

Fourier-Reihen

Universität Freiburg, SS 2022

Ksenia Fedosova
Skript - Version vom 14. Juli 2022

I. Gewöhnliche Differentialgleichungen/partielle Differentialgleichungen

I.1. Gewöhnliche Differentialgleichungen

Die Fourier-Analyse ist eine Sammlung Techniken, die zur Lösung vieler Arten von Problemen angewendet kann. Eine der wichtigsten Anwendung ist die Lösung partieller Differentialgleichungen in der Physik welches im Folgenden anhand der Wellen- und Wärmeleitungsgleichung veranschaulicht werden soll.

Definition I.1.1. Eine *gewöhnliche Differentialgleichung* ist eine Gleichung für eine gesuchte Funktion von einer Variablen, in der auch Ableitungen dieser Funktion vorkommen. Die höchste vorkommende Ableitung nennt man Ordnung der Differentialgleichung.

Beispiel I.1.2. Die folgende Differentialgleichung

$$\exp(f^{(2022)}(x)) = 2023$$

ist von Ordnung 2022.

Beispiel I.1.3. Sei $a \in \mathbb{R}$. Die folgende Differentialgleichung[†]

$$f'(x) = af(x)$$

ist von 1. Ordnung.

Beispiel I.1.4. Sei $a \in \mathbb{R}$. Die folgende Differentialgleichung

$$af^{(5)} + (a - 1)f^{(3)} = 0$$

ist von entweder Ordnung 3 oder 5.

Beispiel I.1.5. Newtons zweites Bewegungsgesetz – die Beziehung zwischen der Bewegung x zu der Zeit t eines Objekts der Masse m unter der Kraft F – ist durch die Differentialgleichung für die Verschiebung gegeben:

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = F(x).$$

Die ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Es gibt eine wichtige Teilmenge gewöhnlicher Differentialgleichungen, welche als lineare homogene Differentialgleichungen bezeichnet werden.

Definition I.1.6. Eine *lineare homogene Differentialgleichung der Ordnung* $n \in \mathbb{N}$ ist eine Differentialgleichung, die die Form

$$a_n(x)f^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)f^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)f'(x) + a_0(x)f(x) = 0$$

für gegebene Funktionen $a_i(x)$, $i = 0, \dots, n$ hat.

Beispiel I.1.7. Fragen: sind obige Differentialgleichungen linearen homogenen Differentialgleichungen? Ist der zweite Newtonsche Hauptsatz eine lineare homogene Differentialgleichung? Unter welchen Bedingungen auf die Kraft kann es sein?

Die Menge aller Lösungen, also die Menge aller Funktionen, die diese Differentialgleichung erfüllen, bilden einen Vektorraum. D.h., wenn f_1 und f_2 die Differentialgleichung erfüllen, dann auch $af_1 + bf_2$, $a, b \in \mathbb{C}$. Dieses Prinzip (Summieren von Lösungen, um eine andere Lösung zu erhalten) wird *Superposition* genannt.

[†]die folgende Differentialgleichung beschreibt den radioaktiven Zerfall

Beispiel I.1.8. Betrachten wir eine lineare homogene Differentialgleichung

$$u'(x) = \lambda u(x), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Es ist einfach zu zeigen, dass $e^{\lambda x}$ die Differentialgleichung erfüllt. Dann ist $ae^{\lambda x}$ für alle $a \in \mathbb{C}$ auch eine Lösung. Es wurde in [Analysis I, Beispiel 4.4.9] gezeigt, dass dies alle mögliche Lösungen sind, bzw. die einzig mögliche Lösungen.

Beispiel I.1.9. Betrachten wir eine lineare homogene Differentialgleichung

$$u''(x) = \lambda u(x), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Es ist einfach zu zeigen, dass

$$e^{\sqrt{\lambda}x} \text{ und } e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

die Differentialgleichung erfüllen. Dann ist für alle $a, b \in \mathbb{C}$

$$ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x}$$

auch eine Lösung. Es wurde in [Analysis I, Beispiel 4.4.12] gezeigt, dass dies alle mögliche Lösungen sind.

1.2. Partielle Differentialgleichungen

Definition I.2.1. Eine *partielle Ableitung* ist eine Ableitung einer Funktion mit mehreren Argumenten nach einem dieser Argumente.

Definition I.2.2. Eine *partielle Differentialgleichung* ist eine Gleichung für eine gesuchte Funktion von mehr als einer Variablen, in der auch partielle Ableitungen dieser Funktion vorkommen.

Beispiel I.2.3. Sei $u = u(x, y, z)$. Dann ist

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

eine partielle Differentialgleichung.

Beispiel I.2.4. Sei $u = u(x, t)$. Dann ist

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

eine partielle Differentialgleichung.

Beispiel I.2.5. Sei $u = u(t, s)$ und $\sigma, r \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + rs \frac{\partial u}{\partial s} - ru = 0$$

auch eine partielle Differentialgleichung.

Viele Differentialgleichungen entstammen dem Feld der Physik. In den nächsten Minuten [Kapiteln] werden wir eine Differentialgleichung für schwingende Saiten herleiten, mit nicht mehr, als den Gruntkenntnisse aus Analysis I und Basiswissen der Physik.

1.2.1. Eine Gleichung für eine schwingende Saite

Man überlege sich eine Saite eine Gitarre oder einer Violine, welche in Schwingung versetzt wird. Wir nehmen nun folgende Bedingungen an, [um das Modell so einfach wie möglich zu halten]:

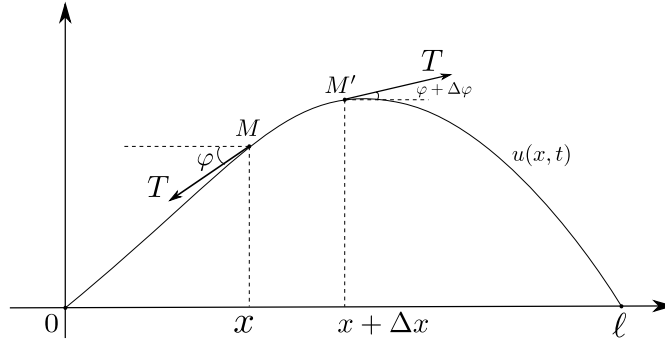
- Die Saite schwingt nur in der Vertikalen,
- Die Zugspannung auf die Saite ist an allen Punkten gleich, und die Zugkraft T ist tangential,
- Der Ausschlag der Saite ist nicht sehr groß.

Die Länge der Saite ist gleich ℓ . Wir beschreiben nun die Bewegung der Saite durch die Beschreibung der Höhe,

$$u(x, t) := \text{die Höhe der Saite am Punkt } x \in [0, \ell] \text{ zur Zeit } t \in [0, \infty).$$

Wir suchen nun nach einer geeigneten Differentialgleichung, welche $u(x, t)$ beschreibt.

Man betrachtet nun ein Segment der Saite, beschrieben durch die Punkte MM' , und geht davon aus, dass dieses hinreichend klein ist. An den Punkten M, M' ist die Zugkraft tangential.



Diese Tangente bilden die Winkel φ und $\varphi + \Delta\varphi$. Wenn wir nun die Kräfte F , welche auf die Saite wirken, auf die vertikale Achse eines Koordinatensystem abbilden, bekommen wir*

$$F = T \sin(\varphi + \Delta\varphi) - T \sin(\varphi).$$

Für sehr kleine Winkeln bzw. Werte von φ gilt†

$$\sin(\varphi) \approx \tan(\varphi) \text{ und } \sin(\varphi + \Delta\varphi) \approx \tan(\varphi + \Delta\varphi).$$

Dann ist

$$T \sin(\varphi + \Delta\varphi) - T \sin(\varphi) \approx T \tan(\varphi + \Delta\varphi) - T \tan(\varphi).$$

Um fortzufahren, müssen wir uns daran erinnern, was $\tan(\varphi)$ beschreibt.

$$T \tan(\varphi + \Delta\varphi) - T \tan(\varphi) = T \left(\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right).$$

Erinnern Sie sich an den Zwischenwertsatz? Und an Mittelwertsatz der Differentialrechnung? Der Satz impliziert dass es $\theta \in [0, 1]$ gibt, so dass der obige Ausdruck gleich

$$T \frac{\partial^2 u(x + \theta \Delta x, t)}{\partial x^2} \Delta x \approx T \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \Delta x$$

ist, und

$$F \approx T \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \Delta x.$$

Um nun auf die Bewegungsgleichung zu bekommen erinnern wir uns an die klassische Mechanik: Newtons zweites Bewegungsgesetz. Die Beschleunigung ist $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Die Masse ist $\rho \Delta x$. [Wir erinnern uns an die Definition der Dichte: $\rho = \text{Masse} / \text{Volumen}$, aber mit der eindimensionalen Saite brauchen wir nur die Längenabschnitt.]

Wir erhalten damit

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta x T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Wenn wir nun noch $T/\rho =: a^2$ setzen, erhalten wir die *Wellengleichung*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{I.1}$$

*Wir dürfen davon ausgehen, dass die Kräfte, die auf die Saite wirken, vertikal sind, weil wir angenommen haben, dass sie sich nur in vertikaler Richtung bewegt.

†Die Frage zur Selbstkontrolle: Warum und was hat diese Annäherung mit der Taylor-Reihe zu tun?

I. Gewöhnliche Differentialgleichungen/partielle Differentialgleichungen

Wir müssen noch beachten, dass die Enden der Saite fest verankert sind und als solches noch folgende *Randbedingungen* angeben:

$$u(0, t) = u(\ell, t), \quad \forall t \in [0, \infty).$$

Die Saite ist zudem in einer Startposition mit einer Startgeschwindigkeit zum Startpunkt:

$$u(x, 0) = f(x), \quad \partial_t u(x, t)|_{t=0} = g(x).$$

Die Funktionen f und g werden *Anfangsbedingungen* genannt.

I.2.2. Trennung von Variablen

Nahezu alle partiellen Differentialgleichungen sind schwer zu lösen. Es gibt keine einzige vereinheitlichende Theorie oder "Rezept", dem wir konsequent folgen können, um partielle Differentialgleichungen zu lösen. In diesem Abschnitt verwenden wir eine Technik, die als "Trennung von Variablen" bekannt ist. Diese Technik kann unter geeigneten Umständen eine partielle Differentialgleichung in eine Menge gewöhnlicher Differentialgleichungen transformieren.

Wir werden (I.1) lösen. Nehmen wir an, dass

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Diese Gleichung ist ein Produkt aus zwei Funktionen, X und T , von denen jede nur von einer Variablen abhängt. Wir schreiben (I.1) als

$$X(x)T''(x) = a^2 X''(t)T(t).$$

Um "die Variablen zu trennen", müssen wir alles, was von x abhängt, auf die eine Seite und alles, was von t abhängt, auf die andere Seite bringen:

$$a^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)}.$$

Beide Seiten müssen jetzt konstant sein. Wir nennen die Konstante $a^2 \lambda$.

Wir fangen zuerst an, die Gleichung für X zu lösen. Die Enden der Saite bewegen sich nicht, d.h.

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0, \quad u(\ell, t) = X(\ell)T(t) = 0, \quad t \in [0, \infty).$$

Dies impliziert,

$$X(0) = X(\ell) = 0.$$

Wir erhalten eine lineare homogene Differentialgleichung wie in Beispiel I.1.9:

$$X''(x) = \lambda X(x), \quad X(0) = X(\ell) = 0.$$

Es gibt $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, so dass

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Die erste Randbedingung, $X(0) = 0$, impliziert dass

$$c_1 e^0 + c_2 e^0 = 0 \implies c_1 = -c_2.$$

Die nächste Randbedingung, $X(\ell) = 0$, impliziert dass

$$c_1 (e^{\sqrt{\lambda}\ell} - e^{-\sqrt{\lambda}\ell}) = 0 \implies c_1 = 0 \text{ oder } e^{\sqrt{\lambda}\ell} - e^{-\sqrt{\lambda}\ell} = 0.$$

Wir hoffen Lösungen zu finden, die nicht gleich Null sind und untersuchen die zweite Option:

$$e^{2\sqrt{\lambda}\ell} = 1.$$

Dann ist

$$2\sqrt{\lambda}\ell = 2\pi i k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

und

$$\lambda a^2 = -\frac{k^2 \pi^2}{\ell^2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Wir schreiben

$$\lambda_k := -\frac{k^2 \pi^2}{l^2 a^2},$$

und weil

$$e^{\frac{ik\pi x}{l}} - e^{-\frac{ik\pi x}{l}} = 2i \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right),$$

haben wir die folgende Lösungen gefunden:

$$X_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right), \quad \lambda_k = -\frac{k^2 \pi^2}{l^2 a^2}.$$

Jetzt können wir auch die gewöhnliche Differentialgleichung für T lösen. Die Gleichung für jede k lautet:

$$\frac{T_k''(t)}{T_k(t)} = -\frac{k^2 \pi^2}{l^2 a^2}.$$

Wir können umsortieren um

$$T_k''(t) = -\frac{k^2 \pi^2}{l^2 a^2} T_k(t)$$

zu erhalten. Alle Lösungen haben die Form

$$T_k(t) = B_k \cos\left(\frac{k\pi t a}{l}\right) + C_k \sin\left(\frac{k\pi t a}{l}\right).$$

Wir haben daher alle Funktionen der Form $X(x)T(t)$ gefunden, die die partielle Differentialgleichung und die Randbedingungen erfüllen. Es gibt unendlich viele, und sie können aufgezählt werden als

$$u_k(x, t) = X_k(x)T_k(t) = A_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \left(B_k \cos\left(\frac{k\pi t a}{l}\right) + C_k \sin\left(\frac{k\pi t a}{l}\right) \right).$$

Beispiel I.2.6. Sei $k = 0$. Dann ist

$$u_0(x, t) = 0.$$

Die Saite schwingt nicht.

Beispiel I.2.7. Sei $k = 1$ und $A_k = 1, B_k = 1, C_k = 0$. Dann ist

$$u_1(x, t) = \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi t a}{l}\right).$$

Für $t = 0$ ist die Saite still. Im Laufe der Zeit bewegt sie sich jedoch in die folgende Positionen. Fragen: ist $u_1(x, t)$ in t periodisch? Was passiert, wenn wir die Länge der Saite verkürzen?

Beispiel I.2.8. Sei $k = 2$ und $A_k = 1, B_k = 1, C_k = 0$. Dann ist

$$u_2(x, t) = \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{2\pi t a}{l}\right).$$

Für $t = 0$ ist die Saite still. Im Laufe der Zeit bewegt sie sich jedoch in die folgende Positionen. [Bild]

Bemerkung I.2.9. Wenn eine Saite schwingt, hören wir nicht einen einzigen reinen Ton, sondern eine Überlagerung mehrerer Töne, deren Frequenzen alle Vielfache der Grundfrequenz sind. Die Grundfrequenz ist die Hauptfrequenz, die am meisten beiträgt, und die anderen Mehrfachfrequenzen werden als Harmonische bezeichnet.

Frage an Leute, die Saiteninstrumente spielen: Spielen Sie eine leere Saite. Verkürzen Sie die Saite zweimal (dann 3/2 mal), spielen Sie erneut. Messen Sie die Länge der Schnur. Berechnen Sie die Spannung der Saite.

I.2.3. Superposition

Der nächste Schritt der Methode der Variablentrennung heißt die *Superposition*. Die gefundenen Funktionen u_k erfüllen eine homogene lineare partielle Differentialgleichung. Um zu sehen, dass sie homogen ist, bringen wir alle Terme auf die rechte Seite und sehen

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0.$$

Diese Gleichung ist homogen, weil wir auf der rechten Seite eine Null haben. Um zu zeigen, dass die Gleichung linear ist, bemerken wir

$$(u + v)_{tt} - a^2 (u + v)_{xx} = u_{tt} - a^2 u_{xx} + v_{tt} - a^2 v_{xx}.$$

I. Gewöhnliche Differentialgleichungen/partielle Differentialgleichungen

Wenn sowohl u als auch v die Gleichung erfüllen, dann ebenso $u + v$.

Eine weitere wichtige Beobachtung ist, dass das zu lösende Problem die *homogenen Randbedingungen* erfüllt.

Immer wenn man Lösungen für eine partielle Differentialgleichung mit diesen Eigenschaften hat, dann ist die Summe zweier beliebiger Lösungen der PDG wieder eine Lösung der PDG, und sie erfüllt wieder die homogene Randbedingung. Wenn wir alle Lösungen zusammenzählen, nennen wir das Ergebnis eine - sic! - *Superlösung!*

Beim Lösen von GDG besteht die Standardvorgehensweise darin, eine Basis allgemeiner Lösungen zu finden und diese dann zu verwenden je nach Anfangsbedingungen eine bestimmte Lösung zu konstruieren. Beim Lösen von PDG werden wir dasselbe tun, außer dass, wir jetzt unendlich viele allgemeine Lösungen verwenden.

Unsere *Superlösung*, die durch Überlagerung aller erhaltenen Lösungen entsteht, ist

$$u(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k(x, t).$$

Konvergiert diese hinreichend gleichmäßig, so erfüllt auch $u(x, t)$ die partielle Differentialgleichung*. Erinnern wir uns an

$$u_k(x, t) = X_k(x)T_k(t) = A_k \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) \left(B_k \cos\left(\frac{k\pi t a}{\ell}\right) + C_k \sin\left(\frac{k\pi t a}{\ell}\right) \right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Dann ist $u_0(x, t) = 0$, und es gilt

$$u_{-k}(x, t) + u_k(x, t) = (A_k - A_{-k}) \sin(k\pi x/\ell) [(B_k + B_{-k}) \cos(k\pi t a/\ell) + (C_k - C_{-k}) \sin(k\pi t a/\ell)].$$

Wir können unsere Lösung vereinfachen, indem wir folgendes definieren

$$\begin{aligned} a_k &:= (A_k - A_{-k})(B_k + B_{-k}), \quad b_k := (A_k - A_{-k})(C_k - C_{-k}) \\ \implies u(x, t) &= \sum_{k \geq 1} \sin(k\pi x/\ell) [a_k \cos(k\pi t a/\ell) + b_k \sin(k\pi t a/\ell)] \end{aligned}$$

Um die unbekanntenen Koeffizienten zu bestimmen, wünschen wir uns das

$$u(x, 0) = f(x) \iff \sum_{k \geq 1} a_k \sin(k\pi x/\ell) = f(x)$$

Ähnlich dazu,

$$u_t(x, 0) = g(x) \iff \sum_{k \geq 1} b_k \frac{k\pi a}{\ell} \sin(k\pi x/\ell) = g(x)$$

Um die Lösung zu vervollständigen, werden wir also versuchen, die Anfangsdaten als unendliche Linearkombination der Funktionen $X_k(x) = \sin(k\pi x/\ell)$ zu entwickeln.

*eine frage zur Selbstkontrolle: dürfen wir Reihen begrifflich differenzieren? Unter welchen Bedingungen dürfen wir das machen? Können Sie ein Beispiel geben, wann wir das nicht dürfen?

II. Fourier Reihen

In der letzten Vorlesung, bzw. während des Seminars haben wir uns mit der Expansion von Funktionen, welche auf einem beschränkten Integral definiert sind, in Sinus und Kosinus Termen beschäftigt. Das Ziel dieses Kapitels ist die Definition der Fourier-Reihe zu geben, ihre elementaren Eigenschaften zu studieren und anhand von Beispielen zu erläutern.

Wir merken an, dass es manchmal eleganter ist mit Exponenten der Form, $e^{i\varphi}$, anstelle der Sinus $\sin(\varphi)$ und Kosinus $\cos(\varphi)$ Terme zu arbeiten. Wir erinnern uns an deren Zusammenhang über die Formeln:

$$\cos(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i},$$

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi).$$

II.1. Definitionen und erste Beispiele

Definition II.1.1. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ist 2π -periodische, wenn für alle $\theta \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(\theta + 2\pi) = f(\theta).$$

In dieser Vorlesung gehen wir davon aus, dass $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ auf jedem beschränkten Intervall Riemann integrierbar[†] ist. Die Frage, welche wir beantworten möchte ist: Kann man $f(x)$ in eine Reihe erweitern in der Form

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) \quad (\text{II.1})$$

Sei

$$c_0 := \frac{1}{2}a_0, \quad c_n := \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad c_{-n} := \frac{1}{2}(a_n + ib_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

dann können wir (II.1) wie folgt umschreiben:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}. \quad (\text{II.2})$$

Wir nehmen für einen Moment an, dass $f(\theta)$ wie in (II.2) beschrieben wird. Wir möchten nun c_n durch f ausdrücken. Dazu nehmen wir an, das wir dies formell tun können und ignorieren potentielle Konvergenzprobleme o.ä.

Wir wählen ein $k \in \mathbb{Z}$, multiplizieren (II.2) mit $e^{-ik\theta}$ und integrieren von $-\pi$ bis π und erhalten folgendes:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-ik\theta} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i(n-k)\theta} d\theta.$$

Zusätzlich nehmen wir an, dass hier Integration und Summierung austauschbar sind und erhalten:[‡]

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i(n-k)\theta} d\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)\theta} d\theta. \quad (\text{II.3})$$

Es gilt für $n \neq k$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)\theta} d\theta = \frac{e^{i(n-k)\theta}}{i(n-k)} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{(-1)^{n-k} - (-1)^{n-k}}{i(n-k)} = 0,$$

[†]Fragen zur Selbstkontrolle: Kennen Sie hinreichende Bedingungen, ab wann eine Funktion Riemann integrierbar ist? Sind abgeschlossene Funktionen Riemann integrierbar? Können sie ein Beispiel einer Funktion geben, welche nicht glatt ist aber trotzdem Riemann integrierbar?

