Übungsblatt 5

Sei $f, g \in L^2(a,b)$, wobei $-\infty < a < b < \infty$ und sei

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx, \quad \|f\| := \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Aufgabe (2+2+2pt). (i) Sei $f_n \in L^2(a,b)$ so dass

$$\|f_n - f\| \to 0.$$

Zeigen Sie, dass für alle $g \in L^2(a,b)$,

$$\langle f_n, g\rangle \to \langle f, g\rangle.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Cauchy-Schwarz Ungleichung für $\langle f_n - f, g\rangle$.

(ii) Zeigen Sie, dass für alle $f_1, f_2 \in L^2(a,b)$,

$$\|f_1 + f_2\| \le \|f_1\| + \|f_2\|$$

und

$$\big|\|f\| - \|g\|\big| \le \|f - g\|.$$

Folgern Sie daraus, dass $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$ impliziert $\|f_n\| \to \|f\|$.

(iii) Zeigen Sie, dass für eine beliebige Funktion $h \in PC(a,b)$, es existiert eine Folge stetigen Funktionen $h_n \in C^0([a,b])$ für $n \in \mathbb{N}$ so dass

$$\lim_{n\to\infty} \|h_n - h\| = 0.$$

Hinweis: Es existiert ein konstruktiver Beweis: Denken Sie darüber nach, wie Sie eine Funktion h in der Umgebung jeder Diskontinuität glätten können.

Sei

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n), \quad x \in [-1,1], n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe (2+2+2pt). (i) Zeigen Sie, dass für $n \neq m$, es gilt

$$\int_{-1}^1 P_n(x)\overline{P_m(x)}dx = 0.$$

Hinweis: partielle Integration.

(ii) Zeigen Sie, dass es gilt

$$\int_{-1}^1 P_n(x)\overline{P_n(x)}dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n n!}\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx.$$

Interessanteweise[1], es gilt

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n n!}\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx = \frac{2}{2n+1}.$$

(iii) Zeigen Sie, dass

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

[1]das müssen Sie nicht zeigen, aber falls Sie wissen, was eine Gamma-Funktion ist, können Sie die Gleichung zeigen und 2 extra-Punkten kriegen