Übungsblatt 9

Aufgabe (3pt). Zeigen Sie dass für eine beliebige Funktion $f \in L^2$ und alle $\delta > 0$, existiert eine Funktion g so dass

(i) g verschwindet außerhalb eines endlichen Intervalls,

(ii) $\|f - g\| < \delta$.

Hinweis: Nehmen Sie

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & |x| < N, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und $g = F * K_\epsilon$, wobei

$$K(y) = \begin{cases} C^{-1} e^{-1/(1-y^2)}, & |y| < 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad C = \int_{-1}^{1} e^{-1/(1-y^2)} dy$$

und $K_\epsilon(y) = \frac{1}{\epsilon} K(\frac{y}{\epsilon})$.

Aufgabe (3pt). Verwenden Sie die Fourier-Transformation, um eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$u'' - u + 2g(x) = 0, \quad g \in L^1$$

zu finden.

Aufgabe (2+2pt). Sei

$$\Delta_a f = \frac{\int (x-a)^2 |f(x)|^2 dx}{\int |f(x)|^2 dx}$$

und sei $F(x) := e^{-i\alpha x} f(x + a)$.

(i) Zeigen Sie, dass $\Delta_a f = \Delta_0 F$.

(ii) Zeigen Sie, dass $\hat{f}(\xi) = e^{ia(\xi+\alpha)} \hat{f}(\xi + \alpha)$ und $\Delta_\alpha \hat{f} = \Delta_0 \hat{f}$.