[‡]Weitere Frage zur Selbstkontrolle: Wann genau dürfen wir das tun?

II. Fourier Reihen

und für $n = k$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)\theta} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta = 2\pi.$$

Wenn wir diese Integrale in (II.3) einsetzen, erhalten wir:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-ik\theta} d\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)\theta} d\theta = 2\pi c_k.$$

Wir benennen nun k zu n um und erhalten für beliebige $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta. \quad (\text{II.4})$$

Es ist nun einfach die Koeffizienten a_n und b_n zu finden:

$$a_0 = 2c_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta$$

und für $n = 1, 2, 3, \dots$,

$$\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) (e^{-in\theta} + e^{in\theta}) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta \\ b_n &= i(c_n - c_{-n}) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) (e^{-in\theta} - e^{in\theta}) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta \end{aligned}$$

d.h.,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta, \quad n \geq 1, \quad (\text{II.5})$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta, \quad n \geq 1. \quad (\text{II.6})$$

Beachten Sie, dass die Gleichungen ebenfalls für $n = 0$ gelten:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos(0 \cdot \theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta. \quad (\text{II.7})$$

Wir bemerken noch einmal, dass obige Berechnungen formell, d.h. unbewiesen sind. Aber wenn f nun eine beliebige, Riemann-integrierbare, periodische Funktion ist ergeben die Integrale (II.5), (II.6), (II.7) Sinn und wir können sie nutzen, um die Koeffizienten a_n , b_n , und c_n zu definieren. Wir können nun eine formale Definition erstellen:

Definition II.1.2. Wir nehmen an, eine Funktion f ist 2π -periodisch und zwischen $[-\pi, \pi]$ integrierbar. Die Zahlen c_n , definiert durch (II.4), oder die Zahlen a_n und b_n , definiert durch (II.5), (II.6), (II.7), sind die Fourier Koeffizienten von f und die zugehörige Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} \text{ oder } \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

ist die Fourier Reihe von f .

Anstelle über $[-\pi, \pi]$ zu integrieren hätten wir ebenfalls die Grenzen $[0, 2\pi]$ wählen können. Wir können dies sogar Beweisen:

Lemma II.1.3. Wenn F periodisch mit einer Periode $P > 0$ ist und $a \in \mathbb{R}$, dann ist $\int_a^{a+P} F(x) dx$ unabhängig von a .

Beweis. Sei

$$g(a) := \int_a^{a+P} F(x)dx = \int_0^{a+P} F(x)dx - \int_0^a F(x)dx.$$

Der Hauptsatz der Analysis impliziert, dass $g'(a) = F(a+P) - F(a)$. Die Periodizität von F impliziert, dass $g'(a) = 0$, weshalb g konstant ist. \square

Lemma II.1.3 impliziert einen wichtigen Fakt:

Lemma II.1.4. *Der konstante Term in der Fourier Reihe einer 2π -periodischen Funktion ist der Mittelwert von f in einem Intervall der Länge 2π .*

Ebenfalls nützlich ist der folgende Zusammenhang:

Lemma II.1.5. *Wenn f gerade ist:*

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\theta) \cos(n\theta) d\theta, \quad b_n = 0.$$

Falls f ungerade ist:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\theta) \sin(n\theta) d\theta, \quad a_n = 0.$$

II.2. Beispiele

Wir berechnen nun beispielhaft einige Fourier Reihen.

Beispiel II.2.1. Sei $k \in \mathbb{Z}$ und $f(\theta) = e^{\pi i k \theta}$. Dann stimmt diese Funktion mit einer Fourier Reihe überein mit $c_k = 1$ und für $n \neq k$, $c_n = 0$.

Allerdings müssen die Fourier Reihe einer Funktion nicht zwangsläufig mit der der Funktion übereinstimmen. Dazu ein weiteres Beispiel:

Beispiel II.2.2. Sei $k \in \mathbb{Z}$ und

$$f(\theta) = \begin{cases} e^{\pi i k \theta}, & \theta \neq 0, \\ 2022, & \theta = 0. \end{cases}$$

dann ist f Riemann-integrierbar und seine Fourier Reihe ist gleich:

$$e^{\pi i k \theta}.$$

Beispiel II.2.3. Sei $f(\theta) = \cos^2(\theta)$. Dann ist

$$f(\theta) = \frac{\cos(2\theta) + 1}{2},$$

d.h. $b_n = 0$ und

$$a_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ \frac{1}{2}, & n = 2, \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

Beispiel II.2.4. Sei f die durch die Formel bestimmte 2π -periodische Funktion

$$f(\theta) = |\theta| \text{ for } -\pi \leq \theta \leq \pi.$$

Das heißt, f ist die Dreieckswelle. Die Funktion f ist gerade, Lemma II.1.5 impliziert dass $b_n = 0$ und

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\theta) \cos n\theta d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \theta \cos(n\theta) d\theta.$$

Dann gilt für $n = 0$,

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \theta d\theta = \frac{1}{\pi} \theta^2 \Big|_0^\pi = \pi$$

II. Fourier Reihen

und für $n > 0$,

$$a_n = \frac{2}{\pi} \frac{\theta \sin n\theta}{n} \Big|_0^\pi - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin n\theta}{n} d\theta = \frac{2 \cos n\theta}{\pi n^2} \Big|_0^\pi = \frac{2(-1)^n - 1}{\pi n^2}$$

da $\sin n\pi = 0$ und $\cos n\pi = (-1)^n$. Wir bemerken, dass $(-1)^n - 1 = -2$ für ungerade n und ist 0 für gerade n . Daher ist die Fourier-Reihe von f

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^2} \cos n\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)\theta}{(2k-1)^2}.$$

Die Reihe konvergiert absolut aufgrund der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$.

Beispiel II.2.5. Sei g die durch die Formel bestimmte 2π -periodische Funktion

$$g(\theta) = \theta \text{ for } -\pi < \theta \leq \pi.$$

Für $n = 0$ haben wir

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta d\theta = 0$$

und für $n \neq 0$ integrieren wir partiell und erhalten

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta e^{-in\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \frac{\theta e^{-in\theta}}{-in} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-in\theta}}{-in} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-in\theta} \left(\frac{\theta}{-in} + \frac{1}{n^2} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{(-1)^{n+1}}{in}, \end{aligned}$$

weil $e^{-in\pi} = (-1)^n$. Daher ist die Fourier-Reihe von g

$$\sum_{n \neq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{in} e^{in\theta}$$

Hier durchläuft n alle positiven und negativen ganzen Zahlen. Da $(-1)^n = (-1)^{-n}$, können die n -ten und $(-n)$ -ten Terme dieser Reihe kombiniert werden, um folgendes zu ergeben

$$(-1)^{n+1} \left(\frac{e^{in\theta}}{in} + \frac{e^{-in\theta}}{-in} \right) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin n\theta.$$

Damit ist die Fourier-Reihe von g

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\theta.$$

Es ist auf den ersten Blick nicht klar, ob die Reihen konvergieren oder nicht. Wir werden diese Frage in den weiteren Abschnitten diskutieren.

II.2.1. Besselsche Ungleichung

Lemma II.2.6. Wenn die Funktion f 2π -periodisch und Riemann-integrierbar auf $[-\pi, \pi]$ ist und die Fourier-Koeffizienten c_n durch (2.5) definiert sind, dann gilt

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta.$$

Ähnlich,

$$\frac{1}{4}|a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta.$$

Beweis. Wir versuchen, den Unterschied zu schätzen

$$\begin{aligned} & \left| f(\theta) - \sum_{-N}^N c_n e^{in\theta} \right|^2 \\ &= \left(f(\theta) - \sum_{-N}^N c_n e^{in\theta} \right) \left(\overline{f(\theta)} - \sum_{-N}^N \bar{c}_n e^{-in\theta} \right) \\ &= |f(\theta)|^2 - \sum_{-N}^N \left[c_n \overline{f(\theta)} e^{in\theta} + \bar{c}_n f(\theta) e^{-in\theta} \right] + \sum_{m,n=-N}^N c_m \bar{c}_n e^{i(m-n)\theta} \end{aligned}$$

Teilen nun beide Seiten durch 2π und integriere von $-\pi$ nach π . Unter Berücksichtigung der Formeln

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta = c_n, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)\theta} d\theta = \begin{cases} 0 & \text{if } m \neq n, \\ 1 & \text{if } m = n \end{cases}$$

erhalten wir, dass

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(\theta) - \sum_{-N}^N c_n e^{in\theta} \right|^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta - \sum_{-N}^N [c_n \bar{c}_n + \bar{c}_n c_n] + \sum_{-N}^N c_n \bar{c}_n \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta - \sum_{-N}^N |c_n|^2. \end{aligned}$$

Allerdings ist das Integral auf der linken Seite ist sicherlich nicht-negativ, also erhalten wir

$$0 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta - \sum_{-N}^N |c_n|^2$$

Wenn wir $N \rightarrow \infty$ lassen, erhalten wir das Ergebnis. □

In den nächsten Vorlesungen werden wir sehen, dass die Ungleichheit tatsächlich eine Gleichheit ist. Im Moment impliziert die Besselsche Ungleichung das folgende Lemma:

Lemma II.2.7. *Die Fourier-Koeffizienten a_n , b_n , c_n und c_{-n} gehen gegen Null, wenn $n \rightarrow \infty$.*

Konvergenz von Fourier-Reihen

Konvergiert die Fourier-Reihe einer periodischen Funktion f gegen f selbst? Wie wir in den Beispielen zuvor gesehen haben, lautet die Antwort für nicht stetigen Funktionen definitiv nein; z.B., die Fourier Reihe für

$$f(\theta) = \begin{cases} 1, & \theta \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}, \\ 2022, & \theta = 0 \end{cases}$$

ist gleich 1.

Aber was ist mit Funktionen, die glatter sind? Wir definieren zuerst die Klasse von Funktionen, mit denen wir arbeiten werden.

Stückweise stetige Funktionen

Definition II.2.8. Sei $-\infty < a < b < \infty$. Eine Funktion f auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ ist *stückweise stetig*, falls

- (i) f ist stetig auf $[a, b]$ außer endlich vielen Punkten x_1, \dots, x_k (die Menge x_1, \dots, x_k darf auch leer sein);
- (ii) an jedem der Punkte x_1, \dots, x_k der linke und rechte Limes von f ,

$$f(x_j-) = \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} f(x_j - h) \text{ und } f(x_j+) = \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} f(x_j + h),$$

existiert.

Wenn der Endpunkt a (oder b) einer der Ausnahmepunkte x_j ist, brauchen wir nur den rechten (oder linken) Limes.

Wir bezeichnen die Klasse der stückweise stetigen Funktionen auf $[a, b]$ mit $PC(a, b)$.

Definition II.2.9. Eine Funktion f ist auf $[a, b]$ *stückweise glatt*, wenn f und ihre erste Ableitung f' beide stückweise stetig auf $[a, b]$ sind, und wir bezeichnen die Klasse der stückweise glatten Funktionen auf $[a, b]$ mit $PS(a, b)$. Genauer gesagt, $f \in PS(a, b)$ genau dann, wenn

- (i) $f \in PC(a, b)$;
- (ii) f' existiert und ist stetig auf (a, b) außer vielleicht endlich vielen Punkten x_1, \dots, x_K (die alle Punkte enthalten, an denen f unstetig ist), und die einseitigen Grenzen $f'(x_j-)$ und $f'(x_j+)$ ($j = 1, \dots, K$), sowie $f'(a+)$ und $f'(b-)$ existieren.

Mit anderen Worten, f ist stückweise glatt, wenn sein Graph eine glatte Kurve ist, abgesehen von endlich vielen Sprüngen (wobei f unstetig ist) und Ecken (wobei f' unstetig ist). Wir erlauben keine unendlichen Diskontinuitäten (wie $f(x) = 1/x$ bei $x = 0$) oder scharfe Spitzen (wo f' unendlich wird).

Definition II.2.10. Eine auf der ganzen reellen Geraden \mathbb{R} definierte Funktion heißt *stückweise stetig oder stückweise glatt auf \mathbb{R}* , wenn dies auf jedem beschränkten Intervall $[a, b]$. (Das heißt, f oder f' können unendlich viele Diskontinuitäten auf der ganzen Linie haben, aber nur endlich viele in jedem begrenzten Intervall.)

Wir bezeichnen die Räume von stückweise stetigen und stückweise glatten Funktionen auf \mathbb{R} durch $PC(\mathbb{R})$ und $PS(\mathbb{R})$.

Wir kehren nun zur Betrachtung der Fourier-Reihe einer 2π -periodischen Funktion $f(\theta)$ zurück. Wir erinnern daran, dass dies definiert ist

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\pi n \theta}, \quad (\text{II.8})$$

II. Fourier Reihen

mit

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \cos(n\psi) d\psi, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \sin(n\psi) d\psi$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) e^{-in\psi} d\psi.$$

Wir definieren die N -te Summe von (II.8) als S_N^f :

$$S_N^f(\theta) := \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^N (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) = \sum_{-N}^N c_n e^{in\theta} \quad (\text{II.9})$$

und unser Ziel ist es zu zeigen, dass S_N^f als $N \rightarrow \infty$ gegen f konvergiert. Wenn wir die Definition von c_n in $S_N^f(\theta)$ einsetzen, erhalten wir

$$S_N^f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-N}^N \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) e^{in(\theta-\psi)} d\psi = \frac{1}{2\pi} \sum_{-N}^N \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) e^{in(\psi-\theta)} d\psi.$$

Die letzte Gleichheit folgt aus der Ersetzung von n durch $-n$. Sei $\phi := \psi - \theta$, dann erhalten wir mit Hilfe von Lemma II.1.3

$$S_N^f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-N}^N \int_{-\pi+\theta}^{\pi+\theta} f(\theta + \phi) e^{in\phi} d\phi = \frac{1}{2\pi} \sum_{-N}^N \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta + \phi) e^{in\phi} d\phi.$$

D.h.,

$$S_N^f(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta + \phi) D_N(\phi) d\phi, \quad \text{wobei } D_N(\phi) := \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N e^{in\phi}$$

Die Funktion $D_N(\phi)$ wird als N -ter Dirichlet-Kern bezeichnet. Wir können D_N in einer besser Form ausdrücken, indem wir erkennen, dass es sich um die Summe einer endlichen geometrischen Folge handelt:

$$D_N(\phi) = \frac{1}{2\pi} e^{-iN\phi} (1 + e^{i\phi} + \dots + e^{i2N\phi}) = \frac{1}{2\pi} e^{-iN\phi} \sum_0^{2N} e^{in\phi}$$

Da $\sum_0^K r^n = (r^{K+1} - 1) / (r - 1)$ für jedes $r \neq 1$, für $\phi \neq 0$ haben wir

$$D_N(\phi) = \frac{1}{2\pi} e^{-iN\phi} \frac{e^{i(2N+1)\phi} - 1}{e^{i\phi} - 1} = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(N+1)\phi} - e^{-iN\phi}}{e^{i\phi} - 1}.$$

Wir multiplizieren sowohl Zähler als auch Nenner mit $e^{-i\phi/2}$

$$D_N(\phi) = \frac{1}{2\pi} \frac{\exp[i(N + \frac{1}{2})\phi] - \exp[-i(N + \frac{1}{2})\phi]}{\exp(i\frac{1}{2}\phi) - \exp(-i\frac{1}{2}\phi)} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(N + \frac{1}{2})\phi}{\sin\frac{1}{2}\phi}.$$

Mit Hilfe dieser Formel können wir den Graphen von $D_N(\phi)$ zeichnen.

Die Intuition hinter $S_N^f(\theta) \rightarrow f(\theta)$ ist folgende: In der Integralformel für $S_N^f(\theta)$, die scharfe zentrale Spitze von $D_N(\phi)$ bei $\phi = 0$ zeigt den Wert $f(\theta)$ an, und die schnellen Oszillationen von $D_N(\phi)$ weg von $\phi = 0$ eliminiert den größten Teil des Rests des Integrals wegen Aufhebungen zwischen positiven und negativen Werten.

Lemma II.2.11. Für $N \in \mathbb{N}$,

$$\int_{-\pi}^0 D_N(\theta) d\theta = \int_0^{\pi} D_N(\theta) d\theta = \frac{1}{2}$$

Beweis. Aus der Definition gilt

$$D_N(\theta) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_1^N \cos n\theta,$$

und dann ist

$$\int_0^{\pi} D_N(\theta) d\theta = \left[\frac{\theta}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_1^N \frac{\sin n\theta}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}.$$

Die Berechnungen sind analog für das Integral von $-\pi$ bis 0. □

Wir kommen nun zu unseren Hauptkonvergenzsatz.

Satz II.2.12. *Wenn eine Funktion f 2π -periodisch und stückweise glatt auf \mathbb{R} ist, und S_N^f durch (II.9) definiert ist, dann ist*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N^f(\theta) = \frac{1}{2}[f(\theta-) + f(\theta+)]$$

für jedes θ . Insbesondere gilt $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N^f(\theta) = f(\theta)$ für jedes θ , bei dem f stetig ist.

Beweis. Nach Lemma 2.4 haben wir

$$\frac{1}{2}f(\theta-) = f(\theta-) \int_{-\pi}^0 D_N(\phi) d\phi, \quad \frac{1}{2}f(\theta+) = f(\theta+) \int_0^{\pi} D_N(\phi) d\phi,$$

und damit nach Gleichung (2.12),

$$\begin{aligned} S_N^f(\theta) - \frac{1}{2}[f(\theta-) + f(\theta+)] \\ = \int_{-\pi}^0 [f(\theta + \phi) - f(\theta-)] D_N(\phi) d\phi + \int_0^{\pi} [f(\theta + \phi) - f(\theta+)] D_N(\phi) d\phi. \end{aligned}$$

Wir wollen zeigen, dass die obrige Formel für jede feste θ gegen Null geht wenn $N \rightarrow \infty$. Aber nach Formel (2.13) können wir es schreiben als

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\phi) \left(e^{i(N+1)\phi} - e^{-iN\phi} \right) d\phi$$

mit

$$g(\phi) := \begin{cases} \frac{f(\theta+\phi) - f(\theta-)}{e^{i\phi} - 1}, & -\pi < \phi < 0, \\ \frac{f(\theta+\phi) - f(\theta+)}{e^{i\phi} - 1}, & 0 < \phi < \pi. \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

Die Funktion g ist eine gut Funktion auf $[-\pi, \pi]$, so glatt wie f , außer in der Nähe von $\phi = 0$ (wobei $e^{i\phi} - 1$ verschwindet). Nach der Regel von l'Hôpital

$$\lim_{\phi \rightarrow 0_+} g(\phi) = \lim_{\phi \rightarrow 0_+} \frac{f(\theta + \phi) - f(\theta+)}{e^{i\phi} - 1} = \lim_{\phi \rightarrow 0_+} \frac{f'(\theta + \phi)}{ie^{i\phi}} = \frac{f'(\theta+)}{i}.$$

Ebenso nähert sich $g(\phi)$ der endlichen Grenze $i^{-1}f'(\theta-)$ wenn ϕ von links gegen Null geht. Daher ist g tatsächlich stückweise stetig auf $[-\pi, \pi]$. Als Korollar zur Besselschen Ungleichung in §2.1, seinen Fourier-Koeffizienten

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\phi) e^{-in\phi} d\phi$$

gehen gegen Null wenn $n \rightarrow \pm\infty$. Aber der Ausdruck (2.15) ist nichts anderes als $C_{-(N+1)} - C_N$, also verschwindet er als $N \rightarrow \infty$; und das mussten wir zeigen. \square

Sehen wir uns an, was dieser Satz in Bezug auf die beiden Beispiele des vorigen Abschnitts aussagt. Die Funktion f aus Beispiel 1 ist stückweise glatt und überall stetig, sodass die Fourier-Reihe von f an jedem Punkt gegen f konvergiert. Daher,

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\theta}{(2n-1)^2} = |\theta| \quad \text{für } -\pi \leq \theta \leq \pi.$$

Andererseits ist die Funktion g aus Beispiel 2 stückweise glatt und stetig außer an den Punkten $\theta = k\pi$ mit k ungerade. An diesen Unstetigkeiten haben wir $g(k\pi-) = \pi$ und $g(k\pi+) = -\pi$, also $\frac{1}{2}[g(k\pi-) + g(k\pi+)] = 0$. Somit konvergiert die Fourier-Reihe von g an allen Punkten gegen g außer $\theta = k\pi$ (k ungerade), wo sie gegen Null konvergiert. Somit,

$$\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\theta = \frac{\theta}{2} \quad \text{für } -\pi < \theta < \pi.$$

II. Fourier Reihen

Insbesondere wenn wir $\theta = 0$ in (2.16) nehmen, erhalten wir die Formel

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots = \frac{\pi^2}{8}.$$

(Wie der Leser überprüfen kann, ergibt sich die gleiche Formel aus der Annahme von $\theta = \pi$.) Außerdem, wenn wir $\theta = \frac{1}{2}\pi$ in (2.17) nehmen und die verwendete Tatsache, dass $\sin \frac{1}{2}n\pi$ abwechselnd 1 und -1 ist, wenn n ungerade ist, und 0, wenn n gerade ist, finden wir das

$$\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

Ableitungen, Integralen

Unser erstes Hauptresultat setzt die Fourier-Koeffizienten einer Funktion mit denen ihrer Ableitung in Beziehung.

