Übungsblatt 10

Sei $x, y \in \mathbb{R}^n$ und sei

$$x \cdot y = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j, \quad |x| = (x \cdot x)^{1/2}.$$

Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren

$$\hat{f}(\xi) = \mathscr{F}[f(x)] = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} f(x) dx.$$

Aufgabe (3pt)**.** Sei R eine Drehung von $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass

$$\mathscr{F}[f(Rx)] = \hat{f}(R\xi).$$

Wie ändert sich Satz IV.1.3?

Aufgabe (3pt)**.** Zeigen Sie, dass für $a, b > 0$, es gilt

$$\int \frac{\sin(at)\sin(bt)}{t^2} dt = \pi \min(a, b), \quad \int \frac{t^2}{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)} dt = \frac{\pi}{a + b}.$$

Aufgabe (3+3pt)**.** (i) Sei

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, y > 0$$

und

$$u(x, 0) = f(x), \quad f \in L^1, |f| < M.$$

Finden Sie eine beschränkte Lösung der partiellen Differentialgleichung.

(ii) Sei $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ mit

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x).$$

Zeigen Sie, dass

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\psi(x - ct) + \phi(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy.$$