Übungsblatt 6

Die folgenden Lemmata sind erste Schritte in Richtung des Kolmogorov-Beispiels einer integrierbaren Funktion, deren Fourier-Reihe für fast alle Punkte divergiert.

Aufgabe (Kolmogorov Beispiel, Teil 1, 1+3pt). (i) Zeigen Sie, dass $\exists C > 0$ sodass für alle $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ mit $\beta - \alpha \leq \pi$ und $\forall N \geq 0$ gilt[1]:

$$\left| \int_\alpha^\beta D_N(u)du \right| \leq C.$$

(ii) Sei $[\alpha, \beta] \in [0, 2\pi]$ und sei $\ell \in \mathbb{N}$ sodass

$$\frac{\pi}{\ell + 1/2} \leq \tfrac{1}{4}(\beta - \alpha)$$

und $\gamma \in (0, \frac{1}{4})$. Sei

$$E_\gamma = \{x \in [\alpha, \beta] : |\sin((\ell + 1/2)x)| > \gamma\}.$$

Beweisen Sie, dass [2]

$$\mu(E_\gamma) \geq (\beta - \alpha)\left(1 - \frac{4\gamma}{\pi}\right) - \frac{8\gamma}{\ell + \frac{1}{2}}.$$

Aufgabe (Kolmogorov Beispiel, Teil 2, 2+4pt). Sei $n \geq n_0$, sei $\lambda_k \in 2\mathbb{N} + 1$ für $k = 1, \ldots, n$ so dass

$$\lambda_1 = 5 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$$

und sei

$$m_k := (\lambda_k(2n + 1) - 1)/2, \quad A_k := \frac{4\pi k}{2n + 1}, \quad \Delta_k := [A_k - \frac{1}{m_n^2}, A_k + \frac{1}{m_n^2}] \quad k = 1, \ldots, n$$

und

$$\sigma_k := \left[A_{k-1} + \frac{2}{n^2}, A_k - \frac{2}{n^2}\right], \quad k = 2, \ldots, n.$$

Sei

$$\varphi_{n,k}(x) := \begin{cases} \frac{m_k^2}{n}, & x \in \Delta_k, \\ 0, & x \in [0, 2\pi] \setminus \Delta_k \end{cases}$$

und

$$\varphi_n(x) := \sum_{k=1}^n \varphi_{n,k}(x).$$

[1] *Hinweis:* Beweisen Sie, dass

$$D_N(u) = \frac{1}{2}\cos(Nu) + \frac{\sin(Nu)}{u} + \sin(Nu)\left(\frac{1}{2\tan(u/2)} - \frac{1}{u}\right).$$

[2] *Hinweis:* Beweisen Sie, dass

$$\mu(t \in [0, \pi] : \sin(t) \leq \gamma) \leq 4\gamma = \mu([0, \pi]) \cdot \frac{4\gamma}{\pi}.$$

Folgern Sie daraus, dass für $I_k := [\frac{\pi(k-1)}{\ell+1/2}, \frac{\pi k}{\ell+1/2}]$ gilt

$$\mu(t \in I_k : |\sin(t)| \leq \gamma) \leq \frac{4\gamma}{\ell + 1/2}.$$

Versuchen Sie,

$$\mu(x \in [\alpha, \beta] : |\sin((\ell + 1/2)x)| \leq \gamma)$$

zu beschätzen.

(i) Beweisen Sie, dass jede Funktion φ_n eine non-negative Funktion von beschränkter Variation mit

$$\int_0^{2\pi} \varphi_n(x)dx = 2$$

ist. Benutzen Sie Aufgabe 1(i) um zu zeigen, dass $\exists B_n : \forall N \geq 0$ und $\forall x \in [0, 2\pi]$ gilt

$$|S_N(\varphi_n)(x)| \leq B_n.$$

(ii) Beweisen Sie, dass für alle $x \in \sigma_k$,

$$\left| S_{m_k}\left(\sum_{r=1}^{k-1} \varphi_{n,r}\right)(x)\right| \leq \frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{k-1} \frac{m_r^2}{n}\left|\int_{A_r} \frac{\sin((m_k+1/2)(x-t))}{2\sin((x-t)/2)}dt\right| \leq \frac{1}{\pi\sin(1/(2n^2))}\sum_{r=1}^{k-1}\frac{2m_r^2}{n(m_k+1/2)}.$$

Wir wählen m_k induktiv so, dass $\left|S_{m_k}\left(\sum_{r=1}^{k-1}\varphi_{n,r}\right)(x)\right| < 1$.

(iii) Zeigen Sie, dass $|D_p'(x)| \leq p^2$ und dass für alle $j > k$ und $t \in \Delta_j$, es gilt

$$|D_{m_k}(t-x) - D_{m_k}(A_j - x)| \leq \frac{m_k^2}{m_j^2}.$$

Zeigen Sie, dass für alle $x \in \sigma_k$,

$$\begin{aligned}
\left|S_{m_k}\left(\sum_{j=k}^{n}\varphi_{n,j}\right)(x)\right| \geq \frac{1}{\pi}\left|\sum_{j=k}^{n}\right| &\geq \frac{1}{\pi}\left|\sum_{j=k}^{n}\frac{m_j^2}{n}\int_{A_j} D_{m_k}(A_j-x)dt\right| \\
&\quad - \frac{1}{\pi}\left|\sum_{j=k}^{n}\frac{m_j^2}{n}\int_{A_j} D_{m_k}(t-x) - D_{m_k}(A_j-x)dt\right| \\
&\geq \frac{1}{\pi}\left|\sum_{j=k}^{n}\frac{2}{n}D_{m_k}(A_j-x)\right| - 1 \\
&\geq \frac{2}{\pi n}|\sin((A_k-x)(m_k+1/2))|\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{2\sin((A_j-x)/2)} - 1.
\end{aligned}$$