Satz II.2.13. Sei f eine 2π -periodische, stetige und stückweise glatte Funktion. Seien a_n, b_n und c_n die Fourier-Koeffizienten von f und seien a'_n, b'_n und c'_n die entsprechenden Fourier-Koeffizienten von f' . Dann gilt

$$a'_n = nb_n, \quad b'_n = -na_n, \quad c'_n = inc_n.$$

Beweis. Zum Beispiel,

$$c'_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(\theta) e^{-in\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} f(\theta) e^{-in\theta} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) (-ine^{-in\theta}) d\theta.$$

Der erste Term rechts verschwindet, weil $f(-\pi) = f(\pi)$ und $e^{in\pi} = e^{-in\pi} = (-1)^n$, und der zweite Term ist inc_n . Das Argument für a'_n und b'_n ist dasselbe. \square

Satz II.2.14. Sei f eine 2π -periodische, stetige und stückweise glatte Funktion, und nehme auch an, dass f' stückweise glatt ist. Falls

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} = \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

die Fourier-Reihe von $f(\theta)$ ist, dann ist $f'(\theta)$ die Summe der abgeleiteten Reihen

$$\sum_{-\infty}^{\infty} inc_n e^{in\theta} = \sum_1^{\infty} (nb_n \cos n\theta - na_n \sin n\theta)$$

für alle θ , bei denen $f'(\theta)$ existiert. An den Ausnahmepunkten, an denen f' Sprünge hat, konvergiert die Reihe gegen $\frac{1}{2} [f'(\theta-) + f'(\theta+)]$

Beweis. Da f' stückweise glatt ist, ist es nach Satz 2.1 an jedem Punkt die Summe seiner Fourier-Reihen (mit entsprechenden Modifikationen an den Sprüngen). Nach Satz 2.2 sind die Koeffizienten von $e^{in\theta}$, $\cos n\theta$ und $\sin n\theta$ in dieser Reihe inc_n , nb_n und $-na_n$, was zu beweisen war. \square

Wir müssen bedenken, dass das unbestimmte Integral einer periodischen Funktion möglicherweise nicht periodisch ist. Beispielsweise ist die konstante Funktion $f(\theta) = 1$ periodisch, ihre Stammfunktion $F(\theta) = \theta$ jedoch nicht. Allerdings ist das Integral jedes Glieds in einer Fourier-Reihe periodisch, mit Ausnahme des konstanten Glieds, woraus wir sehen, dass eine periodische Funktion genau dann ein periodisches Integral hat, wenn das konstante Glied in ihrer Fourier-Reihe verschwindet, d. h. wenn ihr Mittelwert auf $[-\pi, \pi]$ Null ist. Wir kommen daher zu folgendem Ergebnis:

Satz II.2.15. Sei f eine 2π -periodische und stückweise stetige Funktion, mit Fourier-Koeffizienten a_n, b_n, c_n , und sei $F(\theta) = \int_0^{\theta} f(\phi) d\phi$. Wenn $c_0 (= \frac{1}{2}a_0) = 0$, dann haben wir für alle θ

$$F(\theta) = C_0 + \sum_{n \neq 0} \frac{c_n}{in} e^{in\theta} = \frac{1}{2} A_0 + \sum_1^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} \sin n\theta - \frac{b_n}{n} \cos n\theta \right)$$

wobei der konstante Term der Mittelwert von F auf $[-\pi, \pi]$ ist:

$$C_0 = \frac{1}{2}A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\theta) d\theta$$

Die Reihe rechts von (2.18) ist die Reihe, die man durch formale Integration der Fourier-Reihe von f Term für Term erhält, unabhängig davon, ob die letztere Reihe tatsächlich konvergiert oder nicht. Wenn $c_0 \neq 0$ ist, ist die Summe der Reihen rechts von (2.18) gleich $F(\theta) - c_0\theta$.

Beweis. Die Funktion F ist stetig und stückweise glatt, da es das Integral einer stückweise stetigen Funktion ist. Wenn außerdem $c_0 = 0$ ist, ist F 2π -periodisch,

$$F(\theta + 2\pi) - F(\theta) = \int_{\theta}^{\theta+2\pi} f(\phi) d\phi = \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) d\phi = 2\pi c_0 = 0.$$

Daher ist nach Satz 2.1, $F(\theta)$ die Summe seiner Fourier-Reihen bei jedem θ . Aber durch Satz 2.2, angewendet auf F , sind die Fourier-Koeffizienten A_n, B_n und C_n von F mit denen von f verwandt

$$A_n = -\frac{b_n}{n}, \quad B_n = \frac{a_n}{n}, \quad C_n = \frac{c_n}{in} \quad (n \neq 0)$$

Die Formel (2.19) für die Konstante C_0 bzw. $\frac{1}{2}A_0$ ist nur die übliche Formel für den nullten Fourier-Koeffizienten von F . Wenn $c_0 \neq 0$ ist, können diese Argumente auf die Funktion $f(\theta) - c_0$ anstatt auf $f(\theta)$ angewendet werden, was die endgültige Behauptung ergibt. \square

Gleichmäßige Konvergenz

Satz 2.1 gab Bedingungen an, unter denen die Fourier-Reihe von f punktweise gegen f konvergiert. Die Erfahrung bei der Arbeit mit unendlichen Reihen lehrt uns jedoch, dass die einfache punktweise Konvergenz einer Reihe eine knifflige Angelegenheit sein kann und dass wir viel besser dran sind, wenn die Konvergenz absolut und gleichmäßig ist. Wir erinnern uns an die Definitionen: Angenommen, die Reihe $\sum_1^{\infty} g_n(x)$ konvergiert auf einer Menge S gegen $g(x)$. Die Konvergenz ist *absolut*, wenn die Reihe $\sum_1^{\infty} |g_n(x)|$ auch für $x \in S$ konvergiert, und *uniform*, wenn über die ganze Menge S :

$$\sup_{x \in S} \left| g(x) - \sum_1^N g_n(x) \right| \rightarrow 0 \quad \text{as } N \rightarrow \infty.$$

Das nützlichste Kriterium zur Gewährleistung absoluter und gleichmäßiger Konvergenz ist der Weierstraß M -Test: D.h., ob es eine Folge M_n von positiven Konstanten gibt, so dass

$$|g_n(x)| \leq M_n \quad \text{für } x \in S, \quad \text{und} \quad \sum_1^{\infty} M_n < \infty$$

dann ist die Reihe $\sum_1^{\infty} g_n(x)$ absolut und gleichmäßig konvergent. Im Fall von Fourier-Reihen haben wir die offensichtlichen Schätzungen

$$|a_n \cos n\theta| \leq |a_n|, \quad |b_n \sin n\theta| \leq |b_n|, \quad |c_n e^{in\theta}| = |c_n|.$$

Daher gilt der Weierstrass M -Test für eine Fourier-Reihe in trigonometrischer Form, wenn $\sum_0^{\infty} |a_n| < \infty$ und $\sum_1^{\infty} |b_n| < \infty$, und zu einer Fourier-Reihe in Exponentialform, wenn $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$. Denn aus den Gleichungen (2.3) und (2.4) zu a_n, b_n und c_n folgt, dass

$$|c_n| \leq |a_n| + |b_n|, \quad |a_n| \leq |c_n| + |c_{-n}|, \quad |b_n| \leq |c_n| + |c_{-n}|,$$

die Bedingungen $\sum_0^{\infty} |a_n| < \infty$ und $\sum_1^{\infty} |b_n| < \infty$ sind vollständig äquivalent zur Bedingung $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$. Wir stellen nun eine hinreichende (aber nicht notwendige) Bedingung vor, die sie erfüllen müssen.

Satz II.2.16. *Wenn f 2π -periodisch, stetig und stückweise glatt ist, dann konvergiert die Fourier-Reihe von f absolut und gleichmäßig auf \mathbb{R} gegen f .*

II. Fourier Reihen

Beweis. Nach Satz 2.1 und den eben gemachten Bemerkungen genügt es zu zeigen, dass die Reihe $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|$ konvergiert. Sei c'_n die Fourier-Koeffizienten von f' . Nach Satz 2.2 wissen wir, dass $c_n = (in)^{-1}c'_n$ für $n \neq 0$, und nach der auf f angewendeten Besselschen Ungleichung,

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c'_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(\theta)|^2 d\theta < \infty.$$

Daher gilt nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n| = |c_0| + \sum_{n \neq 0} \left| \frac{c'_n}{n} \right| \leq |c_0| + \left(\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{n \neq 0} |c'_n|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

□

Gibbssches Phänomen

Wir bemerken, dass die N -te Teilsumme der Fourier-Reihe stetig ist. Wir erinnern uns an Analysis I oder Analysis II, dass ein gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen wieder eine stetige Funktion ist. Das impliziert, dass Fourier-Reihen, die gleichmäßig konvergieren, zu einer stetigen Funktion konvergieren müssen.

Andererseits möchten wir in vielen Anwendungen eine nicht stetige Funktion mit Hilfe von Fourier-Reihen annähern – Beispiele sind Bilder, Signale oder sogar Dichten von Geweben in der MRT. Daher wird es interessant sein zu sehen, wie genau die Fourier-Reihen Funktionen in der Nähe eines Diskontinuitätspunktes approximieren. Interessanterweise, erzeugt die N -te partielle Fourier-Reihe der Funktion große Spitzen um den Diskontinuitätspunkt, der die Werte der Funktion über- und unterschneidet. Das Verhalten hat einen eigenen Namen und wird als Gibbs-Phänomen bezeichnet.

Wir zeigen das Phänomen nur für die folgende Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi-x}{2\pi}, & 0 < x < \pi \\ -\frac{\pi+x}{2\pi}, & -\pi < x < 0. \end{cases}$$

Diese Funktion ist an einem Punkt $x = 0$ nicht stetig und hat bei $x = 0$ einen Sprung gleich 1:

$$\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} - \lim_{x \rightarrow 0^-} \right) f(x) = 1.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{-i}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi-x}{2\pi} \sin nx dx \\ &= \frac{-i}{2n\pi}, \end{aligned}$$

d.h.,

$$S_N f(x) = \frac{1}{\pi} \left[\sin x + \dots + \frac{\sin Nx}{N} \right].$$

Die Ableitung von $S_N f(x)$ fällt fast mit dem Dirichlet-Kern zusammen:

$$\begin{aligned} (S_N f)'(x) &= \frac{1}{\pi} [\cos x + \dots + \cos Nx] \\ &= \frac{1}{2\pi} (D_N(x) - 1), \end{aligned}$$

und es gilt

$$S_N f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^x [D_N(t) - 1] dt = \frac{-x}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_0^x \frac{\sin(N+1/2)t}{\sin(t/2)} dt.$$

Wir definieren $g(t) := 1/\sin(t/2) - 2/t$ und bemerken, dass $g(t) \in C^1([0, \pi])$. Dann ist

$$\int_0^x g(t) \sin \left(N + \frac{1}{2} \right) t dt = O \left(\frac{1}{N} \right), \quad N \rightarrow \infty$$

gleichmässig für $x \in [0, \pi]$ und es gilt

$$S_N f(x) = \frac{-x}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{t} dt + O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Es gilt für $0 < x < \pi$:

$$\lim_N S_N f(x) = \frac{-x}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{-x}{2\pi} + \frac{1}{2} = f(x).$$

Um das Verhalten zu untersuchen, wenn $x \rightarrow 0$ ist, bemerken wir, dass

$$\sup_{0 \leq x \leq \pi} \left[S_N f(x) + \frac{x}{2\pi} \right] \leq \frac{1}{2} \sup_{0 \leq x < \infty} \text{Si}(x) + O\left(\frac{1}{N}\right) = \frac{1}{2} \text{Si}(\pi) + O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Der Ausdruck schränkt die Schwankungen der Partialsummen nach oben ein. Wenn andererseits $x_N \rightarrow 0$ ist, so dass $Nx_N \rightarrow \pi$, dann gilt

$$\lim_N S_N f(x_N) = \lim_N \frac{1}{\pi} \int_0^{(N+\frac{1}{2})x_N} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{1}{2} \text{Si}(\pi).$$

Wir erhalten:

Lemma II.2.17. Die Menge der Häufungspunkte der Partialsummen $S_N f(x_N)$, wenn $N \rightarrow \infty, x_N \rightarrow 0$ mit $0 \leq x_N \leq \pi$, wird wie folgt beschrieben:

$$\limsup_N S_N f(x_N) \leq \frac{1}{2} \text{Si}(\pi) = 0,59 \dots$$

Wenn $x_N \rightarrow 0$, so dass $Nx_N \rightarrow \pi$, dann

$$\lim_N S_N f(x_N) = \frac{1}{2} \text{Si}(\pi).$$

Inbesondere ist jeder Punkt im Intervall $[0, \frac{1}{2} \text{Si}(\pi)]$ ein Häufungspunkt von Partialsummen $S_N f(x_N)$ wenn $N \rightarrow \infty, x_N \rightarrow 0$.

Beweis. Die ersten beiden Aussagen haben wir oben gezeigt. Wir wenden für die letzte Aussage den Zwischenwertsatz auf die stetige Funktion $S_N f$ an.

Die Zahl $\frac{1}{2} \text{Si}(\pi) - \frac{1}{2} = .09 \dots$ heißt Überschwinger der Partialsummen in der rechten Umgebung von $x = 0$. Wir werden weiter unten zeigen, dass wir für jede Funktion mit beschränkter Variation mit $f(x+0) > f(x-0)$ das Überschwingen in einer rechten Umgebung von x diskutieren können, definiert als $\limsup_N \text{jump}_N \rightarrow x$ $\text{jump } f(x+0) - f(x-0)$.

Der numerische Wert von $\text{Si}(\pi) = 1,18 \dots$ kann berechnet werden, indem $\sin t/t$ in eine Taylorreihe expandiert und Term für Term integriert wird. Dies erfolgt in Abschnitt 2.3.3. \square

Abklingrate von Fourier-Koeffizienten und die Differenzierbarkeitseigenschaften der ursprünglichen Funktion

Kehren wir zu Theorem II.2.14 zurück. Wenn f viele Ableitungen hat, kann Satz II.2.14 mehrmals hintereinander angewendet werden, um die Fourier-Reihe von f', f'', f''' zu berechnen usw. Jedes Mal, wenn man eine Ableitung bildet, erhöht sich der Betrag der Fourier-Koeffizienten c_n (bzw. a_n und b_n) um den Faktor $|n|$. Das bedeutet, dass die abgeleitete Reihe langsamer konvergiert als die ursprüngliche Reihe. Oder anders ausgedrückt: Wenn die abgeleitete Reihe überhaupt konvergiert, muss die ursprüngliche Reihe relativ schnell konvergieren. Es besteht also ein Zusammenhang zwischen den Differenzierbarkeitseigenschaften einer Funktion und der Konvergenzrate ihrer Fourier-Reihe. Hier ist ein genaues Ergebnis:

Lemma II.2.18. Sei f eine 2π -periodische Funktion. Wenn f von der Klasse $C^{(k-1)}$ ist und $f^{(k-1)}$ stückweise glatt ist*, dann gilt

$$\sum |n^k a_n|^2 < \infty, \quad \sum |n^k b_n|^2 < \infty, \quad \sum |n^k c_n|^2 < \infty.$$

*d.h., $f^{(k)}$ existiert außer an endlich vielen Punkten in jedem beschränkten Intervall und ist stückweise stetig

II. Fourier Reihen

Dies impliziert, dass $\exists C > 0$ und $\alpha > 1$ mit

$$n^k a_n \rightarrow 0, \quad n^k b_n \rightarrow 0, \quad n^k c_n \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Nehmen wir andererseits an, dass die Fourier-Koeffizienten c_n erfüllen

$$|c_n| \leq C|n|^{-(k+\alpha)}, \quad n \neq 0$$

(entsprechend $|a_n| \leq Cn^{-(k+\alpha)}$ und $|b_n| \leq Cn^{-(k+\alpha)}$). Dann gehört f zur Klasse $C^{(k)}$.

Beweis. Für den ersten Teil wenden wir Theorem II.2.14 k mal an, um daraus zu schließen, dass die Fourier-Koeffizienten $c_n^{(k)}$ von $f^{(k)}$ gegeben sind durch $c_n^{(k)} = (in)^k c_n$, und analog für $a_n^{(k)}$ und $b_n^{(k)}$. Die Schlussfolgerungen folgen dann aus der Besselschen Ungleichung (angewandt auf $f^{(k)}$) und ihrer Folgerung.

Für den zweiten Teil beobachten wir, dass $\exists \alpha > 1$,

$$\sum_{n \neq 0} |n^j c_n| \leq C \sum_{n \neq 0} |n|^{-(k-j+\alpha)} \leq 2C \sum_{n > 0} n^{-\alpha} < \infty \quad \text{für } j \leq k$$

Nach dem M -Test von Weierstraß konvergiert also die Reihe $\sum_{-\infty}^{\infty} (in)^j c_n e^{in\theta}$ absolut und gleichmäßig für $j \leq k$. Sie definieren daher stetige Funktionen, die die Ableitungen $f^{(j)}$ von $f(\theta) = \sum c_n e^{in\theta}$ sind. \square

II.2.2. Wellengleichung

II.2.3. $2l$ -periodische Funktionen

Sei $f(x)$ eine periodische Funktion mit der Periode $2l$. (Der Faktor 2 ist nur für die Bequemlichkeit.) Wir nehmen eine Substitution der Variablen vor

$$x = \frac{l\theta}{\pi}, \quad g(\theta) = f(x) = f\left(\frac{l\theta}{\pi}\right).$$

Die Funktion g ist 2π -periodisch. Wenn sie stückweise glatt ist, können wir g in eine Fourier-Reihe entwickeln:

$$g(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) e^{-in\theta} d\theta.$$

Setzen wir nun in diese Formeln $\theta = \pi x/l$ ein, so erhalten wir die $2l$ -periodische Fourierreihe der ursprünglichen Funktion f :

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/l}, \quad c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-in\pi x/l} dx.$$

Die entsprechende Formel in Bezug auf Kosinus und Sinus lautet

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right],$$

wobei

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

II.2.4. Wärmeleitung

An dieser Stelle sind wir bereit, die Lösungen der in erster Vorlesung besprochenen Randwertprobleme zu vervollständigen. Wir möchten den Wärmefluss auf einem Intervall $[0, l]$ beschreiben, wobei die Anfangstemperatur $f(x)$ ist und die Endpunkte auf Temperatur Null gehalten werden,

$$u_t = k u_{xx}, \quad u(x, 0) = f(x), x \in [0, l], \quad u(0, t) = u(l, t) = 0$$

für $t > 0$ und wir haben folgende Reihe als Lösungskandidaten hergeleitet:

$$u(x, t) = \sum_1^{\infty} b_n \exp\left(\frac{-n^2 \pi^2 kt}{l^2}\right) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

wobei f stetig und stückweise glatt ist und

$$f(x) = \sum_1^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Die Fragen, die wir offen ließen, waren:

- (i) Kann die Anfangstemperatur f als eine solche Sinusreihe ausgedrückt werden?
- (ii) Definiert diese Formel für u tatsächlich eine Lösung der Wärmeleichung mit den gegebenen Randbedingungen?

Die zweite Frage haben wir in der Hausaufgabe beantwortet. Um die erste zu beantworten, müssen wir die Funktion f so auf das Intervall $[-l, l]$ erweitern, dass sie eine ungerade Funktion wird.

$$h(x) := \begin{cases} f(x), & x \in (0, l), \\ 0, & x = 0 \text{ oder } x = l, \\ -f(x), & x \in (-l, 0). \end{cases}$$

Wenn f stetig und stückweise glatt auf $[0, l]$ und $f(0) = f(l) = 0$ ist, dann ist die ungerade periodische Erweiterung, h , von f stetig und stückweise glatt, und die Fourier-Reihen von h enthalten nur die Sinusterme. Die Fourier-Koeffizienten von h ergeben aus obiger Formel b_n , weil für alle $x \in [0, l]$ gilt:

$$f(x) = h(x) = \sum_1^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Genau die gleichen Überlegungen gelten für das Problem des Wärmeflusses auf $[0, l]$ mit isolierten Endpunkten,

$$u_t = ku_{xx}, \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0.$$

Dessen Lösung ist

$$u(x, t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_1^{\infty} a_n \exp\left(\frac{-n^2\pi^2 kt}{l^2}\right) \cos \frac{n\pi x}{l},$$

wobei

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_1^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}.$$

Kann die Anfangstemperatur f als eine solche Kosinusreihe ausgedrückt werden? Um diese Frage zu beantworten, müssen wir die Funktion f so auf das Intervall $[-l, l]$ erweitern, dass sie eine gerade Funktion wird.

$$h(x) := \begin{cases} f(x), & x \in [0, l], \\ f(-x), & x \in [-l, 0]. \end{cases}$$

Die Fourier-Koeffizienten von h ergeben aus obiger Formel a_n , weil für alle $x \in [0, l]$ gilt:

$$f(x) = h(x) = a_0/2 + \sum_1^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}.$$

Lassen Sie uns einen Moment innehalten, um zu sehen, was uns diese Lösungen über die Physik der Situation sagen. Im Grenzfall $t \rightarrow \infty$ verschwinden alle Exponentialfaktoren, also die Lösung u nähert sich einer Konstanten: Nämlich, 0 im ersten und $a_0/2$ im zweiten Fall. Im ersten Fall kommt der Stab in ein thermisches Gleichgewicht mit seiner Umgebung. Im zweiten Fall sehen wir, dass die Grenztemperatur $a_0/2$ einfach der Mittelwert der Anfangstemperatur ist:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l h(x) dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx.$$

Mit anderen Worten, es tritt keine Wärme in den Stab ein und es geht keine Wärme verloren, also die verschiedenen Teile die Intervalle kommen einfach in ein thermisches Gleichgewicht miteinander.

