Übungsblatt 8

Aufgabe (1+1+2+2pt)**.** Beweisen Sie Satz IV.1.3.

Aufgabe (1pt)**.** Sei

$$\chi_a(x) := \begin{cases} 1, & |x| < a, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie $\hat{f}(\xi)$.

Aufgabe (1+1pt)**.** Sei $f(x) := e^{-ax^2/2}$ für $a > 0$.

(i) Zeigen Sie, dass $f'(x) + axf(x) = 0$ und $i\xi\hat{f}(\xi) + ia\widehat{[f]}'(\xi) = 0$.

(ii) Beweisen Sie, dass

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-\xi^2/(2a)}.$$

Aufgabe (1pt)**.** Sei $f(x) := e^{-a|x|}$ für $a > 0$. Zeigen Sie, dass $\hat{f}(\xi) = 2a(\xi^2 + a^2)^{-1}$.

Aufgabe (2pt)**.** Sei

$$u_t(x, 0) = u_{xx}(x, 0), \quad -\infty < x < \infty$$

und

$$u(x, 0) = f(x) \in L^1(\mathbb{R}).$$

Zeigen Sie mindestens formal, dass

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(\xi) e^{-k\xi^2 t} e^{i\xi x} d\xi,$$

oder

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int f(y) e^{-(x-y)^2/(4kt)} dy,$$

erfüllt die obige partielle Differentialgleichung.