Universität Freiburg
Dr. Ksenia Fedosova
Andreas Demleitner

SS 2019
06.06.2019

Übungsaufgaben zur Vorlesung „Elementargeometrie“

Übungsblatt 7

Aufgabe 1: (3+(1+1+1) Punkte)
Seien pqr drei nicht kollineare Punkte in der euklidischen Ebene. Seien p', q' bzw. r' Punkte im Inneren der Strecken $\overline{qr}$, $\overline{pr}$ bzw. $\overline{pq}$.

(a) Zeigen Sie: Falls sich die Strecken $\overline{pp'}$, $\overline{qq'}$ und $\overline{rr'}$ in einem Punkt schneiden, vgl. linke Abbildung, dann gilt

$$\frac{|\overline{qp'}|}{|\overline{p'r}|}\frac{|\overline{rq'}|}{|\overline{q'p}|}\frac{|\overline{pr'}|}{|\overline{r'q}|} = 1. \tag{1}$$

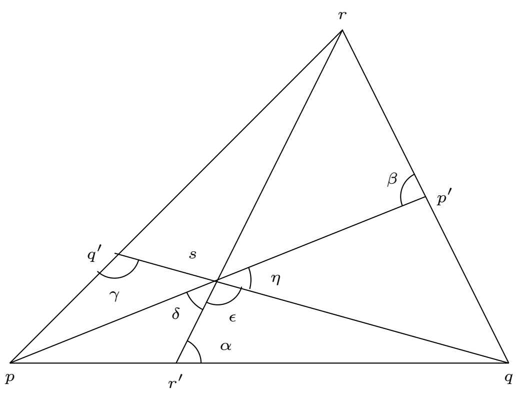
(b) Es gelte nun (1). Sei s der Schnittpunkt von $\overline{pp'}$ und $\overline{rr'}$. Wir setzen $f(x) := \frac{\sin x}{\sin(\pi-\delta-x)}$. Zeigen Sie:

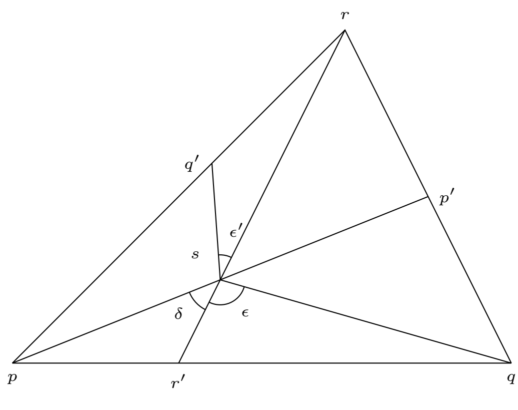
(i) $f(\epsilon) = f(\epsilon')$, wobei $\delta, \epsilon, \epsilon'$ wie in der rechten Abbildung sind.

(ii) f ist monoton auf $(0, \pi)$.

(iii) Folgern Sie aus (a) und (b), dass auch $\overline{qq'}$ durch s geht und damit die Umkehrung von (i) gilt.

(Hinweis: Sinussatz für die kleinen Dreiecke.)





Aufgabe 2: (2+2+2)
Sei $\mathbb{H}$ die hyperbolische Halbebene und $\mathbb{D}$ das hyperbolische Kreisscheibenmodell.

Universität Freiburg
Dr. Ksenia Fedosova
Andreas Demleitner

SS 2019
06.06.2019

(a) Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{H} &\to \mathbb{D}, \\ z &\mapsto \frac{z-i}{z+i} \end{aligned}$$

eine wohldefinierte, bijektive Abbildung ist.

(b) Sei $t_b\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ die Translation in um $b \in \mathbb{R}$. Sei $r_\alpha\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ die Rotation um den Ursprung um den Winkel α. Skizzieren Sie für $k = 0, 1, 2$ die Geraden $t_k(g_0)$ in $\mathbb{H}$, $f \circ t_k(g_0)$, $r_{\frac{\pi}{3}} \circ f \circ t_k(g_0)$ in $\mathbb{D}$. (Hierbei ist $g_0 = \{iy\colon\ y > 0\}$).

(c) Seien $p \neq q$ zwei Punkte in $\mathbb{D}$. Sei ℓ die Gerade durch p und q. Benutzen Sie die Isometrien r_α, t_b und $s_a\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $s_a(z) = az$, $a > 0$ um zu beschrieben, wie man eine Isometrie $\mathbb{D}$ bekommt, die ℓ auf $(-1, 1) \subset \mathbb{D}$ und p auf den Ursprung abbildet.

Aufgabe 3: (3 Punkte)
Betrachten Sie $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}) \setminus \{I_2, -I_2\}$ mit der in der Vorlesung beschriebenen Operation auf $\overline{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H} = \{x + iy\colon\ x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}\} \cup \{\infty\}$. Zeigen Sie:

(a) Gilt $|a+d| = 2$, so hat g genau einen Fixpunkt auf $\overline{\mathbb{H}}$. Dieser liegt in $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \subset \overline{\mathbb{H}}$.

(b) Gilt $|a + d| > 2$, so hat g genau zwei Fixpunkte auf $\overline{\mathbb{H}}$. Diese liegen beide in $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \subset \overline{\mathbb{H}}$.

(c) Gilt $|a + d| < 2$, so hat g genau einen Fixpunkt auf $\overline{\mathbb{H}}$. Dieser liegt in $\mathbb{H} \subset \overline{\mathbb{H}}$.

Abgabedetails: Abgabe am Freitag, den **21. Juni 2019** vor der Vorlesung in den Briefkästen 3.21 und 3.22 im Untergeschoss des mathematischen Instituts.

- Briefkasten 3.21: Gruppen Mi 10-12, Do 10-12.
- Briefkasten 3.22: Gruppen Di 10-12, Di 12-14.