II.2.5. Wellengleichung

Wenden wir uns nun noch einmal dem Problem der schwingenden Saite zu:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad u(0, t) = u(l, t) = 0$$

Gemäß der Diskussion in der ersten Vorlesung sollten wir f und g in ihre Fourier-Sinusreihe entwickeln,

$$f(x) = \sum_1^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad g(x) = \sum_1^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

und dann ist

$$u(x, t) = \sum_1^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} \left(b_n \cos \frac{n\pi ct}{l} + \frac{lB_n}{n\pi c} \sin \frac{n\pi ct}{l} \right).$$

Hier ist die Analyse subtiler als bei der Wärmeleitung. Wenn wir zweimal nach x oder t differenzieren, um die Wellengleichung zu verifizieren, führen wir einen Faktor von n^2 ein und das kann durchaus ausreichen, um die Konvergenz zu zerstören. Wir können diese Schwierigkeit vermeiden. Nehmen wir zum Beispiel an, dass f und g zur Klasse $C^{(3)}$ und $C^{(2)}$ gehören. Dann gilt es

$$|b_n| \leq Cn^{-4}, \quad |B_n| \leq Cn^{-3}$$

und

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\dots) \right| \leq Cn^{-2}, \quad \left| \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\dots) \right| \leq Cn^{-2}.$$

Der M-Test impliziert die absolute und gleichmäßige Konvergenz der zweimal abgeleitete Reihe. Damit ist u tatsächlich die Lösung der Wellengleichung.

II.3. Vergleich mit Taylor-Reihen

Vielleicht die bekannteste und am weitesten verbreitete Art der unendlichen Reihenentwicklung für Funktionen ist die Taylor-Reihe, und es ist interessant, die Merkmale von Taylorreihen und Fourierreihen zu vergleichen.

Damit eine Funktion $f(x)$ eine Taylorentwicklung um einen Punkt x_0 hat, muss die Funktion an diesem Punkt Ableitungen aller Ordnungen haben. Die Koeffizienten der Taylor Reihen werden durch diese Ableitungen und damit durch die Werte von f in beliebig kleine Nachbarschaft von x_0 bestimmt. Die Wachstumsrate dieser Koeffizienten oder "Zerfall" beziehen sich auf dem Konvergenzradius der Reihe. Sie hängt mit der Abstand von x_0 zur nächsten Singularität von f (in der komplexen Ebene) zusammen. Im Allgemeinen bieten die Partialsummen der Taylor-Reihen hervorragende Annäherungen an f in der Nähe von x_0 . Sie sind aber oft von geringem Nutzen, wenn $|x - x_0|$ groß ist.

Im Gegensatz dazu braucht eine Funktion f nur minimale Glattheitseigenschaften, um eine konvergente Fourierreihenentwicklung zu haben. Die Koeffizienten dieser Reihe hängen von den Werten von f über das gesamte Intervall ab. Die Geschwindigkeit, mit der sie als $n \rightarrow \infty$ abfallen, hängt mit der Differenzierbarkeit von f zusammen. Die Partialsummen des Fouriers Reihen werden nur ziemlich langsam gegen f konvergieren, wenn f nicht sehr glatt ist, aber sie tendieren zu f um gute Annäherungen über das gesamte Intervall.

Taylor-Reihen und Fourier-Reihen sind also von ganz verschiedener Natur: die Erste ist eng mit den lokalen Eigenschaften von f in der Nähe von x_0 verbunden, während die Zweite sich auf globale Eigenschaften von f bezieht.

Es gibt jedoch eine Situation in wo Beides als Aspekte der selben Sache angesehen werden können. Sei f eine analytische Funktion der komplexen Variablen z im $|z - z_0| < R$. Wir führen die Polarkoordinaten ein:

$$z - z_0 = re^{i\theta}.$$

Die Taylor-Reihe für f um z_0 wird zu einer Fourier-Reihe in θ für jedes feste $r < R$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n r^n) e^{in\theta}.$$

Dann ist – interessanterweise – die Formel für die Fourier-Koeffizienten genau die Cauchy-Integralformel für die Ableitungen von f bei z_0 !

III. Orthogonale Mengen von Funktionen

Wir betrachten den Raum $PC(a, b)$ von stückweise stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$. Wir definieren das Skalarprodukt und die Norm auf $PC(a, b)$ wie folgt:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx, \quad \|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Dieses Skalarprodukt von Funktionen erfüllt offenbar die Linearitäts- und Symmetrie Eigenschaften, und es ist mit der Norm durch die Gleichung $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ verbunden. Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung, die Dreiecksungleichung und der Satz des Pythagoras gilt. Die Homogenitätseigenschaft der Norm, d.h. $\|cf\| = |c| \cdot \|f\|$, ist eindeutig gültig, aber es gibt ein kleines Problem mit der Positivität der Norm. Nämlich,

$$\|f\| = 0 \not\Rightarrow f \equiv 0.$$

Die Konzepte orthogonaler und orthonormaler Funktionensätze werden genauso definiert wie für Vektoren in \mathbb{C}^k , und wir können fragen: Sei $\{\psi_n\}_n$ eine orthonormale Menge in $PC(a, b)$. Können wir ein beliebige Funktion f als $\sum_n \langle f, \psi_n \rangle \psi_n$ ausdrücken? Die Summe ist unendlich, also müssen wir uns um die Konvergenz kümmern.

Sei $\phi_n \in PC(-\pi, \pi)$, sodass

$$\phi_n(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{inx}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

dann ist

$$\langle \phi_m, \phi_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} \overline{e^{inx}} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x} dx = \begin{cases} 1 & \text{für } m = n \\ 0 & \text{für } m \neq n. \end{cases}$$

Dann ist $\{\phi_n\}_{-\infty}^{\infty}$ eine orthogonale Menge. Sei

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{e^{inx}} dx = (2\pi)^{-1/2} \langle f, \phi_n \rangle$$

und damit gilt

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \sum_{-\infty}^{\infty} \left[(2\pi)^{-1/2} \langle f, \phi_n \rangle \right] \left[(2\pi)^{1/2} \phi_n(x) \right] = \sum_{-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x).$$

Die Fourier-Reihe von f ist also nur ihre Erweiterung bezüglich der orthonormalen Menge $\{\phi_n\}$!

III.1. Konvergenz und Vollständigkeit

Definition III.1.1. Wir sagen, dass $f_n \rightarrow f$ *normal konvergiert*, wenn $\|f - f_n\| \rightarrow 0$.

Wir stellen fest, dass normale Konvergenz eine punktweise Konvergenz nicht impliziert, und punktweise Konvergenz eine Konvergenz in der Norm nicht impliziert.

Beispiel III.1.2. Sei

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1/n, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

dann ist

$$\|f_n\|^2 = \int_0^1 |f_n(x)|^2 dx = \frac{1}{n},$$

und $f_n \rightarrow 0$ konvergiert normal, aber $f_n(0) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann $f_n \not\rightarrow 0$ punktweise.

III. Orthogonale Mengen von Funktionen

Beispiel III.1.3. Sei

$$g_n(x) = \begin{cases} n, & 0 < x < 1/n, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

dann konvergiert $g_n \rightarrow 0$ punktweise, aber

$$\|g_n\|^2 = \int_0^1 |g_n(x)|^2 dx = \int_0^{1/n} n^2 dx = n,$$

dann $g_n \not\rightarrow 0$ normal.

$PC(a, b)$ versagt in einer entscheidenden Hinsicht als gutes unendlichdimensionales Analogon des euklidischen Raums, weil es nicht vollständig ist. Das bedeutet intuitiv, dass es Folgen gibt, die so aussehen, als müssten sie in der Norm konvergieren, die aber keine Grenze im Raum $PC(a, b)$ haben. Die formale Definition lautet wie folgt. Eine Folge $\{\mathbf{a}_n\}_1^\infty$ von Vektoren heißt Cauchy-Folge, wenn $\|a_m - a_n\| \rightarrow 0$ wenn $m, n \rightarrow \infty$. Ein Raum S von Vektoren heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge in S einen Grenzwert in S hat.

Lemma III.1.4. $PC(a, b)$ ist nicht vollständig.

Beweis. Sei $[a, b] = [0, 1]$ und sei

$$f_n(x) = \begin{cases} x^{-1/4}, & x > 1/n, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist

$$\|f_m - f_n\|^2 = \int_{1/m}^{1/n} x^{-1/2} dx = 2(n^{-1/2} - m^{-1/2}) \rightarrow 0$$

für $m, n \rightarrow \infty$. Dann ist $\{f_n\}$ eine Cauchy Folge, und

$$f_n \rightarrow f := \begin{cases} x^{-1/4}, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

aber $f \notin PC(a, b)$. □

Glücklicherweise gibt es eine Integrationstheorie, die es erlaubt mit höchst unregelmäßigen Funktionen umzugehen. Funktionen Theorie erfordert eine Bedingung namens Messbarkeit, aber diese Formalität braucht uns nicht zu interessieren*.

Wir bezeichnen mit $L^2(a, b)$ den Raum der quadratintegrierbaren Funktionen auf $[a, b]$, also die Menge aller Funktionen auf $[a, b]$, deren Quadrate absolut Lebesgue-integrierbar über $[a, b]$ sind:

$$L^2(a, b) := \left\{ f : \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty \right\}.$$

Wir können das Skalarprodukt und die Norm wie zuvor definieren. Es gilt

$$s^2 + t^2 - 2st = (s - t)^2 \geq 0 \implies st \leq \frac{1}{2} (s^2 + t^2),$$

damit ist

$$|f(x)\overline{g(x)}| \leq \frac{1}{2} (|f(x)|^2 + |g(x)|^2)$$

und wenn f und g in $L^2(a, b)$ sind, ist das Integral

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)} dx$$

absolut konvergent.

*Für die Zwecke dieser Vorlesung gehen wir davon aus, dass alle Funktionen, mit denen wir uns befassen, messbar sind: dieser Raum umfasst; z.B. alle Funktionen, für die das (möglicherweise uneigentliche) Riemann-Integral $\int_a^b |f(x)|^2 dx$ konvergiert.

Wie im Raum $PC(a, b)$ gibt es ein kleines Problem mit der Positivität der Norm, da die Bedingung $\int |f|^2 = 0$ nicht impliziert, dass f identisch verschwindet aber nur, dass $f = 0$ "fast überall" ist. Die genaue Interpretation dieses Satzes ist wie folgt. Eine Teilmenge E von \mathbb{R} hat das Maß Null, wenn für jedes $\epsilon > 0$ von einer Folge offener Intervalle überdeckt werden kann, deren Gesamtlänge kleiner als ϵ ist*. Das heißt, wenn es offene Intervalle I_1, I_2, \dots der Längen l_1, l_2, \dots gibt, so dass $E \subset \bigcup_1^\infty I_j$ und $\sum_1^\infty l_j < \epsilon$ ist. Eine Aussage über reelle Zahlen, die für alle x gilt, außer für die x in einer Reihe von Maßen Null, wird als *fast überall wahr* bezeichnet, oder für *fast alle x wahr*.

Die Haupteigenschaften von $L^2(a, b)$, die wir ohne Beweis angeben müssen, sind im folgenden Satz enthalten:

Satz III.1.5. (i) $L^2(a, b)$ ist vollständig bezüglich Konvergenz in der Norm.

(ii) Für jedes $f \in L^2(a, b)$ gibt es eine Folge f_n stetiger Funktionen auf $[a, b]$, so dass $f_n \rightarrow f$ in der Norm konvergiert. Tatsächlich können die Funktionen f_n als Beschränkungen für $[a, b]$ von Funktionen angesehen werden, die Ableitungen aller Ordnungen an jedem Punkt besitzen; außerdem können letztere Funktionen als $(b - a)$ -periodisch angesehen werden oder außerhalb einer beschränkten Menge verschwinden. □

Dieser Satz besagt, dass $L^2(a, b)$ durch „Ausfüllen der Löcher“ in $PC(a, b)$ erhalten wird. Der erste Teil sagt, dass alle Löcher gefüllt wurden, und der zweite Teil sagt, dass es nichts über die Vollendung von $PC(a, b)$ hinaus gab.

Wir sind nun bereit, die Konvergenz von Entwicklungen bezüglich orthonormaler Mengen in $L^2(a, b)$ zu diskutieren. Der erste Schritt besteht darin, die allgemeine Form der Besselschen Ungleichung zu erhalten, die eine einfache Verallgemeinerung des Spezialfalls ist, den wir früher bewiesen haben.

Lemma III.1.6. Wenn $\{\phi_n\}_1^\infty$ eine orthonormale Menge in $f \in L^2(a, b)$, dann

$$\sum_1^\infty |\langle f, \phi_n \rangle|^2 \leq \|f\|^2.$$

Beweis. Hausaufgabe. □

Wir beschäftigen uns nun mit folgendem Problem: sei $\{\phi_n\}_1^\infty$ in $L^2(a, b)$ eine orthonormale Menge. Ist es wahr dass

$$f = \sum_1^\infty \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \tag{III.1}$$

für alle $f \in L^2(a, b)$? Zuerst vergewissern wir uns, dass die Reihe auf der rechten Seite konvergiert.

Lemma III.1.7. Wenn $f \in L^2(a, b)$ und $\{\phi_n\}$ eine beliebige orthonormale Menge in $L^2(a, b)$ ist, dann konvergiert die Reihe $\sum \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$ in Norm, und $\|\sum \langle f, \phi_n \rangle \phi_n\| \leq \|f\|$.

Beweis. Die Besselsche Ungleichung garantiert, dass die Reihe $\sum |\langle f, \phi_n \rangle|^2$ konvergiert, also nach dem Satz des Pythagoras,

$$\left\| \sum_m^n \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \right\|^2 = \sum_m^n |\langle f, \phi_n \rangle|^2 \rightarrow 0 \quad \text{as } m, n \rightarrow \infty.$$

Somit bilden die Partialsummen der Reihen $\sum \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$ eine Cauchy-Folge, und da $L^2(a, b)$ vollständig ist, konvergiert die Reihe. Schließlich ergibt eine weitere Anwendung des Satzes von Pythagoras und der Besselschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \left\| \sum_1^\infty \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \right\|^2 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \sum_1^N \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \right\|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_1^N |\langle f, \phi_n \rangle|^2 \\ &= \sum_1^\infty |\langle f, \phi_n \rangle|^2 \leq \|f\|^2. \end{aligned}$$

□

*Zum Beispiel hat jede abzählbare Menge das Maß Null: Wenn $E = \{x_1, x_2, \dots\}$, sei I_j das Intervall der Länge $\epsilon/2^j$ zentriert bei x_j .

III. Orthogonale Mengen von Funktionen

Nun ist eine offensichtliche notwendige Bedingung, damit (III.1) für beliebiges f gilt, dass die orthonormale Menge $\{\phi_n\}$ so groß wie möglich ist, also dort kein f ungleich Null ist, das orthogonal zu allen ϕ_n ist. (Wenn $\langle f, \phi_n \rangle = 0$ für alle n , dann impliziert (3.21), dass $f = 0$.) Mit diesen Gedanken kommen wir zum Hauptsatz.

Satz III.1.8. Sei $\{\phi_n\}_1^\infty$ eine orthonormale Menge in $L^2(a, b)$. Die folgenden Bedingungen sind gleichwertig:

- (i) Wenn $\langle f, \phi_n \rangle = 0$ für alle n , dann ist $f = 0$.
- (ii) Für jedes $f \in L^2(a, b)$ gilt $f = \sum_1^\infty \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$, wobei die Reihe in der Norm konvergiert.
- (iii) Für jedes $f \in L^2(a, b)$ gilt die Parseval-Gleichung:

$$\|f\|^2 = \sum_1^\infty |\langle f, \phi_n \rangle|^2.$$

Beweis. (i) impliziert (ii): Sei $f \in L^2(a, b)$, dann konvergiert die Reihe $\sum \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$ in der Norm, nach Lemma III.1.7. Es gilt

$$\left\langle f - \sum_{n=1}^\infty \langle f, \phi_n \rangle \phi_n, \phi_m \right\rangle = \langle f, \phi_m \rangle - \sum_{n=1}^\infty \langle f, \phi_n \rangle \langle \phi_n, \phi_m \rangle = \langle f, \phi_m \rangle - \langle f, \phi_m \rangle = 0$$

für alle m . Wenn also (a) gilt, ist $g = 0$.

(ii) impliziert (iii): Wenn $f = \sum \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$, dann gilt nach dem Satz des Pythagoras,

$$\|f\|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \sum_1^N \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \right\|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_1^N |\langle f, \phi_n \rangle|^2 = \sum_1^\infty |\langle f, \phi_n \rangle|^2.$$

(iii) impliziert (i): Wenn (iii) gilt und $\langle f, \phi_n \rangle = 0$ für alle n dann $\|f\| = 0$, und also $f = 0$. □

Eine Orthonormalmenge, die die Eigenschaften (a)-(c) von Satz (III.1.8) besitzt, heißt *vollständige Orthonormalmenge* oder *Orthonormalbasis* für $L^2(a, b)$. Wenn $\{\phi_n\}$ eine Orthonormalbasis von $L^2(a, b)$ und $f \in L^2(a, b)$ ist, die Zahlen $\langle f, \phi_n \rangle$ heißen die *(verallgemeinerten) Fourier-Koeffizienten* von f bezüglich $\{\phi_n\}$, und die Reihe $\sum \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$ heißt die *(verallgemeinerte) Fourier-Reihe* von f .

Satz III.1.9. Die Sätze

$$\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^\infty \quad \text{und} \quad \{\cos nx\}_{n=0}^\infty \cup \{\sin nx\}_{n=1}^\infty$$

sind orthogonale Basen für $L^2(-\pi, \pi)$.

Beweis. Betrachten Sie zunächst die Funktionen $\psi_n(x) = e^{inx}$. Sei $f \in L^2(-\pi, \pi)$ und sei ϵ eine (kleine) positive Zahl; wir wollen zeigen, dass die N -te Partialsumme der Fourier-Reihe von f in der Norm annähert, wenn N hinreichend groß ist. Nach Teil (b) von Satz III.1.5 können wir eine 2π -periodische Funktion \tilde{f} finden, die Ableitungen aller Ordnungen besitzt, so dass $\|f - \tilde{f}\| < \epsilon/3$. Seien $c_n = (2\pi)^{-1} \langle f, \psi_n \rangle$ und $\tilde{c}_n = (2\pi)^{-1} \langle \tilde{f}, \psi_n \rangle$ die Fourier-Koeffizienten von f und \tilde{f} . Wir wissen, dass die Fourier-Reihe $\sum \tilde{c}_n \psi_n$ gleichmäßig gegen \tilde{f} konvergiert; daher konvergiert sie in der Norm gegen \tilde{f} . Wenn wir also N ausreichend groß nehmen, haben wir

$$\left\| \tilde{f} - \sum_{-N}^N \tilde{c}_n \psi_n \right\| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Darüber hinaus gilt nach dem Satz des Pythagoras und der Besselschen Ungleichung

$$\left\| \sum_{-N}^N \tilde{c}_n \psi_n - \sum_{-N}^N c_n \psi_n \right\|^2 \leq \sum_{-N}^N |\tilde{c}_n - c_n|^2 \leq \sum_{-\infty}^\infty |\tilde{c}_n - c_n|^2 \leq \|\tilde{f} - f\|^2 < \left(\frac{\epsilon}{3}\right)^2.$$

Also, wenn wir schreiben

$$f - \sum_{-N}^N c_n \psi_n = (f - \tilde{f}) + \left(\tilde{f} - \sum_{-N}^N \tilde{c}_n \psi_n \right) + \left(\sum_{-N}^N \tilde{c}_n \psi_n - \sum_{-N}^N c_n \psi_n \right)$$

und die Dreiecksungleichung verwenden, erhalten wir

$$\left\| f - \sum_{-N}^N c_n \psi_n \right\| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Dies beweist die Vollständigkeit der Menge $\{\psi_n\} = \{e^{inx}\}$ in $L^2(-\pi, \pi)$, und die Vollständigkeit von $\{\cos nx\} \cup \{\sin nx\}$ ist im Wesentlichen eine Wiederholung desselben Methoden. \square

IV. Fouriertransformation

Bis zu diesem Punkt war das Hauptthema dieses Kurses die Theorie und Anwendung unendlicher Reihenentwicklungen, die verschiedene orthonormale Mengen von Funktionen beinhalten. Wir wenden uns nun dem Studium von Integraltransformationen zu, einer anderen, aber verwandten Sammlung von Techniken zum Analysieren von Funktionen und zum Lösen von Differentialgleichungen beschäftigen.

