Übungsblatt 4, oder Nilpferd in Burgunder

Die nächste Übung widmet sich dem „Schließen der Lücken“ in den Beweisen von Vorlesung 4. Insbesondere die letzten zwei Teile sollen die Abschätzung des Gibbs-Phänomens abschließen.

Aufgabe (3*0.5pt)**.** (i) Beweisen Sie den Weierstrass M-Test.

(ii) Beweisen Sie, dass

$$Si(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos(x)}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2} + \int_x^\infty \frac{\sin(t)}{t^3} dt$$

und folgern Sie daraus, dass $\lim_{x\to\infty} Si(x) = \frac{\pi}{2}$.

(iii) Beweisen Sie, dass die Menge der lokalen Extrema von $Si(x)$ mit $\{\pi k, k \in \mathbb{N}\}$ zusammenfällt. Beweisen Sie, dass $\sup_{x\in[0,\infty)} Si(x) = Si(\pi)$.

Aufgabe (1+2pt)**.** Beweisen Sie mit der Fourier-Reihe für $f(\theta) = \theta^2$ auf $(-\pi, \pi)$ und dem Satz zur Integration von Fourier-Reihen, dass $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ und $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$. Falls Sie die geschlossene Formel für $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3}$ (so genannte Apéry’s constant) finden, erhalten Sie 10000pt.

Aufgabe (0.5+0.5+0.5pt)**.** Verwenden Sie Lemma II.2.18 um herauszufinden, zu welcher $C^{(k)}$ die folgenden Funktionen gehören:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n^{202.2}+n^{42}-1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{2^{n+3}}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(3^n\theta)}{3^n}.$$

Aufgabe (2+1+1pt)**.** Sei $f : [0, l] \to \mathbb{R}$ eine stetige und teilweise glatte Funktion und sei

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp(-\tfrac{n^2\pi^2 kt}{l^2}) \sin(\tfrac{n\pi x}{l}), \text{ wobei } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\tfrac{n\pi x}{l}).$$

(i) Sei $\varepsilon > 0$. Beweisen Sie mit Hilfe vom Weierstrass M-test, dass für $0 \le x \le l$ und $t \ge \varepsilon$, die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt}\left(b_n \exp(-\tfrac{n^2\pi^2 kt}{l^2}) \sin(\tfrac{n\pi x}{l})\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2}{dx^2}\left(b_n \exp(-\tfrac{n^2\pi^2 kt}{l^2}) \sin(\tfrac{n\pi x}{l})\right)$$

absolut und gleichmäsig konvergieren. Folgern Sie daraus, dass für $0 \le x \le l$ und $t \ge \varepsilon$, die Funktion $u(x,t)$ die Gleichung $u_t = ku_{xx}$ erfüllt.

(ii) Zeigen Sie mit Hilfe von Weierstrass M-test, dass für $x \in [0, l]$ und $t \ge 0$, die Funktion $u(x,t)$ stetig ist und dass

$$\lim_{x\to 0} u(x,t) = \lim_{x\to l} u(x,t) = 0$$

und

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = f(x).$$

(iii) Was passiert, wenn wir $t < 0$ betrachten?

Aufgabe (0.5+1+0.5pt)**.** (i) Sei $k > 0$ und sei

$$u_t = k(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}).$$

Zeigen Sie, dass für beliebige $a \in \mathbb{R}_+$, die Funktion

$$g(t,x,y,z) = u(a^2t, ax, ay, az)$$

auch

$$g_t = k(g_{xx} + g_{yy} + g_{zz})$$

erfüllt.

(ii) Sei $\varepsilon > 0$ eine sehr kleine reelle Zahl und sei $k > 0$. Wir betrachten alle Punkte in einem Hackbraten[1]

$$H = \{(x, y, z) \in \text{Hackbraten}\}.$$

Sei

$$u(0, x, y, z) = \begin{cases} t_0 \text{ für } (x, y, z) \in H \text{ so dass } d((x, y, z), \partial H) > 2\varepsilon, \\ T_0 \text{ für } (x, y, z) \in H \text{ so dass } d((x, y, z), \partial H) < \varepsilon, \end{cases}$$

$$u(t, x, y, z) = T_0 \text{ für } (x, y, z) \in \partial H, \quad t > 0,$$

und

$$u_t = k(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \quad t > 0, \ (x, y, z) \in H.$$

Wenn wir davon ausgehen, dass t_0 die Temperatur Ihres Kühlschranks und T_0 die Ofentemperatur ist, dann wird die Funktion $u(t, x, y, z)$ die Temperatur eines Hackbratens zum Zeitpunkt t um Punkt (x, y, z) beschreiben.

Nehmen wir nun an, Sie wollten ein Stück Fleisch von 1000 Gramm kaufen. Sie wissen, dass Ihr Ofen 60 Minuten braucht, um die Mitte eines Hackbratens auf eine Temperatur von 75 Grad zu erhitzen. Nachdem Sie das Fleisch zu Hause gewogen hatten, stellten Sie fest, dass Sie nur 900 Gramm Fleisch gekauft hatten. Wie viel Zeit wird Ihr Ofen benötigen, die Mitte eines Kerntemperaturs des Hackbratens ähnlichen Form auf eine Temperatur von 75 Grad zu erhitzen?

(iii) Das Folgende ist ein Rezept aus dem Buch "Der Gute Geschmack" von Loriot:

Etwas für festliche Tage, vorausgesetzt, daß sich das Nilpferd in Burgunder wohl fühlt. Nilpferd waschen und trocknen, in passendem Schmortopf mit 2000 Litern Burgunder, 6 bis 8 Zwiebeln, 2 kleinen Mohrrüben und einigen Nelken 8 bis 14 Tage kochen, herausnehmen, abtropfen lassen und mit Petersilie servieren.

Nehmen Sie an, dass das Gewicht des Bratens aus der vorherigen Übung mit dem Gewicht eines realen Nilspferds übereinstimmt (und dass der Ofen, die Temperaturen usw. die gleichen sind wie in (ii)). Ein Nilpferd wiegt circa 3000 kg. Wie viel Zeit benötigen Sie, um die Mitte Ihres Bratens auf 75 Grad zu erhitzen? Sind die Zeit in Loriots Rezept realistisch?

[1] Wenn Sie Vegetarier sind, nehmen Sie gedanklich anstelle einen Tortenbrie