Übungsblatt 7

Aufgabe (Besselsche Ungleichung). (3 pt) Sei $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine orthonormale Menge in $L^2(a,b)$ und sei $f \in L^2(a,b)$. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \phi_n \rangle|^2 \leq \|f\|^2.$$

Hinweis: Benutzen Sie

$$0 \leq \|f - \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n\|^2.$$

Aufgabe (Die beste L^2-Approximation). (3+3+3)

(i) Sei $\{\phi_n\}$ eine orthonormale Menge in $L^2([0,1])$ und sei $f \in L^2([0,1])$. Beweisen Sie, dass

$$\|f - \sum_n \langle f, \phi_n \rangle \phi_n\| \leq \|f - \sum_n c_n \phi_n\|$$

für alle beliebige c_n mit $\sum |c_n|^2 < \infty$. Zeigen Sie, dass die Gleichheit nur gilt, wenn $c_n = \langle f, \phi_n \rangle$ für alle n.

Hinweis: Zeigen Sie, dass

$$\|f - \sum_n c_n \phi_n\|^2 = \|f - \sum_n \langle f, \phi_n \rangle \phi_n\|^2 + \sum_n |\langle f, \phi_n \rangle - c_n|^2.$$

(ii) Finden die beste Approximation von $f(x) = x$ auf dem Intervall $[0, \pi]$ in der L^2-Norm in der Klasse aller Funktionen der Form $a_0 + a_1 \cos(x) + a_2 \cos(2x)$.

(iii) Finden die beste Approximation von $f(x) = |x|$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ in der L^2-Norm in der Klasse aller Funktionen der Form $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$.

Hinweis: Benutzen Sie die orthonormale Menge aus Übungsblatt 5.