Die Fourier-Transformation bietet eine Möglichkeit, Funktionen auf der ganzen reellen Linie $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ als (kontinuierliche) Überlagerung der grundlegenden Schwingungsfunktionen $e^{i\xi x}$ ($\xi \in \mathbb{R}$) zu entwickeln. Lassen Sie uns zur Motivation ein paar formale Berechnungen durchführen.

Formale Berechnungen

Sei f ist eine Funktion auf \mathbb{R} . Für jedes $l > 0$ können wir f auf dem Intervall $[-l, l]$ in einer Fourier-Reihe erweitern, und wir wollen sehen, was mit dieser Erweiterung passiert, wenn wir $l \rightarrow \infty$ lassen. Dazu schreiben wir die Fourier-Entwicklung wie folgt: Für $x \in [-l, l]$ gilt

$$f(x) = \frac{1}{2l} \sum_{-\infty}^{\infty} c_{n,l} e^{i\pi n x/l}, \quad c_{n,l} = \int_{-l}^l f(y) e^{-i\pi n y/l} dy.$$

Seien $\Delta\xi = \pi/l$ und $\xi_n = n\Delta\xi = n\pi/l$; dann werden diese Formeln verwendet

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} c_{n,l} e^{i\xi_n x} \Delta\xi, \quad c_{n,l} = \int_{-l}^l f(y) e^{-i\xi_n y} dy$$

Nehmen wir an, dass $f(x)$ schnell verschwindet, da $x \rightarrow \pm\infty$; dann ändert sich $c_{n,l}$ nicht viel, wenn wir den Integrationsbereich von $[-l, l]$ auf $(-\infty, \infty)$ erweitern:

$$c_{n,l} \approx \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\xi_n y} dy$$

Dieses letzte Integral ist nur eine Funktion von ξ_n , die wir $\hat{f}(\xi_n)$ nennen, und wir haben sie jetzt

$$f(x) \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi_n) e^{i\xi_n x} \Delta\xi \quad (|x| < l).$$

Das sieht sehr nach einer Riemann-Summe aus. Wenn wir nun $l \rightarrow \infty$ lassen, so dass $\Delta\xi \rightarrow 0$, dann gilt:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi, \quad \text{wobei } \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

Die Berechnungen sind nur formal; trotzdem ist das Endergebnis unter geeigneten Bedingungen auf f korrekt, wie wir beweisen werden. Die Funktion \hat{f} heißt die Fourier-Transformation von f , und die obige Gleichung ist der Fourier-Inversionssatz.

IV.1. L^1 und L^2

Bevor wir fortfahren, legen wir einige Notationskonventionen fest. Wir werden es mit Funktionen zu tun haben, die auf der reellen Linie definiert sind, und die meisten unserer Integrale werden bestimmte Integrale über die ganze Linie sein. Außerdem wird L^2 immer $L^2(\mathbb{R})$ bedeuten, den Raum der quadratintegrierbaren Funktionen auf \mathbb{R} . Wir führen auch den Raum $L^1 = L^1(\mathbb{R})$ von (absolut) integrierbaren Funktionen auf \mathbb{R} ein:

$$L^1 = \left\{ f : \int |f(x)| dx < \infty \right\}.$$

IV. Fouriertransformation

(Hier sollte, wie bei L^2 , das Integral im Sinne von Lebesgue verstanden werden, aber dieser technische Punkt wird uns nicht weiter interessieren.) Wir bemerken, dass dies bei L^1 nicht der Fall ist eine Teilmenge von L^2 , noch ist L^2 eine Teilmenge von L^1 . Die Singularitäten einer Funktion sind schlechter als die einer Funktion in L^2 , da das Quadrieren einer großen Zahl diese größer macht; Andererseits müssen Funktionen in L^2 nicht so schnell ins Unendliche zerfallen wie die in L^1 , da das Quadrieren einer kleinen Zahl sie kleiner macht. Lassen Sie zum Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} x^{-2/3} & \text{für } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^{-2/3} & \text{für } x > 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist f in L^1 , aber nicht in L^2 , während g in L^2 , aber nicht in L^1 ist. Wir haben aber folgende nützliche Fakten:

(i) Wenn $f \in L^1$ und f beschränkt ist, dann ist $f \in L^2$. In der Tat,

$$|f| \leq M \implies |f|^2 \leq M|f| \implies \int |f(x)|^2 dx \leq M \int |f(x)| dx < \infty.$$

(ii) Wenn $f \in L^2$ und f außerhalb eines endlichen Intervalls $[a, b]$ verschwinden, dann ist $f \in L^1$. Dies folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\int |f(x)| dx = \int_a^b 1 \cdot |f(x)| dx \leq (b-a)^{1/2} \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty.$$

IV.1.1. Faltung

Bevor wir die Fourier-Transformation untersuchen, müssen wir das Faltungsprodukt zweier Funktionen vorstellen, eine Methode, das sowohl als theoretisches Werkzeug als auch in Anwendungen sehr nützlich sein wird. Diese Idee kann, für diejenigen, welche sie noch nie zuvor gesehen hat, ein wenig mysteriös erscheinen. Wenn f und g Funktionen auf \mathbf{R} sind, ist ihre *Faltung* die durch definierte Funktion $f * g$

$$f * g(x) = \int f(x-y)g(y)dy,$$

sofern das Integral existiert. Wir können f und g verschiedene Bedingungen auferlegen, um zu verifizieren, dass das Integral konvergiert.

(i) $f \in L^1$ und $|g| \leq M < \infty$:

$$\int |f(x-y)g(y)| dy \leq M \int |f(x-y)| dy = M \int |f(y)| dy < \infty.$$

(ii) $|f| \leq M, g \in L^1$

(iii) $f, g \in L^2$

(iv) $f, g \in L^1 \implies f * g(x)$ existiert fast überall.

Diese Liste ist erweiterbar. Im Folgenden nehmen wir implizit an, dass die Funktionen entsprechende Bedingungen erfüllen, damit alle Integrale, die in Frage kommen, absolut konvergieren.

Wir untersuchen nun die grundlegenden algebraischen und analytischen Eigenschaften von Faltungen.

Satz IV.1.1. (i)

$$f * (ag + bh) = a(f * g) + b(f * h)$$

für $a, b \in \mathbb{C}$,

(ii)

$$f * g = g * f$$

(iii)

$$f * (g * h) = (f * g) * h.$$

□

Satz IV.1.2. Sei f eine differenzierbare Funktion und seien die Faltungen $f * g$ und $f' * g$ wohldefiniert. Dann ist $f * g$ differenzierbar und $(f * g)' = f' * g$. Ebenso gilt, wenn g differenzierbar ist, dann ist $(f * g)' = f * g'$.

Beweis. Einfach unter dem Integralzeichen differenzieren:

$$(f * g)'(x) = \frac{d}{dx} \int f(x-y)g(y)dy = \int f'(x-y)g(y)dy = f' * g(x).$$

Da $f * g = g * f$ ist, funktioniert dasselbe Argument mit vertauschten f und g . □

Wir betonen, dass man im obigen Satz die Ableitung in $(f * g)'$ auf beide Faktoren werfen kann. Somit ist $f * g$ mindestens so glatt, der andere Faktor hat keine Glattheitseigenschaften.

Lassen Sie uns innehalten, um einige Bemerkungen zu machen, die etwas Licht in die Bedeutung von Faltungen bringen können. Stellen wir uns zunächst das Faltungsintegral als Grenzwert von Riemann-Summen vor,

$$\int f(x-y)g(y)dy \approx \sum f(x-y_j)g(y_j)\Delta y_j$$

Die Funktion $f_j(x) = f(x-y_j)$ ist die Funktion f entlang der x -Achse um den Betrag y_j verschoben, also die Summe auf der rechten Seite ist eine lineare Kombination von Translationen von f mit den Koeffizienten $g(y_j)\Delta y_j$. Wir können uns daher $f * g$ als kontinuierliche Überlagerung von Übersetzungen von f vorstellen; und da $f * g = g * f$, ist es auch eine kontinuierliche Überlagerung von Übersetzungen von g .

Man kann die Faltung nicht nur für Funktionen auf \mathbb{R} definieren, sondern auch für Funktionen auf \mathbb{R}^2 . Im letzteren Fall wird die Faltung sehr breit bei der Bildfilterung verwendet. Es wird häufig zum Glätten von Bildern verwendet, d. h. zum Reduzieren der Intensitätsvariation zwischen einem Pixel und dem nächsten.

Beispielsweise bildet ein Mittelwertfilter eine Funktion in ihre Faltung mit der folgenden Funktion ab:

$$f(x) \mapsto f * g(x), \quad g(x) = \begin{cases} b, & |x| < a, \\ 0, & |x| \geq a. \end{cases} \quad (\text{IV.1})$$

Ein Gaussfilter bildet eine Funktion in ihre Faltung mit der folgenden Funktion ab:

$$f(x) \mapsto f * g(x), \quad g(x) = \frac{1}{b} e^{-ax^2}.$$

IV.1.2. Fouriertransformation

Wenn f eine integrierbare Funktion auf \mathbb{R} ist, ist ihre Fourier-Transformation die Funktion \hat{f} auf \mathbb{R} definiert durch

$$\hat{f}(\xi) = \int e^{-i\xi x} f(x) dx.$$

Da $e^{-i\xi x}$ den Betrag 1 hat, konvergiert das Integral absolut für alle ξ und definiert eine beschränkte Funktion von ξ :

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \int |f(x)| dx$$

Es gilt $|e^{-i\eta x} f(x) - e^{-i\xi x} f(x)| \leq 2|f(x)|$, dann impliziert der Satz über die dominierte Konvergenz, dass $\hat{f}(\eta) - \hat{f}(\xi) \rightarrow 0$, wenn $\eta \rightarrow \xi$, das heißt, \hat{f} ist stetig.

Der folgende Satz fasst einige der anderen grundlegenden Eigenschaften der Fourier-Transformation zusammen.

Satz IV.1.3. Sei $f \in L^1$.

IV. Fouriertransformation

(i) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\mathcal{F}[f(x-a)] = e^{-ia\xi} \widehat{f}(\xi)$$

und

$$\mathcal{F}[e^{iax} f(x)] = \widehat{f}(\xi - a).$$

(ii) Sei $\delta > 0$ und sei $f_\delta(x) := \delta^{-1} f(x/\delta)$. Dann gilt:

$$\mathcal{F}[f_\delta(x)](\xi) = \mathcal{F}[f](\delta\xi) \quad \text{und} \quad \mathcal{F}[f(\delta x)] = [\widehat{f}]_\delta(\xi).$$

(iii) Sei f eine stetige Funktion die stückweis glatt ist und sei $f' \in L^1$. Dann ist

$$[\widehat{f'}](\xi) = i\xi \widehat{f}(\xi).$$

(iv) Falls $g \in L^1$, dann

$$\widehat{(f * g)} = \widehat{f} \widehat{g}.$$

Beweis. Hausaufgabe. □

Bemerkung IV.1.4. Die letzte Eigenschaft hat eine unmittelbare Anwendung beim De-blurring von Bildern. Wir lassen eine Funktion f das Originalbild darstellen und $f * g$ sei das Ergebnis der Anwendung eines Filters mit einem Faltungskern g . Die Frage erfordert die Rekonstruktion von f aus $f * g$. Wir können dies mit Hilfe der Fourier-Transformation tun!

$$f = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\mathcal{F}(f)) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\left(\frac{\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)}{\mathcal{F}(g)}\right) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\left(\frac{\mathcal{F}(f * g)}{\mathcal{F}(g)}\right).$$

Die Moral von der Geschichte: Verwenden Sie die Faltung nicht als Werkzeug, um wichtige Informationen zu verbergen.

IV.1.3. Beispiele

Betrachten wir Beispiele der Fourier-Transformation.

Beispiel IV.1.5. Sei

$$\chi_a(\xi) := \begin{cases} 1, & |\xi| < a, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist

$$\widehat{\chi}_a(t) = 2 \frac{\sin(at)}{t}.$$

Bemerkung IV.1.6. Diese Funktion wird häufig bei der Frequenzfilterung verwendet.

Wir lassen $f(t)$ die Amplitude einer Schallwelle zu einem Zeitpunkt t darstellen. Wenn Sie beispielsweise eine Audioaufnahme, $f(t)$, $t \in [-T, T]$, der Länge $2T$ mit einem hochfrequenten Störgeräusch und einem niederfrequenten Motorengeräusch haben, können diese Geräusche durch eine Frequenzfilterung entfernt werden. Nehmen wir an, wir wollen alle Frequenzen loswerden, die höher als M Herz sind, und alle Frequenzen, die niedriger als m Herz sind. Wir könnten dies mit Hilfe eines so-genannte Bandpassfilter tun – das ist ein Filter, der die Amplituden innerhalb des Passbands ohne Amplitudenverzerrung durchlassen muss, während die Amplituden außerhalb dieses Frequenzbands unterdrückt werden. Sei

$$H(\xi) := H_{m,M}(\xi) := \begin{cases} 1, & m < \xi < M, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wenn die Länge der Audioaufnahme ausreichend lang ist, kann das Ergebnis der Anwendung des Bandpassfilters auf eine Funktion f wie folgt geschrieben werden:

$$\mathcal{F}^{-1}(H\mathcal{F}(f)) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(H\mathcal{F}(f)) = \widehat{H} * f,$$

wobei

$$\widehat{H}(\xi) = \frac{i(e^{im\xi} - e^{iM\xi})}{\xi}.$$

Die Funktion f bezeichnet zu einem gegebenen Zeitpunkt eine Amplitude einer Schallwelle: f ist dann eine reellwertige Funktion. Darüber hinaus sollte die gewünschte Ausgabe auch eine reellwertige Funktion sein. Wenn wir den Realteil der vorherigen Gleichung nehmen, erhalten wir den Filter, der

$$f \mapsto G * f$$

mit

$$G(t) = \frac{\sin(Mt)}{t} - \frac{\sin(mt)}{t}.$$

abbildet. Dieser Filter ist jedoch ideal und nicht kausal: der Wert der Funktion $G * f(t_0)$ hängt von Werten von $f(t)$ für $t > t_0$ ab, weil

$$G * f(t_0) = - \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin(M\xi)}{\xi} - \frac{\sin(m\xi)}{\xi} \right) f(t_0 + \xi) d\xi$$

und

$$\frac{\sin(M\xi)}{\xi} - \frac{\sin(m\xi)}{\xi} \neq 0 \text{ für } \xi > 0.$$

Es gibt kein physisches Gerät, das das Verhalten dieses Filters in Echtzeit modellieren kann, da physische Geräte dem Gesetz der Kausalität gehorchen müssen. Nämlich, falls ein physisches Gerät eine Faltung $f \mapsto g * f$ in Echtzeit modelliert, dann muss $f * g(t_0)$ nur von $f(t)$, $t < t_0$ abhängig sein. Dies impliziert, $g(t) = 0$ für $t < 0$.

Beispiel IV.1.7. Sei

$$f(x) = e^{-\frac{ax^2}{2}}.$$

Dann ist

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-\xi^2/(2a)}.$$

Bemerkung IV.1.8. Nachdem wir diese Fourier-Transformationen berechnet haben, können wir nun wie in Bemerkung IV.1.4 das De-Blurring von Gaussfilter durchführen. Das Entschärfen des Mittelwertfilters ist komplizierter, weil $\exists t_0 : \hat{\xi}_a(t_0) = 0$.

Beispiel IV.1.9. Sei

$$f(x) = (x^2 + a^2)^{-1},$$

dann ist

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\pi}{a} e^{-a|\xi|}.$$

Wie in der Theorie der Fourier-Reihe gilt: Je glatter die Funktion ist, desto schneller sinkt ihre Fourier-Transformation bei $\xi \rightarrow \infty$, und umgekehrt. Die Funktion aus dem ersten Beispiel verschwindet außerhalb eines endlichen Intervalls, ist aber nicht stetig; ihre Fourier-Transformation ist analytisch, sinkt aber nur wie $1/\xi$. Die Funktion aus dem dritten Beispiel ist glatt, aber sinkt langsam; seine Fourier-Transformation fällt schnell ab, ist aber bei $\xi = 0$ nicht differenzierbar. Die Funktion aus dem zweiten Beispiel ist glatt und sinkt ebenso wie ihre eigene Fourier-Transformation.

Lemma IV.1.10 (Riemann-Lemma). Sei $f \in L^1$, dann ist $\hat{f}(\xi) \rightarrow 0$ für $\xi \rightarrow \infty$.

Beweis. Das Lemma gilt für Treppenfunktionen mit endlich vielen Stufen aufgrund von Bemerkung IV.1.6. Für jede Funktion f aus L^1 gibt es eine Folge von Treppenfunktionen f_n , so dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f(x)| dx \rightarrow 0.$$

Dann ist

$$\sup_{\xi} |\hat{f}_n(\xi) - \hat{f}(\xi)| \leq \int |f_n(x) - f(x)| dx \rightarrow 0$$

und es gilt: $\hat{f}(\xi) \rightarrow 0$. □

IV.1.4. Fourier-Inversionsformel

Bevor wir zur einer die formaleren Version der Fourier-Transformation übergehen, müssen wir Faltungen etwas genauer untersuchen.

Die Faltung hat keine Identität in der Klasse der Funktionen: Es gibt keine* Funktion g , so dass $f * g = f$ für alle f . Wir können jedoch Folgen $\{g_n\}$ finden, sodass $f * g_n$ als $n \rightarrow \infty$ gegen f konvergiert. Wenn wir zum Beispiel versuchen, den Mittelwertfilter aus (IV.1) mit einem sehr kleinen Wert von a zu verwenden und $b = \frac{1}{2a}$ zu nehmen, erhalten wir

$$f(x) \mapsto \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(x-y) dy \approx f(x).$$

Um genau zu sein, sei $g \in L^1$, und für $\epsilon > 0$ sei

$$g_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon} g\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

Wenn $\epsilon \rightarrow 0$ wird der Graph von g_ϵ bei $x = 0$ zu einer scharfen Spitze, aber die Fläche unter dem Graph bleibt konstant: es gilt

$$\int_a^b g_\epsilon(x) dx = \int_{a/\epsilon}^{b/\epsilon} g(y) dy \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} g_\epsilon(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) dy.$$

Satz IV.1.11. Sei g eine L^1 -Funktion, so dass $\int_{-\infty}^{\infty} g(y) dy = 1$, und sei $\alpha = \int_{-\infty}^0 g(y) dy$ und $\beta = \int_0^{\infty} g(y) dy$.[†] Sei f eine stückweise stetige Funktion auf \mathbb{R} , und nehmen wir an, dass entweder f beschränkt ist oder dass g außerhalb eines endlichen Intervalls verschwindet, sodass $f * g(x)$ für alle x wohldefiniert ist. Wenn g_ϵ wie oben definiert ist, dann ist

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f * g_\epsilon(x) = \alpha f(x+) + \beta f(x-) \quad \text{für alle } x.$$

Insbesondere wenn f bei x stetig ist, dann ist

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f * g_\epsilon(x) = f(x)$$

Wenn f an jedem Punkt des beschränkten Intervalls $[a, b]$ stetig ist, dann ist die Konvergenz auf $[a, b]$ gleichmäßig.

Beweis. Wir haben

$$\begin{aligned} f * g_\epsilon(x) - \alpha f(x+) - \beta f(x-) &= \int_{-\infty}^0 [f(x-y) - f(x+)] g_\epsilon(y) dy \\ &\quad + \int_0^{\infty} [f(x-y) - f(x-)] g_\epsilon(y) dy. \end{aligned}$$

Wir wollen also zeigen, dass beide Integrale beliebig klein sein können, indem wir ϵ hinreichend klein wählen. Das Argument ist für beide gleich, also betrachten wir nur das zweite. Wenn $\delta > 0$ gegeben ist, können wir $c > 0$ klein genug wählen, sodass $|f(x-y) - f(x-)| < \delta$ wenn $0 < y < c$. Es gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_0^c [f(x-y) - f(x-)] g_\epsilon(y) dy \right| &\leq \delta \int_0^c |g_\epsilon(y)| dy = \delta \int_0^{c/\epsilon} |g(y)| dy \\ &\leq \delta \int_0^{\infty} |g(y)| dy. \end{aligned}$$

Um das Integral von c bis ∞ abzuschätzen, verwenden wir die Annahme, dass entweder f begrenzt ist (z. B. $|f| \leq M$) oder g außerhalb eines endlichen Intervalls verschwindet (z. B. $g(x) = 0$ für $|x| > R$). Im ersten Fall, es gilt

$$\left| \int_c^{\infty} [f(x-y) - f(x-)] g_\epsilon(y) dy \right| \leq 2M \int_c^{\infty} |g_\epsilon(y)| dy = 2M \int_{c/\epsilon}^{\infty} |g(y)| dy.$$

Im zweiten Fall ist $g_\epsilon(x) = 0$ für $|x| > \epsilon R$, und insbesondere verschwindet das Integral von c bis ∞ tatsächlich für ϵ klein.

