Universität Freiburg
Dr. Ksenia Fedosova
Andreas Demleitner

SS 2019
23.05.2019

Übungsaufgaben zur Vorlesung „Elementargeometrie“

Übungsblatt 5

Aufgabe 1: (1+1+1 Punkte)

(a) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $f: X \to X$ eine Isometrie. Zeigen Sie: f ist injektiv.

(b) Sei $I_2 \neq R \in O(2)$ eine Drehung und $b \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass genau ein $w \in \mathbb{R}^2$ existiert, sodass für alle $v \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$Rv + b = R(v - w) + w.$$

(c) Beweisen Sie die Parallelogrammgleichung

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^2: \quad 2\langle v, w\rangle = ||v||^2 + ||w||^2 - ||v - w||^2 = ||v + w||^2 - ||v||^2 - ||w||^2.$$

Aufgabe 2: (3 Punkte)
Gegeben seien die folgenden Punkte im $\mathbb{R}^2$:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$
$$Q_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad Q_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix},$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$. In welchen Fällen existiert eine Isometrie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(P_i) = Q_i$ für $i = 1, 2, 3$? Falls f existiert, ist f eindeutig bestimmt? Falls ja, so bestimme man f explizit.

Aufgabe 3: ((1+1+2)+(5+2*) Punkte)

(a) Sei $\Delta P_1P_2P_3$ ein *gleichseitiges Dreieck* im $\mathbb{R}^2$, d.h.

$$||P_1 - P_2|| = ||P_1 - P_3|| = ||P_2 - P_3||.$$

(i) Zeigen Sie: $|\sphericalangle P_1P_2P_3| = |\sphericalangle P_1P_3P_2| = |\sphericalangle P_2P_1P_3| = \frac{\pi}{3}$.

(ii) Seien $Q_1 \neq Q_2$ verschiedene Punkte im $\mathbb{R}^2$ und sei g die Gerade durch Q_1, Q_2. Weisen Sie nach, dass die Menge der Punkte $Q \in \mathbb{R}^2$, die gleich weit von Q_1 und Q_2 entfernt sind, eine Gerade ℓ bildet, die senkrecht auf g steht (vgl. Übungsblatt 3, Aufgabe 3).
(Man sagt, dass ℓ die *Mittelsenkrechte* von $\overline{Q_1Q_2}$ ist.)

(iii) Sei h_1 die Gerade, die P_1 enthält und senkrecht auf der Geraden durch P_2, P_3 steht. Die Geraden h_2, h_3 seien analog definiert. Zeigen Sie, dass sich h_1, h_2, h_3 in einem Punkt O schneiden, für den gilt

$$||O - P_1|| = ||O - P_2|| = ||O - P_3||. \qquad (*)$$

Zeigen Sie weiter, dass O durch $(*)$ eindeutig bestimmt ist, und dass für alle $i \neq j$ gilt: $|\sphericalangle P_i O P_j| = \frac{2\pi}{3}$

(b) Sei ΔABC ein Dreieck in $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass es genau einen Punkt $Z \in \mathbb{R}^2$ gibt, sodass die Summe der Abstände von Z zu den drei Eckpunkten A, B, C minimal ist. Beschreiben Sie die Lage von Z geometrisch.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass wenn Z existiert, (mindestens) einer der beiden Fälle eintritt:

(1) $Z \in \{A, B, C\}$, oder

(2) $\frac{1}{||Z-A||}(Z - A) + \frac{1}{||Z-B||}(Z - B) + \frac{1}{||Z-C||}(Z - C) = 0$.

(2 Bonuspunkte, wenn auch bewiesen wird, dass mindestens einer dieser Fälle eintritt, falls Z existiert.)
Bringen Sie dann Aufgabenteil (a) (iii) geschickt mit (2) in Verbindung. Hierfür könnte $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ nützlich sein.

Abgabedetails: Abgabe am Freitag, den 31. Mai 2019 vor der Vorlesung in den Briefkästen 3.21 und 3.22 im Untergeschoss des mathematischen Instituts.

- Briefkasten 3.21: Gruppen Mi 10-12, Do 10-12.
- Briefkasten 3.22: Gruppen Di 10-12, Di 12-14.