Übungsblatt 3

Aufgabe (6*0.5pt)**.** Welche der folgenden Funktionen sind stetig, stückweise stetig, stückweise glatt auf $[-\pi, \pi]$?

(i) $f(\theta) = \csc\theta$,

(ii) $f(\theta) = (\sin(\theta))^{1/3}$,

(iii) $f(\theta) = (\sin(\theta))^{5/3}$,

(iv) $f(\theta) = \begin{cases} \cos(\theta), & \theta > 0, \\ -\cos(\theta), & \theta \leq 0, \end{cases}$

(v) $f(\theta) = \begin{cases} \sin(\theta), & \theta > 0, \\ \sin(2\theta), & \theta \leq 0, \end{cases}$

(vi) $f(\theta) = \begin{cases} (\sin(\theta))^{1/5}, & \theta < \pi/2, \\ \cos(\theta), & \theta \geq \pi/2. \end{cases}$

Aufgabe (3+3pt)**.** (i) Unter Verwendung der Fourier-Reihe von

$$f(\theta) = \theta(\pi - |\theta|), \quad -\pi < \theta < \pi,$$

beweisen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

(ii) Unter Verwendung der Fourier-Reihe von

$$f(\theta) = e^{b\theta}, \quad -\pi < \theta < \pi,$$

beweisen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + b^2} = \frac{\pi}{2b}\operatorname{csch}(b\pi) - \frac{1}{2b^2}.$$

Aufgabe (1.5+1.5pt)**.** (i) Erhalten Sie die Fourier-Reihe für $\operatorname{sign}(x)$ aus der Fourier-Reihe von $|x|$ mit Hilfe der Differentiation.

(ii) Sei $f(\theta)$ eine periodische Funktion so dass

$$f(\theta) = e^{\theta}, \quad -\pi < \theta \leq \pi,$$

mit die Fourier Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$. Dann ist

$$e^{\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}.$$

wenn wir versuchen, es formal zu differenzieren, erhalten wir

$$e^{\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} inc_n e^{in\theta}.$$

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$

$$c_n = inc_n, \text{ oder } (1 - in)c_n = 0, \text{ oder } c_n = 0.$$

Das ist offensichtlich falsch. Wo ist der Fehler?