Schließlich, wenn f auf $[a, b]$ stetig ist, dann ist f dort gleichmäßig stetig, und wir können c unabhängig von x wählen. Daraus folgt leicht, dass die Konvergenz von $f * g_\epsilon(x)$ nach $f(x)$ gleichmäßig auf $[a, b]$ ist. \square

* $f * \delta = f$ für eine Dirac δ -Funktion, ist aber Dirac δ -Funktion ist keine echte Funktion. Weitere Details finden Sie in einer Funktionsanalyse.

[†] Beachten Sie, dass $\alpha + \beta = 1$ und $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, wenn g gerade ist.

Wir wenden uns nun der Fourier-Inversionsformel zu, also zur Wiederherstellung von f aus \hat{f} . Die heuristischen Argumente am Anfang des Kapitels führten uns zu der Formel:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

Satz IV.1.12. Sei $f \in L^1$ eine stückweise stetige Funktion auf \mathbb{R} und sei $f(x) = \frac{1}{2}[f(x-) + f(x+)]$ für alle x . Dann ist

$$f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int e^{i\xi x} e^{-\epsilon^2 \xi^2 / 2} \hat{f}(\xi) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Wenn außerdem $\hat{f} \in L^1$ ist, dann ist f stetig und es gilt

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i\xi x} \hat{f}(\xi) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Es gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{i\xi x} e^{-\epsilon^2 \xi^2 / 2} \hat{f}(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \iint e^{i\xi(x-y)} e^{-\epsilon^2 \xi^2 / 2} f(y) dy d\xi.$$

Das Doppelintegral ist absolut konvergent und deshalb können wir die Integrationsreihenfolge vertauschen. Das ξ -Integral ist:

$$\int e^{i\xi(x-y)} e^{-\epsilon^2 \xi^2 / 2} d\xi = \mathcal{F} \left[e^{-\epsilon^2 \xi^2 / 2} \right] (y-x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\epsilon} e^{-(x-y)^2 / 2\epsilon^2}.$$

Mit anderen Worten,

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{i\xi x} e^{-\epsilon^2 \xi^2 / 2} \hat{f}(\xi) d\xi = \frac{1}{\epsilon \sqrt{2\pi}} \int f(y) e^{-(x-y)^2 / 2\epsilon^2} dy = f * \phi_\epsilon(x)$$

wobei

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad \phi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon} \phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) = \frac{1}{\epsilon \sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\epsilon^2}.$$

Satz IV.1.11 impliziert, dass wenn f stückweise stetig ist, gilt

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int e^{i\xi x} e^{-\epsilon^2 \xi^2 / 2} \hat{f}(\xi) d\xi = \frac{1}{2} [f(x-) + f(x+)]$$

für alle x . Wir sind mit unserem Hauptergebnis fertig.

Es bleibt nur noch die letzte Behauptung zu beweisen. Es gilt

$$\left| e^{i\xi x} e^{-\epsilon^2 |\xi|^2 / 2} \hat{f}(\xi) \right| \leq |\hat{f}(\xi)|,$$

wenn also $\hat{f} \in L^1$ ist, können wir den Satz über die dominierte Konvergenz anwenden, um den Grenzwert auszutauschen:

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{i\xi x} \hat{f}(\xi) d\xi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int e^{i\xi x} e^{-\epsilon^2 \xi^2 / 2} \hat{f}(\xi) d\xi = \frac{1}{2} [f(x-) + f(x+)].$$

Wir haben bereits bewiesen, dass Fourier-Transformationen integrierbarer Funktionen stetig sind, womit der Beweis abgeschlossen ist. \square

Folgerung IV.1.13. Sei $\hat{f} = \hat{g}$, dann ist $f = g$.

Beweis. Es gilt $\mathcal{F}(f - g) = 0 \implies f - g = 0$. \square

IV.1.5. Fourier-Transformation für L^2

Wir haben die Fourier-Transformation für Funktionen aus L^1 entwickelt, aber unsere Erfahrung mit Fourier-Reihen legt nahe, dass das L^2 ebenfalls eine bedeutende Rolle spielen sollte.

Eine anfängliche Schwierigkeit besteht darin, dass das Integral $\int e^{-i\xi x} f(x) dx$ möglicherweise für $f \in L^2$ und $f \notin L^1$ nicht konvergiert. Es gibt einen Weg, dieses Problem zu umgehen. Die Schlüsselbeobachtung ist, dass das

IV. Fouriertransformation

Analogon von Parsevals Formel für die Fourier-Transformation gilt. Angenommen, f und g sind L^1 -Funktionen, sodass \hat{f} und \hat{g} in L^1 liegen. Dann sind f, g, \hat{f} und \hat{g} beschränkt und gehören sie deshalb zu L^2 , und es gilt

$$\begin{aligned} 2\pi \langle f, g \rangle &= 2\pi \int f(x) \overline{g(x)} dx = \iint f(x) \overline{e^{i\xi x} \hat{g}(\xi)} d\xi dx \\ &= \iint f(x) e^{-i\xi x} \overline{\hat{g}(\xi)} dx d\xi = \int \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle \end{aligned}$$

Mit anderen Worten, die Fourier-Transformation bewahrt innere Produkte bis zu einem Faktor von 2π . Insbesondere wenn wir $g = f$ nehmen, erhalten wir

$$\|\hat{f}\|^2 = 2\pi \|f\|^2.$$

Das ist die *Parseval-Formel* für die Fourier-Transformation.

Lemma IV.1.14. Sei $f \in L^2$. Es gilt eine Folge $\{f_n\}_n$ so dass

(a) $f_n \in L^1, \hat{f}_n \in L^1$

(b) $f_n \rightarrow f$ in L^2 -Norm.

Beweis. Hausaufgabe. □

Dann ist

$$\|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|^2 = 2\pi \|f_n - f_m\|^2 \rightarrow 0 \text{ für } m, n \rightarrow 0,$$

deshalb ist $\{\hat{f}_n\}$ eine Cauchy Folge. Wir definieren

$$\hat{f} := \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}_n.$$

Satz IV.1.15. Die Fourier Transformation $\mathcal{F} : L^2 \rightarrow L^2$ ist durch $f \mapsto \mathcal{F}(f)$ für alle $f \in L^1 \cap L^2$ eindeutig bestimmt. Es gilt:

$$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = 2\pi \langle f, g \rangle, \quad \|\hat{f}\|^2 = 2\pi \|f\|^2, \quad f, g \in L^2.$$

□

IV.1.6. Heisenbergsche Unschärferelation

Definition IV.1.16. Sei f eine auf \mathbb{R} definierte Funktion. Wenn seine Fourier-Transformation außerhalb eines endlichen Intervalls verschwindet, dann ist f eine *bandbegrenzte Funktion*. Wenn f außerhalb eines endlichen Intervalls verschwindet, dann ist f eine *zeitlichbegrenzte Funktion*.

Es ist unmöglich, dass eine Funktion $f \not\equiv 0$ sowohl bandbegrenzt als auch zeitlichbegrenzt ist: Sei $f \in L^2$ und $\hat{f}(\omega) = 0$ für $|\omega| > \Omega$. Dann ist

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i\omega z} \hat{f}(\omega) d\omega$$

für jede komplexe Zahl z wohl-definiert; außerdem können wir unter dem Integral differenzieren, um zu sehen, dass F analytisch ist. Dann ist f die Beschränkung auf die reelle Achse der gesamten analytischen Funktion F , und insbesondere kann f nur an isolierten Punkten verschwinden. Wenn $f \not\equiv 0$ außerhalb eines endlichen Intervalls verschwindet, dann hat \hat{f} nur isolierte Nullen.

Diese Bemerkungen sind Aspekte eines allgemeinen Prinzips, das sagt, dass f und \hat{f} nicht beide stark lokalisiert sein können. Um in dieser Richtung ein präzises quantitatives Ergebnis zu erhalten, führen wir den Begriff der Dispersion von f um den Punkt a ein:

$$\Delta_a f := \frac{\int (x - a)^2 |f(x)|^2 dx}{\int |f(x)|^2 dx}.$$

Die Dispersion $\Delta_a f$ sagt uns, wie viel f nicht in der Nähe von a konzentriert wird. Der folgende Satz besagt daher, dass f und \hat{f} nicht beide in der Nähe einzelner Punkte konzentriert werden können.

Satz IV.1.17. Sei $f \in L^2$. Dann ist

$$(\Delta_a f)(\Delta_\alpha \hat{f}) \geq \frac{1}{4}, \quad a, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Aus technischen Gründen nehmen wir an, dass f stetig und stückweise glatt ist und dass die Funktionen $xf(x)$ und $f'(x)$ in L^2 liegen.

Betrachten wir zuerst den Fall $a = \alpha = 0$. Durch partielle Integration haben wir

$$\int_A^B \overline{xf(x)} f'(x) dx = x|f(x)|^2 \Big|_A^B - \int_A^B (|f(x)|^2 + xf(x)\overline{f'(x)}) dx$$

oder

$$\begin{aligned} \int_A^B |f(x)|^2 dx &= -2 \operatorname{Re} \int_A^B \overline{xf(x)} f'(x) dx + x|f(x)|^2 \Big|_A^B \\ &= -2 \operatorname{Re} \int_A^B \overline{g(x)} f'(x) dx + x|f(x)|^2 \Big|_A^B \end{aligned}$$

Da f, g und f' in L^2 liegen,

$$\lim_{A \rightarrow -\infty, B \rightarrow \infty} \int_A^B \overline{g(x)} f'(x) dx < \infty.$$

Es gilt auch

$$\lim_{A \rightarrow -\infty} A|f(A)|^2 = 0, \quad \lim_{B \rightarrow -\infty} B|f(B)|^2 = 0,$$

sonst wäre $|f(x)| \sim |x|^{-1/2}$ für große x , d.h. $f \notin L^2$. Wir erhalten

$$\int |f(x)|^2 dx = -2 \operatorname{Re} \int \overline{xf(x)} f'(x) dx.$$

Nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt

$$\left(\int |f(x)|^2 dx \right)^2 \leq 4 \left(\int x^2 |f(x)|^2 dx \right) \left(\int |f'(x)|^2 dx \right). \quad (\text{IV.2})$$

Aber nach dem Satz von Plancherel ist $\int |f|^2 = (2\pi)^{-1} \int |\widehat{f}|^2$ und

$$\int |f'(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int |\mathcal{F}[f']|^2 d\xi = \frac{1}{2\pi} \int \xi^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

Wir können (IV.2) als

$$\left(\int |f(x)|^2 dx \right) \left(\int |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right) \leq 4 \left(\int x^2 |f(x)|^2 dx \right) \left(\int \xi^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)$$

schreiben, das ist die Heisenbergsche Unschärferelation mit $a = \alpha = 0$.

Sei

$$F(x) := e^{-i\alpha x} f(x+a)$$

Es ist leicht nachzuprüfen, dass F die Hypothesen des Satzes erfüllt und dass $\Delta_a f = \Delta_0 F$ und $\Delta_\alpha \widehat{f} = \Delta_0 \widehat{F}$. (*Hausaufgabe*) Dies impliziert,

$$(\Delta_a f) (\Delta_\alpha \widehat{f}) = (\Delta_0 F) (\Delta_0 \widehat{F}) \geq \frac{1}{4}.$$

□

Die Fourier-Transformation ist ein wesentliches Werkzeug zur quantenmechanischen Beschreibung der Natur. Es würde zu weit führen, die Physik hier zu erklären; aber für diejenigen, die über den notwendigen physikalischen Hintergrund verfügen, präsentieren wir eine kurze Diskussion des mathematischen Formalismus.

In der Quantenmechanik wird ein Teilchen z.B. ein Elektron, das sich entlang der x -Achse bewegt, durch eine "Wellenfunktion" $f(x)$ beschrieben, eine komplexwertige L^2 -Funktion mit $\|f\| = 1$. Die Funktion $|f(x)|^2$ wird als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretiert, dass das Teilchen an Position x gefunden wird; das heißt, $\int_a^b |f(x)|^2 dx$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen im Intervall $[a, b]$ gefunden wird. Die Bedingung $\|f\| = 1$ garantiert, dass die Gesamtwahrscheinlichkeit 1 beträgt.

IV. Fouriertransformation

Die Fourier-Transformierte der Wellenfunktion f liefert die Wahrscheinlichkeitsdichte für den Impuls des Teilchens. Genauer definieren wir eine modifizierte Fourier-Transformation \tilde{f} durch

$$\tilde{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \hat{f}\left(\frac{p}{\hbar}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int f(x) e^{-ixp/\hbar} dx$$

wobei \hbar die Plancksche Konstante ist. Dann impliziert der Satz von Plancherel dies

$$\int |\tilde{f}(p)|^2 dp = \frac{1}{2\pi\hbar} \int |\hat{f}(\hbar^{-1}p)|^2 dp = \frac{1}{2\pi} \int |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int |f(x)|^2 dx = 1$$

Somit kann $|\tilde{f}(p)|^2$ als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretiert werden, und es handelt sich um die Wahrscheinlichkeitsdichte für den Impuls.

Die Heisenbergsche Ungleichung ist eine präzise Formulierung der Orts-Impuls-Unschärferelation. Die Zahlen $\Delta_a f$ und $\Delta_\alpha \tilde{f}$ sind Maße dafür, wie stark die Wahrscheinlichkeitsverteilungen $|f|^2$ und $|\tilde{f}|^2$ von den Punkten a und α delokalisiert sind. Wenn wir a und α als Mittelwerte dieser Verteilungen nehmen, sind $\Delta_a f$ und $\Delta_\alpha \tilde{f}$ ihre Varianzen. Eine Variablenänderung zeigt, dass $\Delta_\alpha \tilde{f} = \hbar^2 \Delta_{\alpha/\hbar} \hat{f}$, also besagt die Heisenbergsche Ungleichung

$$(\Delta_a f) (\Delta_\alpha \tilde{f}) \geq \hbar^2/4.$$

IV.1.7. Nyquist-Shannon-Abtasttheorem

Eine in einem Intervall (a, b) enthaltene Menge von Punkten $\{x_j\}$ ist diskret, wenn keine Teilfolge gegen einen Punkt in (a, b) konvergiert. Das Auswerten einer Funktion auf einer diskreten Menge von Punkten wird als *Abtastung* bezeichnet.

Definition IV.1.18. Sei f ist eine Funktion, die in einem Intervall (a, b) definiert ist, und sei $\{x_j\}$ eine diskrete Menge von Punkten in (a, b) . Die Punkte $\{x_j\}$ heißen Abtastpunkte. Die Werte $\{f(x_j)\}$ heißen die Abtastwerten von f an den Punkten $\{x_j\}$.

In den meisten Anwendungen hat die diskrete Menge die Form $\{x_0 + jl \mid j \in \mathbb{Z}\}$, wobei l eine feste positive Zahl ist. Diese werden als Proben mit gleichem Abstand bezeichnet; die Zahl l wird als Abtastabstand bezeichnet. Der Kehrwert l^{-1} von l wird Abtastrate genannt. Die Abtasttheorie untersucht das Problem der Rekonstruktion von Funktionen einer kontinuierlichen Variablen aus einer Reihe von Abtastwerten und die Beziehung zwischen diesen Rekonstruktionen und den idealisierten Daten.

Der Satz von Nyquist besagt, dass eine bandbegrenzte Funktion durch eine Menge gleichmäßig beabstandeter Abtastwerte bestimmt wird, vorausgesetzt, dass der Abtastabstand ausreichend klein ist.

Satz IV.1.19. Sei $f \in L^2$ und $\hat{f}(\omega) = 0$ für $|\omega| \geq \Omega$. Dann ist f vollständig durch seine Werte an den Punkten $t_n = n\pi/\Omega, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ bestimmt. Außerdem gilt

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right) \frac{\sin(\Omega t - n\pi)}{\Omega t - n\pi}.$$

Bemerkung IV.1.20. Eine Funktion, die keine Frequenz höher als $\Omega\pi$ Herz enthält, wird vollständig bestimmt, indem bei $2\pi\Omega$ Herz abgetastet wird. Der normale Hörbereich eines gesunden Erwachsenen liegt zwischen 20 Hz und 20 kHz. Wenn wir die höchste Frequenz verdoppeln, erhalten wir 40 kHz. Aus diesem Grund verwendet der MP3-Player 44-kHz-Sampling!

Beweis. Erweitern wir \hat{f} in einer Fourier-Reihe auf das Intervall $[-\Omega, \Omega]$ und schreiben aus Gründen der späteren Bequemlichkeit $-n$ anstelle von n :

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_{-n} e^{-in\pi\omega/\Omega} \quad (|\omega| \leq \Omega).$$

Die Fourier-Koeffizienten c_{-n} sind gegeben durch

$$c_{-n} = \frac{1}{2\Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{f}(\omega) e^{in\pi\omega/\Omega} d\omega = \frac{1}{2\Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{f}(\omega) e^{in\pi\omega/\Omega} d\omega = \frac{\pi}{\Omega} f\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right).$$

Hier haben wir die Tatsache ausgenutzt, dass $\hat{f}(\omega) = 0$ für $|\omega| > \Omega$ und die Fourier-Inversionsformel gilt. Wenn wir diese beiden Zutaten erneut verwenden, erhalten wir

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega} \sum_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right) e^{-in\pi\omega/\Omega} e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\Omega} \sum_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right) \frac{e^{i(\Omega t - n\pi)\omega/\Omega}}{i(\Omega t - n\pi)/\Omega} \Bigg|_{-\Omega}^{\Omega} = \sum_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right) \frac{\sin(\Omega t - n\pi)}{\Omega t - n\pi}. \end{aligned}$$

□

Es ist erwähnenswert, dass die Funktionen

$$s_n(t) = \frac{\sin(\Omega t - n\pi)}{\Omega t - n\pi} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

eine orthogonale Basis für den Raum von L^2 -Funktionen bilden, deren Fourier-Transformationen außerhalb von $[-\Omega, \Omega]$ verschwinden, und dass die Abtastformel die Erweiterung von f in Bezug auf diese Basis ist. Tatsächlich zeigen die Berechnungen im Beweis des Abtasttheorems, dass s_n die inverse Fourier-Transformation der Funktion ist

$$\hat{s}_n(\omega) = \begin{cases} (\pi/\Omega) e^{-in\pi\omega/\Omega} & \text{if } |\omega| < \Omega \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Behauptung folgt also aus dem Satz von Plancherel und der Tatsache, dass die Funktionen $e^{-in\pi\omega/\Omega}$ eine orthogonale Basis für $L^2(-\Omega, \Omega)$ bilden.

Definition IV.1.21. Die optimale Abtastrate für eine Ω -bandbegrenzte Funktion wird als die Nyquistrate bezeichnet. Das Abtastung mit einer niedrigeren Rate wird als Unterabtastung bezeichnet, das Abtastung mit einer höheren Rate wird Überabtastung genannt.

Wir weisen darauf hin, dass wir bei *Undersampling* eine ursprüngliche Funktion nicht eindeutig rekonstruieren können. Es kann vorkommen, dass wir auf ein sogenanntes *Aliasing* stoßen – eine Unmöglichkeit, zwei Signale zu unterscheiden, wenn beide Signale abgetastet werden. Betrachten wir $x_1(t) = \cos(2\pi t)$ und $x_2(t) = \cos(18\pi t)$. Wenn wir sie jedoch in Intervallen von 0,5 Sekunden abtasten, dann konnten wir sie nicht unterscheiden.

Die Aliasing ist aus dem Alltag bekannt: Ein Filmbild ist eigentlich eine Folge. Beobachten wir die Drehung der Räder bei einem schnell fahrenden Auto in einem Film. Es kann vorkommen, dass sich die Räder sehr langsam drehen oder einfach stehen bleiben. Tatsächlich werden wir Objekte, die sich mit den Frequenzen q und $q + 24N$, $N \in \mathbb{N}$ bewegen, nicht unterscheiden können.

IV.1.8. Poissonsche Summenformel

Die Poissonsche Summenformel ist ein Hilfsmittel der Fourier-Analyse und Signalverarbeitung. Sie dient unter anderem zur Analyse der Eigenschaften von Abtastmethoden.

Lemma IV.1.22. Sei ϕ genügend glatt und im Unendlichen genügend schnell fallend, gilt

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \phi(k) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(2\pi k).$$

Beweis. Die Funktion

$$g(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \phi(k+t)$$

ist stetig, beschränkt, differenzierbar und periodisch mit Periode 1. Diese kann also in eine punktweise konvergente Fourier-Reihe entwickelt werden,

$$g(t) = \sum_n c_n e^{2\pi i n t}$$

wobei

$$c_n = \int_0^1 \sum_k \phi(k+t) e^{-2\pi i n t} dt = \sum_k \int_k^{k+1} \phi(t) e^{-2\pi i n t} dt = (\mathcal{F}\phi)(2\pi n).$$

□

IV. Fouriertransformation

Wir können die Poisson-Summenformel verwenden, um Fehler zu analysieren, die durch Untertastung eingeführt wurden. Stellen Sie sich eine Funktion f vor, die nicht unbedingt Ω -bandbegrenzt ist:

$$F_{\Omega}(x) = \sum_n f\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right) \frac{\sin(\Omega x - n\pi)}{\Omega x - n\pi}.$$

Weil $\sin(x)/x|_{x=0} = 1$ und $\sin(\pi n)/(\pi n) = 0$, es gilt

$$F_{\Omega}\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right) = f\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Die Poisson-Summenformel impliziert:

$$\hat{F}_{\Omega}(\xi) = \sum_n \hat{f}(\xi + 2n\Omega) \xi_{[-\Omega, \Omega]}(\xi).$$

Es gilt:

$$\hat{f}(\xi) - \hat{F}_{\Omega}(\xi) = \begin{cases} \hat{f}(\xi), & |\xi| > \Omega, \\ -\sum_{n \neq 0} \hat{f}(\xi + 2n\Omega), & |\xi| \leq \Omega. \end{cases}$$

Die zweite Fehlerquelle ergibt sich daraus, dass die hohe Frequenz in f bei niedrigen Frequenzen in der Funktion F_{Ω} wieder auftauchen.

