Dr. Ksenia Fedosova
Dr. Andreas Demleitner SS 2023

Übungsaufgaben zur Vorlesung „Analytische Zahlentheorie“

Blatt 2

Aufgabe 1: (3+2 Punkte)

(1) Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir die *verallgemeinerten Teilersummenfunktionen* $d_x \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ durch

$$d_x(n) := \sum_{d|n} d^x.$$

Unterprüfen Sie d_x auf (vollständige) Multiplikativität.

(2) Sei $\varepsilon \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ definiert durch $\varepsilon(n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei id die Inklusion $\mathbb{N} \subset \mathbb{C}$. Drücken Sie die Faltungen $\varepsilon * \varepsilon$ und $\varepsilon * \mathrm{id}$ als verallgemeinerte Teilersummenfunktionen aus.

Aufgabe 2: (2+3+3 Punkte)
Sei d_0 definiert wie in Aufgabe 1.

(1) Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_0(n^2)}{n^s}$ für $\sigma = \mathrm{Re}(s) > 3$ konvergiert.

(2) Zeigen Sie für $\sigma = \mathrm{Re}(s) > 3$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_0(n^2)}{n^s} = \prod_{p \text{ prim}} \frac{p^s(p^s+1)}{(p^s-1)^2}.$$

(3) Folgern Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_0(n^2)}{n^s} = \frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)}$$

für alle s mit $\sigma > 1$.

Aufgabe 3: (3 Punkte)
Sei $x \in \mathbb{R}$ und d_x wie in Aufgabe 1. Zeigen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_x(n)}{n^s} = \zeta(s)\zeta(s-x)$$

für $\sigma = \mathrm{Re}(s) > \max\{1,\ x+1\}$.

Abgabedetails: Am **Mittwoch, 03. Mai 2023**, Anfang der Übung.

Generelle Informationen:

- Mathematische Folgerungen sollen vollständig begründet werden.
- Übungsblätter können maximal **zu zweit** abgegeben werden. Abgabe zu zweit wird empfohlen.