infty.$$

Vorsicht: Die Punkte $\lim\limits_{\tau \to \infty} p_j(\tau)$ gehören nicht mehr zu P!

Skizze zu Aufgabenteil (a):



(b) Gegeben seien die Punkte

$$p_1 = (-1, 1), \quad p_2 = (1, 1), \quad p_3 = (0, 1 + \sqrt{3}).$$

Der Punkt $O := \left(0, 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ist (euklidisch) gleich weit von den Punkten p_1, p_2, p_3 entfernt (das muss nicht nachgewiesen werden).
Man definiere nun für $\tau \in [0, 1)$ die Punkte

$$p_1(\tau) = (1 - \tau) \cdot p_1 + \tau \cdot O,$$
$$p_2(\tau) = (1 - \tau) \cdot p_2 + \tau \cdot O,$$
$$p_3(\tau) = (1 - \tau) \cdot p_3 + \tau \cdot O.$$

Sei $\Sigma(\tau)$ die Innenwinkelsumme des Dreiecks, das durch die Punkte $p_1(\tau), p_2(\tau), p_3(\tau)$ gegeben ist. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\Sigma(\tau) \to \pi \text{ für } \tau \to 1.$$

Gehen Sie hierbei wie folgt vor:

- Zeigen Sie zunächst, dass falls $p_1 = p_1(0)$ und $p_2 = p_2(0)$ auf der Geraden $h_{x_{12},r(0)} = \{(x,y) \in P \,|\, (x - x_{12})^2 + y^2 = r(0)^2\}$ liegen, so liegen die Punkte $p_1(\tau)$ und $p_2(\tau)$ auf einer Geraden der Form

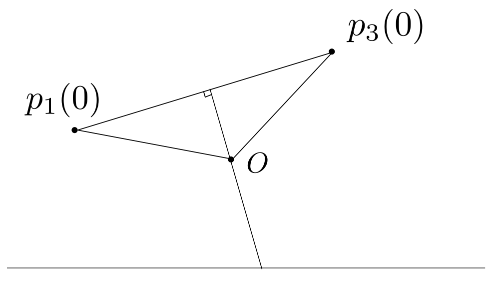
$$h_{x_{12},r(\tau)} = \{(x,y) \in P \,|\, (x - x_{12})^2 + y^2 = r(\tau)^2\},$$

d.h. der Mittelpunkt des entsprechenden (Halb-)Kreises bleibt gleich, aber der Radius variiert entsprechend mit τ. Bestimmen Sie $h_{x_{12},r(\tau)}$ explizit.
- Sei $\ell(\tau)$ die Tangente von $h_{x_{12},r(\tau)}$ im Punkt $p_1(\tau)$ (im euklidischen Sinne). Zeigen Sie, dass für die Steigung $m(\tau)$ von $\ell(\tau)$ gilt:

$$m(\tau) \to 0 \text{ für } \tau \to 1.$$

- Schließen Sie jetzt die Behauptung.

zu Aufgabenteil (b):



Abgabedetails: Abgabe am Freitag, den 24. Mai 2019 vor der Vorlesung in den Briefkästen 3.21 und 3.22 im Untergeschoss des mathematischen Instituts.

- Briefkasten 3.21: Gruppen Mi 10-12, Do 10-12.
- Briefkasten 3.22: Gruppen Di 10-12, Di 12-14.