Außerdem ist es aus der obigen Formel möglich, eine Funktion zu konstruieren, die für jede feste Abtastrate unsichtbar ist: sei h_{ϵ} eine Funktion mit $\text{supp}(\hat{h}_{\epsilon}) \in [-\epsilon, \epsilon]$ und $h_{\epsilon}(0) = 0$. Die Funktion ist $\Omega + \epsilon$ bandbegrenzt; wir möchten f mit der Frequenz B_0 abtasten. Sei

$$\hat{f}(\xi) := \int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{h}_{\epsilon}(\xi - \zeta) d\zeta.$$

Dann ist

$$\sum_n \hat{f}(\xi + 2n\Omega) = \sum_n \int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{h}_{\epsilon}(\xi + 2n\Omega - \zeta) d\zeta = \int_{\mathbb{R}} \hat{h}_{\epsilon}(\zeta) d\zeta = 2\pi h_{\epsilon}(0) = 0,$$

und $\hat{F}_{\Omega}(\xi) = 0$.

Eine Möglichkeit, mit Aliasing zu reduzieren, ist die Anwendung eines Bandpassfilters:

Lemma IV.1.23. Seien $f \in L_1$ und $B > 0$, dann liefert die Funktion h mit $\hat{h} = \hat{f}\chi_{[-B, B]}$ die beste L_2 -Approximation unter den bandbegrenzten Funktionen von L_1 .

Beweis.

$$(2\pi)^2 \|f - h\|_2^2 = \|\hat{f} - \hat{h}\|_2^2 = \int_{|\xi| \leq B} |\hat{f}(\xi) - \hat{h}(\xi)|^2 d\xi + \int_{|\xi| > B} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

□

Die erste mathematische Behandlung des Abtastung taucht bereits im 18. Jahrhundert auf. Alexis-Claude Clairaut (1713-1767) und Joseph Louis Lagrange (1736-1813) befassten sich mit der Umlaufbahnmechanik und dem Problem, aus einer endlichen Menge von Beobachtungen die Einzelheiten einer Umlaufbahn zu bestimmen. In moderner Terminologie, sie suchten nach eine gerade periodische Funktion $f(x)$ mit einer normierten Periode von eins wird als endliche trigonometrische Reihe durch dargestellt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cos(2\pi kx), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Das Problem besteht darin, die Koeffizienten $\{a_k\}_k$ aus den N Werten von $f(x_n) = \frac{n}{N}$ mit $n = 0, 1, \dots, N-1$ zu finden.

IV.2. Fast und Furious

Das Konzept der Fourier-Transformation kann modifiziert werden, um in eine Anzahl anderer Situationen Anwendung zu finden. Eine davon ist die Entwicklung einer periodischen Funktion in einer Fourier-Reihe. Hier diskutieren wir kurz zwei weitere wichtige Transformationen vom Fourier-Typ.

IV.2.1. Die diskrete Fourier-Transformation

Die diskrete Fourier-Transformation ist eine lineare Abbildung, die auf komplexe N -dimensionale Vektoren in ähnlicher Weise, wirkt wie die Fourier-Transformation auf Funktionen auf \mathbb{R} . Zur Motivation betrachten wir das Problem der numerischen Approximation von Fourier-Transformationen. Um die Fourier-Transformation

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx$$

bei maschinellen Berechnungen zu verwenden, müssen wir diese Transformation durch etwas annähern, dass nur eine endliche Anzahl von algebraischen Berechnungen umfasst, die an einer endlichen Menge von Daten durchgeführt werden. Dies erreichen wir in mehreren Schritten.

Zuerst ersetzen wir das Integral über $(-\infty, \infty)$ durch das Integral über ein endliches Intervall. Mit anderen Worten, wir nehmen an, dass f außerhalb eines begrenzten Intervalls $[a, a + \Omega]$ verschwindet. Es ist bequem anzunehmen, dass $a = 0$, was immer erreicht werden kann, indem $f(x)$ durch $f(x - a)$ ersetzt wird.

Als nächstes werden wir versuchen, $\hat{f}(\xi)$ zu berechnen, allerdings nicht bei jedem $\xi \in \mathbf{R}$, sondern nur bei einer endlichen Folge von Punkten, die in einem begrenzten Intervall $[-C, C]$ enthalten sind. Die Wahl von C kann manchmal durch die Kenntnis der Rate bestimmt werden, mit der $\hat{f}(\xi)$ als $\xi \rightarrow \infty$ zerfällt. Welche Folge sollen wir wählen? Da f außerhalb eines Intervalls der Länge Ω verschwindet, zeigt das Abtasttheorem an dass \hat{f} aus seinen Werten an den Punkten $2\pi m/\Omega$ vollständig rekonstruiert werden kann, wobei m eine ganze Zahl ist. Daher begnügen wir uns mit der Berechnung von

$$\hat{f}\left(\frac{2\pi m}{\Omega}\right) = \int_0^{\Omega} e^{-2\pi i m x/\Omega} f(x) dx, \quad |m| \leq \frac{C\Omega}{2\pi}.$$

Schließlich ersetzen wir das rechte Integral durch die Riemann-Summe am linken Endpunkt, die wir erhalten, indem wir das Intervall $[0, \Omega]$ in N gleiche Teilintervalle mit den Endpunkten $n\Omega/N$ mit $n = 0, \dots, N$ unterteilen:

$$\hat{f}\left(\frac{2\pi m}{\Omega}\right) \approx \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi i m n/N} f\left(\frac{n\Omega}{N}\right) \frac{\Omega}{N}.$$

Damit dies eine gute Näherung entspricht, müssen die Exponentiale $e^{-2\pi i m x/\Omega}$ über jedes Teilintervall der Länge Ω/N im Wesentlichen konstant sein. Daher sollten wir $N \gg C\Omega/2\pi$ wählen. Zusammengefasst führt unser Approximationsverfahren zu folgendem: Wenn

$$f\left(\frac{n\Omega}{N}\right) = a_n,$$

dann ist $\hat{f}\left(\frac{2\pi m}{\Omega}\right) \approx \frac{\Omega}{N} \hat{a}_m$ für $|m| \ll N$, wobei

$$\hat{a}_m = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi i m n/N} a_n.$$

Da nun $e^{-2\pi i m} = 1$ ist, ist die Folge $\{\hat{a}_m\}$ periodisch mit Periode N : $\hat{a}_{m+N} = \hat{a}_m$. Es reicht nur $\hat{a}_0, \dots, \hat{a}_{N-1}$ zu definieren.

Damit haben wir eine Abbildung definiert, die einen Vektor $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_{N-1}) \in \mathbf{C}^N$ in einen anderen Vektor $\hat{\mathbf{a}} = (\hat{a}_0, \dots, \hat{a}_{N-1}) \in \mathbf{C}^N$ transformiert. Dies ist die *diskrete Fourier-Transformation*.

Genau genommen ist die diskrete N -Punkt-Fourier-Transformation die lineare Abbildung $\mathcal{F}_N : \mathbf{C}^N \rightarrow \mathbf{C}^N$, definiert durch

$$\mathcal{F}_N \mathbf{a} = \hat{\mathbf{a}}, \quad \hat{a}_m = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi i m n/N} a_n \quad (0 \leq m < N).$$

Die diskrete Fourier-Transformation und die gewöhnliche haben gewisse Ähnlichkeiten. Eine davon ist, dass es die diskrete Faltung in gewöhnliche Multiplikation umwandelt:

$$\mathcal{F}_N(\mathbf{a} * \mathbf{b}) = (\hat{a}_0 \hat{b}_0, \dots, \hat{a}_{N-1} \hat{b}_{N-1}),$$

IV. Fouriertransformation

wobei die diskrete Faltung $\mathbf{a} * \mathbf{b}$ durch*

$$(\mathbf{a} * \mathbf{b})_n = \sum_{k=0}^{N-1} a_k b_{[n-k]}, \quad [n-k] = \begin{cases} n-k & \text{if } n \geq k \\ n-k+N & \text{if } n < k \end{cases}$$

definiert ist. Ein weiterer wichtiger Punkt, in dem die diskrete Fourier-Transformation der Fourier-Transformation ähnelt, liegt in ihrer Inversionsformel, die wir nun herleiten.

Lemma IV.2.1. Für $m = 0, \dots, N-1$, sei

$$\mathbf{e}_m = \left(1, e^{2\pi i m/N}, e^{2\pi i 2m/N}, \dots, e^{2\pi i (N-1)m/N}\right).$$

Dann ist $\{\mathbf{e}_m\}_{m=0}^{N-1}$ eine orthogonale Basis für \mathbf{C}^N , und $\|\mathbf{e}_m\|^2 = N$ für alle m .

Beweis. Da die Komponenten von \mathbf{e}_m alle den Betrag 1 haben, haben wir

$$\|\mathbf{e}_m\|^2 = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = N.$$

Wenn andererseits $l \neq m$, dann gilt

$$\langle \mathbf{e}_l, \mathbf{e}_m \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i (l-m)n/N} = \frac{1 - e^{2\pi i (l-m)N/N}}{1 - e^{2\pi i (l-m)/N}} = 0$$

da $e^{2\pi i (l-m)} = 1$. □

Nach diesem Lemma haben wir für jedes $\mathbf{a} \in \mathbf{C}^N$

$$\mathbf{a} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \langle \mathbf{a}, \mathbf{e}_m \rangle \mathbf{e}_m.$$

Aber die inneren Produkte $\langle \mathbf{a}, \mathbf{e}_m \rangle$ sind nur die Komponenten von $\hat{\mathbf{a}}$:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{e}_m \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{-2\pi i mn/N} = \hat{a}_m,$$

dann gilt $\mathbf{a} = N^{-1} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{a}_m \mathbf{e}_m$, oder anders gesagt,

$$a_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} e^{2\pi i mn/N} \hat{a}_m.$$

Dies ist *die Inversionsformel* für die diskrete Fourier-Transformation.

Wie wir bereits angedeutet haben, wird die diskrete Fourier-Transformation üblicherweise verwendet, um eine numerische Annäherung an die gewöhnliche Fourier-Transformation bereitzustellen. Aus rechnerischer Sicht weist die diskrete Fourier-Transformation jedoch eine potenziell unangenehme Eigenschaft auf. Lassen Sie uns als eine "elementare Operation" als eine Multiplikation zweier komplexer Zahlen definieren, gefolgt von der Addition zweier komplexer Zahlen. Aus der Definition geht hervor, dass die Berechnung jedes \hat{a}_m genau N Elementaroperationen erfordert, und es gibt genau N Koeffizienten: d.h., die Berechnung von $\hat{\mathbf{a}}$ erfordert also insgesamt N^2 Elementaroperationen. Wenn N groß ist, wie es oft für qualitativ hochwertige numerische Arbeiten der Fall sein muss, ist N^2 enorm, sodass die diskrete Fourier-Transformation rechnerisch unhandlich werden kann.

Wenn N eine Primzahl ist, kann nicht viel dagegen getan werden. Wenn jedoch N keine Primzahl ist, können die Berechnungen wesentlich reduziert werden, indem sie effizienter angeordnet werden. Angenommen $N = N_1 N_2$, und schreiben wir die Indizes m und n in wie folgendes:

$$m = m' N_1 + m'', \quad n = n' N_2 + n'',$$

*Alternativ $(\mathbf{a} * \mathbf{b})_n = \sum_{k=0}^{N-1} a_k b_{n-k}$ wobei n und k werden als ganze Zahlen modulo N betrachtet.

wobei $0 \leq m'', n' \leq N_1 - 1$ und m' und $0 \leq m', n'' \leq N_2 - 1$. Dann

$$e^{-2\pi i m n / N} = e^{-2\pi i [(m'' n' / N_1) + (m' n'' / N_2) + (m'' n'' / N)]},$$

Also

$$\hat{a}_m = \sum_{n''=0}^{N_2-1} C(m'', n'') e^{-2\pi i [(m' n'' / N_2) + (m'' n'' / N)]}$$

wobei

$$C(m'', n'') = \sum_{n'=0}^{N_1-1} e^{-2\pi i m'' n' / N_1} a_{n' N_2 + n''}.$$

Der Punkt ist, dass $C(m'', n'')$ in der Berechnung von a_m für N_2 verschiedene Werte von m erscheint (nämlich $m'', N_1 + m'', 2N_1 + m'', \dots$). Dann können wir Zeit sparen, indem wir dies es nur einmal berechnen. Tatsächlich erfordert die Berechnung jedes $C(m'', n'')$ genau N_1 Elementaroperationen, und es gibt $N_1 N_2 = N$ verschiedene $C(m'', n'')$. D.h., wir brauchen insgesamt $N N_1$ Elementaroperationen. Später brauchen wir N_2 Elementaroperationen um \hat{a}_m , $m = 0, \dots, N$ zu berechnen. Insgesamt, wir brauchen $N(N_1 + N_2)$ Operationen. Die Summe sind also $N(N_1 + N_2)$ elementare Operationen, im Gegensatz zu $N^2 = N(N_1 N_2)$ nach der ursprünglichen Methode. Da $N_1 + N_2$ viel kleiner als $N_1 N_2$ ist, wenn entweder N_1 oder N_2 groß ist, stellt dies eine wesentliche Verbesserung dar.

Wenn N_1 oder N_2 weiter faktorisiert werden können, kann dieser Vorgang wiederholt werden, um die Effizienz noch weiter zu steigern. Das Endergebnis ist, dass wenn $N = N_1 N_2 \dots N_k$ ist, reduziert sich die Anzahl der elementaren Operationen von N^2 auf $N(N_1 + \dots + N_k)$. Insbesondere wenn N eine Potenz von 2 ist, sagen wir $N = 2^k$, ist die Reduktion von $2^{2k} = N^2$ auf $k 2^{k+1} = 2N \log_2 N$; dies ist der in der Praxis am häufigsten verwendete Fall. Der resultierende Algorithmus zum Berechnen diskreter Fourier-Transformationen ist als schnelle Fourier-Transformation bekannt.

Die erste schnelle Fourier-Transformation in der Geschichte wurde möglicherweise von Gauß um 1805 in seinem unveröffentlichten Artikel "Theoria Interpolationis Methodo Nova Tractata" durchgeführt. Gauss untersuchte damit die Deklination* X des Asteroiden Pallas^{†‡} in Abhängigkeit von seine Rektaszension[§] x :

x	X
0°	6°48' Bor.... = + 408'
30	1 29 + 89
60	1 6 Austr..... - 66
90	0 10 Bor + 10
120	5 38 + 338
150	13 27 + 807
180	20 38 + 1238
210	25 11 + 1511
240	26 23 + 1583
270	24 22 + 1462
300	19 43 + 1183
330	13 24 + 804

Gauß teilte mögliche Werte von x in drei Vierergruppen ein und führte dann eine schnelle Fourier-Transformation durch! https://en.wikipedia.org/wiki/2_Pallas#/media/File:Animation_of_Pallas_orbit.gif

Obwohl die schnelle Fourier-Transformation oder Varianten davon bereits 1805 verwendet wurden, wurde sie bis 1965 durch Cooley und Tukey nicht allgemein bekannt.

*Die Deklination in der Astronomie ist ein Äquivalent zur geografischen Breite
 †Dies war der zweite entdeckte Asteroid (1802) in der Geschichte der Menschheit!
 ‡*australis* bedeutet südlich und *borealis* bedeutet nördlich.
 §himmlisches Äquivalent der Geographische Länge

Musterlösungen

Übungsblatt 1

Aufgabe 1

(i) Sei

$$u(x, y) = X(x)Y(y).$$

Dann ist

$$u_x(x, y) = X'(x)Y(y)$$

und

$$u_{yy}(x, y) = X(x)Y''(y),$$

und $u_x = u_{yy}$ impliziert, dass

$$\frac{X'(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} = c.$$

(ii) Sei

$$u(x, y) = X(x)Y(y).$$

Dann ist

$$u_{xx} = X''(x)Y(y), \quad u_{yy} = X(x)Y''(y),$$

und $u_{xx} = -u_{yy}$ impliziert, dass

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = c.$$

(iii) Sei

$$u(x, y) = X(x)Y(y).$$

Dann ist

$$yu_{xx} = X''(x)Y(y)y, \quad u_y = X(x)Y'(y),$$

und $yu_{xx} + u_y = 0$ impliziert, dass

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y'(y)}{Y(y)y}.$$

(iv) Sei

$$u(x, y) = X(x)Y(y).$$

Dann impliziert $u_{xx} + u_{xy} + u_y = 0$, dass

$$X''(x)Y(y) + X'(x)Y'(y) + X(x)Y(y) = 0,$$

und

$$Y(y)(X''(x) + X(x)) + X'(x)Y'(y) = 0,$$

d.h.,

$$\frac{Y(y)}{Y'(y)} = -\frac{X'(x)}{X''(x) + X(x)} = c.$$

Aufgabe 2

Falls $u'_x(0, t) = X'(0)T(t) = 0$ und $u'_x(2\pi, t) = X'(2\pi)T(t) = 0$, dann ist entweder $T(t) = 0$ für alle $t \in [0, \infty)$, oder

$$X'(0) = X'(2\pi) = 0. \quad (\text{IV.3})$$

Die Gleichung $u_t = u_{xx}$ impliziert, dass

$$X''(x) = cX(x), \quad T'(t) = cT(t).$$

Sei $c = 0$. Dann ist $X''(x) = 0$, d.h. $X(x) = ax + b$ für beliebige $a, b \in \mathbb{C}$. Die Randbedingungen (IV.3) impliziert, dass $a = 0$. Dann ist $T'(t) = 0$, dann ist für alle $K \in \mathbb{C}$ die Funktion

$$u(x, t) = K$$

die Lösung.

Sei jetzt $c \neq 0$. Dann ist

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{c}x} + c_2 e^{-\sqrt{c}x},$$

und

$$X'(x) = c_1 \sqrt{c} e^{\sqrt{c}x} - c_2 \sqrt{c} e^{-\sqrt{c}x}.$$

(IV.3) impliziert, dass

$$c_1 - c_2 = 0$$

und

$$e^{2\pi\sqrt{c}} + e^{-2\pi\sqrt{c}} = 0,$$

$$e^{4\pi\sqrt{c}} = 1,$$

dann ist

$$4\pi\sqrt{c} \in 2\pi ik, \quad k \in \mathbb{Z}$$

und

$$c = -\left(\frac{k}{2}\right)^2, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Dann ist

$$u_k(x, t) = c_1 e^{-t\frac{k^2}{4}} (e^{ikx/2} + e^{-ikx/2}).$$

Aufgabe 3

Für $k = 0$,

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \pi h.$$

Für $k \neq 0$,

$$\int_0^d \frac{hx e^{-ikx}}{d} dx = \frac{h(-1 + e^{-idk}(1 + idk))}{dk^2},$$

$$\int_d^{2\pi} \frac{h(2\pi - x)e^{-ikx}}{2\pi - d} dx = -\frac{he^{-i(d+2\pi)k} (ie^{2i\pi k}(-dk + 2\pi k + i) + e^{idk})}{(2\pi - d)k^2}.$$

Übungsblatt 6

Dieses Übungsblatt ist dem berühmten Beispiel von Kolmogorov einer Funktion aus $L^1[0, 2\pi]$ gewidmet, deren Fourier-Reihe fast überall divergiert*. Als Kolmogorov dieses Beispiel entwickelte, glaubten die meisten Mathematiker, dass es eine solche Funktion nicht geben würde.

Wir beginnen den Beweis mit zwei technischen Lemmata.

Lemma IV.2.2. $\exists C > 0$ so dass für alle $[\alpha, \beta] \in \mathbb{R}$ mit $\beta - \alpha \leq \pi$ und für alle $N \geq 0$, gilt

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} D_N(u) du \right| \leq C.$$

Beweis. Wir verwenden die Periodizität des Dirichlet-Kerns, um anzunehmen, dass $[\alpha, \beta] \subset [-\pi, \pi]$. Verwenden Sie dann die Definition des Dirichlet-Kerns und

$$\sin((N + 1/2)u) = \cos(Nu) \sin(u/2) + \sin(Nu) \cos(u/2),$$

um folgendes zu erreichen

$$\begin{aligned} \pi \left| \int_{\alpha}^{\beta} D_N(u) du \right| &= \left| \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin((N + 1/2)u)}{2 \sin(u/2)} du \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \left| \int_{\alpha}^{\beta} \cos(Nu) du \right| + \left| \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin(Nu) \cos(u/2)}{2 \sin(u/2)} du \right| \\ &\leq \frac{\beta - \alpha}{2} + \left| \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin(Nu)}{u} du \right| + \left| \int_{\alpha}^{\beta} \sin(Nu) \left(\frac{1}{2 \tan(u/2)} - \frac{1}{u} \right) du \right|. \end{aligned}$$

Der dritte Summand kann nach oben durch $\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{2 \tan(u/2)} - \frac{1}{u} \right| dt$ begrenzt werden. Wir bemerken, dass der Integrand auf $[-\pi, \pi]$ eine stetige Funktion ist: es reicht, sein Verhalten bei Null zu betrachten und zu prüfen, ob der Integrand in der Nähe von $u = 0$ stetig ist

$$\frac{1}{2 \tan(u/2)} - \frac{1}{u} = \frac{u - 2 \tan(u/2)}{2u \tan(u/2)} \approx \frac{u - u - \frac{u^3}{12} + O(u^5)}{2u \tan(u/2)} \approx \frac{O(u^3)}{O(u^2)}.$$

Dies impliziert, dass der dritte Summand in N gleichmäßig beschränkt ist. Auf der anderen Seite, ist

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin(Nu)}{u} du \right| = |\text{Si}(\beta N) - \text{Si}(\alpha N)| \leq 2 \sup_{s \in [0, \infty)} |\text{Si}(s)|$$

ist auch in N gleichmässig beschränkt. □

Lemma IV.2.3. Sei $[\alpha, \beta] \in [0, 2\pi]$ und sei $\ell \in \mathbb{N}$ so dass

$$\frac{\pi}{\ell + \frac{1}{2}} \leq \frac{1}{4}(\beta - \alpha)$$

für $\gamma \in (0, 1/4)$. Wir definieren $E_{\gamma} := \{x \in [\alpha, \beta] : |\sin((\ell + 1/2)x)| > \gamma\}$. Dann es gilt:

$$\mu(E_{\gamma}) \geq (\beta - \alpha) \left(1 - \frac{4\gamma}{\pi} \right) - \frac{8\gamma}{\ell + 1/2}.$$

Beweis. Wir bemerken[†] dass

$$\sin(2\gamma) > \gamma,$$

und damit

$$\mu(t \in [0, \pi] : \sin t \leq \gamma) \leq 4\gamma = \mu([0, \pi]) \frac{4\gamma}{\pi}.$$

*das dürfte der technischste Satz unseres Kurses der Fourier-Analyse sein

[†]z.B. $(\sin(2x) - x)' = 2 \cos(2x) - 1 > 0$ für $x \in (0, \pi/6)$, und $\gamma = \frac{1}{4} < \pi/6 \approx 0.52$

IV. Fouriertransformation

Sei $I_k := [\frac{\pi(k-1)}{\ell+1/2}, \frac{\pi k}{\ell+1/2}]$. Dann gilt es

$$\mu(t \in I_k : |\sin(t)| \leq \gamma) \leq \frac{4\gamma}{\ell+1/2} = \mu(I_k) \frac{4\gamma}{\pi}.$$

Wir definieren

$$k_1 := \min\{k : \frac{\pi k}{\ell+1/2} \geq \alpha\}, \quad k_2 := \max\{k : \frac{\pi k}{\ell+1/2} \leq \beta\}.$$

Dann für alle $k \in [k_1 + 1, k_2]$, es gilt

$$\mu\{x \in I_k : |\sin((\ell+1/2)x)| \leq \gamma\} \leq \mu(I_k) \frac{4\gamma}{\pi}.$$

Außerdem,

$$\mu(x \in [\alpha, \frac{\pi k_1}{\ell+1/2}] : |\sin((\ell+1/2)x)| \leq \gamma) \leq \frac{4\gamma}{\ell+1/2}$$

und

$$\mu(x \in [\frac{\pi k_2}{\ell+1/2}, \beta] : |\sin((\ell+1/2)x)| \leq \gamma) \leq \frac{4\gamma}{\ell+1/2}.$$

Wenn wir das alles zusammenfassen, erhalten wir

$$\mu(x \in [\alpha, \beta] : |\sin((\ell+1/2)x)| \leq \gamma) \leq \frac{8\gamma}{\ell+1/2} + \sum_{k=k_1+1}^{k_2} \mu(I_k) \frac{4\gamma}{\pi} \leq \frac{8\gamma}{\ell+1/2} + \frac{4\gamma}{\pi} \mu([\alpha, \beta]),$$

was zu beweisen war. □

Jetzt beweisen wir ein großes Lemma, das einige Autoren als Kolmogorovs Lemma bezeichnen. Die Aussage des Lemmas ist ziemlich lang.

Lemma IV.2.4. *Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ such that $\frac{1}{\sqrt{\log n_0}} < 1/4$. Es gilt*

- (i) 2π -periodische Funktionen $\{\phi_n\}_{n=0}^\infty$,
- (ii) mässbare Mengen $\{E_n\}_{n=0}^\infty$ so dass $E_n \subset [0, 2\pi]$,
- (iii) reellen Zahlen $\{M_n\}_{n=0}^\infty$,
- (iv) und natürlichen Zahlen $\{q_n\}_{n=0}^\infty$

so dass

- (i) für alle $n \geq 0$, $\phi_n(x) \geq 0$ und für alle x , es gilt

$$\int_{[0, 2\pi]} \phi_n(x) dx = 2,$$

$\exists B_n$ so dass für alle $N \geq 0$ und $\forall x$,

$$|S_N(\phi_n, x)| \leq B_n,$$

- (ii) $\mu(E_n) \rightarrow 2\pi$, $n \rightarrow \infty$,

- (iii) $M_n \uparrow \infty$, $n \rightarrow \infty$,

- (iv) für alle $x \in E_n$, $\exists N \ni p = p(x) \leq q_n$ so dass

$$|S_p(\phi_n)(x)| > M_n.$$

Beweis. Sei $n \geq n_0$. Wir beginnen mit der induktiven Konstruktion von zwei Folgen: erstens einer Folge von ansteigenden ungeraden ganzen Zahlen

$$\lambda_1 = 5 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_n$$

und dann einer Folge von natürlichen Zahlen

$$m_1 < m_2 < \dots < m_k,$$

mit $(2m_k + 1) = \lambda_k(2n + 1)$. Bevor wir diese Zahlen induktiv konstruieren, definieren wir Zahlen

$$A_k := \frac{4\pi k}{2n + 1}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

Intervalle

$$\Delta_k := \left[A_k - \frac{1}{m_k^2}, A_k + \frac{1}{m_k^2} \right], \quad k = 1, 2, \dots, n$$

und Intervalle

$$\sigma_k := \left[A_{k-1} + \frac{2}{n^2}, A_k - \frac{2}{n^2} \right], \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

Es ist nicht kompliziert, um zu überprüfen dass $\Delta_k \subset [0, 2\pi]$:

$$A_1 - \frac{1}{m_1^2} = \frac{4\pi}{2n + 1} - \frac{1}{m_1^2} > \frac{4\pi}{2n + 1} - \frac{1}{n^2} > 0.$$

Ähnlich, $A_n + \frac{1}{m_n^2} < 2\pi$. Außerdem,

$$A_k - A_{k-1} - \frac{4}{n^2} = \frac{4\pi}{2n + 1} - \frac{4}{n^2} > 0,$$

dann ist $\mu(\sigma_k) > 0$. Wir definieren

$$\phi_{n,k}(x) = \begin{cases} m_k^2/n, & x \in \Delta_k, \\ 0, & \text{else,} \end{cases}$$

und

$$\phi_n(x) = \sum_{k=1}^n \phi_{n,k}(x).$$

Es gilt $\phi_n(x) \geq 0$,

$$\int_{[0, 2\pi]} \phi_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{m_k^2}{n} \mu(\Delta_k) = \sum_{k=1}^n \frac{m_k^2}{n} \frac{2}{m_k^2} = 2.$$

Wir bemerken dass

$$\begin{aligned} |S_N(\phi_n)(x)| &= \left| \int_0^{2\pi} \phi_n(t) D_N(x-t) dt \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \left| \int_{\Delta_k} \phi_{n,k}(t) D_N(x-t) dt \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \frac{m_k^2}{n} \left| \int_{\Delta_k} D_N(x-t) dt \right|. \end{aligned}$$

Wir benutzen Lemma IV.2.2 um den obigen Ausdruck durch $B_n := \sum_{k=1}^n C \frac{m_k^2}{n}$ abzuschätzen, wobei C unabhängig von N ist.

Machen wir nun einen Induktionsschritt. Angenommen, wir haben bereits definiert $\lambda_1 = 5 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{k-1}$. Für $x \in \sigma_k$, wir betrachten

$$\begin{aligned} \left| S_{m_k} \left(\sum_{r=1}^{k-1} \phi_{n,r} \right) (x) \right| &\leq \sum_{r=1}^{k-1} \left| \int_{\Delta_r} \phi_{n,r}(t) D_{m_k}(x-t) dt \right| \\ &= \sum_{r=1}^{k-1} \frac{m_r^2}{n} \left| \int_{\Delta_r} \frac{\sin((m_k + 1/2)(x-t))}{2\pi \sin((x-t)/2)} dt \right|. \end{aligned}$$

IV. Fouriertransformation

Nun wollen wir den zweiten Mittelwertsatz* für bestimmte Integrale anwenden. Weil $x \in \sigma_k$ und $t \in \Delta_r$, die Funktion $\frac{1}{2 \sin((x-t)/2)}$ ist eine monotone Funktion für alle Δ_r außer vielleicht ein r . Es gilt, $x > t$. Außerdem, $\frac{x-t}{2} \in [0, \pi]$. Wir können dieses Δ_r , für das die Funktion nicht monoton ist, in zwei Teile aufteilen: in denen $\frac{1}{2 \sin((x-t)/2)}$ wächst und in denen $\frac{1}{2 \sin((x-t)/2)}$ sinkt.

Es gilt,

$$\text{dist}(\sigma_k, \Delta_{k-1} \cup \Delta_k) \geq \frac{1}{n^2},$$

und damit ist

$$\frac{1}{2 \sin((x-t)/2)} \leq \frac{1}{2 \sin(\frac{1}{2n^2})}.$$

Endlich, für alle γ und δ gilt:

$$\left| \int_{\gamma}^{\delta} \sin((m_k + 1/2)(x-t)) dt \right| < \frac{2}{m_k + 1/2}.$$

Der zweite Mittelwertsatz für bestimmte Integrale impliziert dass

$$\sum_{r=1}^{k-1} \frac{m_r^2}{n} \left| \int_{\Delta_r} \frac{\sin((m_k + 1/2)(x-t))}{2\pi \sin((x-t)/2)} dt \right| \leq \frac{2}{\pi} \frac{1}{2 \sin(\frac{1}{2n^2})} \sum_{r=1}^{k-1} \frac{m_r^2}{n} \frac{2}{m_k + 1/2}.$$

Alles außer m_k ist fixiert. Genau in diesem Moment werden wir m_k so wählen, dass die r.h.s. der vorherigen Gleichung ist kleiner als 1. Nun definieren wir alle m_k und λ_k per Induktion.

Wir führen weitere Schätzungen durch. Erstens, wenn $j \geq k$, dann

$$\begin{aligned} (m_k + \frac{1}{2})(A_j - x) - (m_k + \frac{1}{2})(A_k - x) &= (m_k + \frac{1}{2})(A_j - A_k) \\ &= (2m_k + 1) \frac{2\pi(j-k)}{2n+1} \\ &= 2\pi\lambda_k(j-k) \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\sin((m_k + \frac{1}{2})(A_j - x)) = \sin((m_k + \frac{1}{2})(A_k - x)).$$

Zweitens, für alle $p \in \mathbb{N}$,

$$|D'_p(x)| \leq \frac{p^2}{\pi}.$$

Falls $j \geq k$ und $t \in \Delta_j$, wir haben für alle $x \in \sigma_k$

$$|D_{m_k}(t-x) - D_{m_k}(A_j-x)| \leq \frac{m_k^2}{\pi} |A_j - t| \leq \frac{m_k^2 |\Delta_j|}{2\pi} = \frac{m_k^2}{m_j^2 \pi}.$$

Dann es für alle $x \in \sigma_k$ gilt:

$$\begin{aligned} I_1 &:= \left| \sum_{j=k}^n \frac{m_j^2}{n} \int_{\Delta_j} D_{m_k}(t-x) - D_{m_k}(A_j-x) dt \right| \\ &\leq \sum_{j=k}^n \frac{m_j^2}{n} \frac{m_k^2}{\pi m_j^2} \mu(\Delta_j) \leq 2 \sum_{j=k}^n \frac{m_k^2}{\pi n m_j^2} \leq 2 \sum_{j=k}^n \frac{1}{n\pi} < 1, \end{aligned}$$

*Sei $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine positiv monoton fallende Funktion und sei $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion, dann existiert eine Zahl $x \in (a, b)$, so dass

$$\int_a^g G(t)\phi(t)dt = G(a+) \int_a^x \phi(t)dt.$$

dann ist

$$\begin{aligned}
S_{m_k} \left(\sum_{j=k}^n \phi_{n,j} \right) (x) &= \left| \sum_{j=k}^n \frac{m_j^2}{n} \int_{\Delta_j} D_{m_k}(x-t) dt \right| \\
&\geq \left| \sum_{j=k}^n \frac{m_j^2}{n} \int_{\Delta_j} D_{m_k}(A_j-x) dt \right| - I_1 \\
&\geq \left| \sum_{j=k}^n \frac{m_j^2}{n} D_{m_k}(A_j-x) \frac{2}{m_j^2} \right| - 1 \\
&= \frac{2}{n\pi} \left| \sum_{j=k}^n \frac{\sin((m_k+1/2)(A_j-x))}{2 \sin((A_j-x)/2)} \right| - 1
\end{aligned}$$

Alle Rechner in der Summe sind durch eine obige Beobachtung gleich; außerdem sind alle Nenner nicht negativ, weil $A_j - x \in [0, 2\pi]$ und $A_j - x \leq \frac{4\pi(j-k+1)}{2n+1}$.

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi n} |\sin((m_k+1/2)(A_k-x))| \sum_{j=k}^n \frac{1}{2 \sin((A_j-x)/2)} - 1 \\
&\geq \frac{2}{\pi n} |\sin((m_k+1/2)(A_k-x))| \sum_{j=k}^n \frac{1}{A_j-x} - 1 \\
&\geq \frac{2}{\pi n} |\sin((m_k+1/2)(A_k-x))| \sum_{j=k}^n \frac{1}{\frac{4\pi(j-k+1)}{2n+1}} - 1 \\
&= \frac{2n+1}{4\pi^2 n} |\sin((m_k+1/2)(A_k-x))| \sum_{j=k}^n \frac{1}{j-k+1} - 1.
\end{aligned}$$

Sei jetzt $2 \leq k \leq n - \sqrt{n}$. Die obige Summe ist eine harmonische Reihe, die mindestens \sqrt{n} Summanden enthält*.

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{2n+1}{4\pi^2 n} |\sin((m_k+1/2)(A_k-x))| \ln(\sqrt{n}) - 1 \\
&\geq \frac{1}{\pi^2} |\sin((m_k+1/2)(A_k-x))| \ln(n) - 1.
\end{aligned}$$

Nun bezeichnen wir für $2 \leq k \leq n - \sqrt{n}$,

$$E_{n,k} := \left\{ x \in \sigma_k : |\sin((m_k+1/2)(A_k-x))| \geq \frac{1}{\sqrt{\ln(n)}} \right\}.$$

Wir können das zweite Lemma anwenden, weil wir $\ln(n)$ so gewählt haben, dass $\frac{1}{\sqrt{\ln(n)}} < \frac{1}{4}$, und weil

$$\frac{\mu(\sigma_k)}{4} = \frac{\pi}{2n+1} - \frac{1}{n^2} \geq \frac{\pi}{2(2n+1)}$$

zusammen mit $(2m_1+1) = 5(2n+1) \implies \frac{\pi}{m_k+1/2} \leq \frac{2\pi}{5(2n+1)} \leq \frac{\pi}{2(2n+1)} \leq \frac{1}{4}\mu(\sigma_k)$. Sei

$$E_n := \cup_{k=2}^{n-\sqrt{n}} E_{n,k}.$$

Lemma IV.2.3 impliziert, dass

$$\mu(E_{n,k}) \geq \mu(\sigma_k) \left(1 - \frac{4}{\pi\sqrt{\ln(n)}}\right) - \frac{8}{\sqrt{\ln(n)}(m_k + \frac{1}{2})} \geq \mu(\sigma_k) \left(1 - \frac{4}{\pi\sqrt{\ln(n)}}\right) - \frac{8}{n\sqrt{\ln(n)}}.$$

*und wir verwenden $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \approx \ln(N) + \gamma + O(1/N)$

IV. Fouriertransformation

Dann ist,

$$\mu(E_n) = (n - \sqrt{n} - 1) \left(\left(\frac{4\pi}{2n+1} - \frac{4}{n^2} \right) \left(1 - \frac{4}{\pi\sqrt{\ln(n)}} \right) - o(1/n) \right) = 2\pi + o(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Sei nun $M_n := \frac{1}{4\pi^2} \sqrt{\ln(n)} - 2$ und $q_n := m_n$. Falls $x \in E_n \implies \exists k_0 \in [2, n - \sqrt{n}] : x \in E_{n, k_0} \implies$

$$|S_{m_k}(\phi_n)(x)| \geq \left| S_{m_k} \left(\sum_{j=k}^n \phi_{n,j} \right) (x) \right| - \left| S_{m_k} \left(\sum_{j=1}^{k-1} \phi_{n,j} \right) (x) \right| \geq \frac{\sqrt{\ln(n)}}{4\pi^2} - 1 - 1 =: M_n.$$

Dies gilt für alle k mit $m_k \leq m_n = q_n$. □

Jetzt beweisen wir endlich den Satz von Kolmogorov:

Satz IV.2.5. $\exists f \in L^1([0, 2\pi])$ so dass seine Fourier-Reihe fast überall divergiert.

Beweis. Wir konstruieren eine aufsteigende Zahlenfolge n_i mit folgenden Bedingungen:

(i) $n_1 \geq n_0$,

(ii) mit $M_n \uparrow \infty$ wählen wir $\frac{1}{\sqrt{M_{n_i}}} \leq \frac{1}{2^i}$,

(iii) $\forall i > 1$,

$$\sum_{j=1}^{n_i} B_{n_j} < \frac{1}{2} \sqrt{M_{n_i}},$$

(iv)

$$\frac{\max_{1 \leq j \leq i-1} (q_{n_j} + \frac{1}{2})}{\sqrt{M_{n_i}}} \leq \frac{1}{2^i}, \quad i = 2, 3, \dots$$

Nun definieren wir die Funktion

$$f(x) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi_{n_i}(x)}{\sqrt{M_{n_i}}}.$$

Wir bemerken

$$\int_{[0, 2\pi]} |f(x)| dx = \int_{[0, 2\pi]} f(x) dx = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{M_{n_i}}} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{2^i} < \infty \implies f \in L^1([0, 2\pi]).$$

Sei $i > 1$ und sei $x \in E_{n_i}$, dann $\exists p = p(x) \leq q_{n_i}$ so dass

$$|S_p(\phi_{n_i})(x)| > M_{n_i}.$$

Wir bemerken dass für alle $g \in L^1([0, 2\pi])$ und $p \in \mathbb{N}$,

$$|S_p(g)(x)| = \left| \int_{[0, 2\pi]} g(t) D_p(x-t) dt \right| \leq \frac{p + \frac{1}{2}}{\pi} \int_{[0, 2\pi]} |g(t)| dt.$$

Jetzt gilt es

$$\begin{aligned}
|S_p(f)(x)| &= \left| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{S_p(\phi_{n_j})(x)}{\sqrt{M_{n_j}}} \right| \\
&\geq \frac{S_p(\phi_{n_i})(x)}{\sqrt{M_{n_i}}} - \left| \sum_{j<i} \frac{S_p(\phi_{n_j})(x)}{\sqrt{M_{n_j}}} \right| - \left| \sum_{j>i} \frac{S_p(\phi_{n_j})(x)}{\sqrt{M_{n_j}}} \right| \\
&\geq \sqrt{M_{n_i}} - \sum_{j<i} B_{n_j} - \sum_{j>i} \frac{p + \frac{1}{2}}{\sqrt{M_{n_j}}} \int_{[0,2\pi]} \phi_{n_j}(x) dx \\
&\geq \sqrt{M_{n_i}} - \frac{1}{2} \sqrt{M_{n_i}} - 2 \sum_{j>1} \frac{q_{n_i} + \frac{1}{2}}{\sqrt{M_{n_j}}} \\
&\geq \frac{1}{2} \sqrt{M_{n_i}} - 2 \sum_{j=i+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2} \sqrt{M_{n_i}} - 1.
\end{aligned}$$

Sei

$$E := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=k}^{\infty} E_{n_i}.$$

Wir bemerken dass $\mu(E_{n_i}) \rightarrow 2\pi \implies \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_{n_i}) = 2\pi \implies \mu(E) = 2\pi$. Dann für alle $x \in E$,

$$\sup_M |S_M(f)(x)| = \infty.$$

□