
Übungsaufgaben zur Vorlesung „Analytische Zahlentheorie“

Blatt 4

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\sigma = \operatorname{Re}(s) > 1$ gilt: $s \cdot \Gamma(s) = \Gamma(s + 1)$. Folgern Sie $\Gamma(n + 1) = n!$ für $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Berechnen Sie $\zeta(-1)$, $\zeta(-2)$, $\zeta(-3)$ und $\zeta(2)$.

Aufgabe 3: (2+6 Punkte)

Zeigen Sie $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Gehen Sie wie folgt vor:

(1) Zeigen Sie zunächst $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$.

(2) Folgern Sie

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

und nutzen Sie Polarkoordinaten, um das Doppelintegral zu berechnen.

Bonusaufgabe 4: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für $u > 0$ und $\xi \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} e^{-\pi ux^2} dx = \frac{e^{-\xi^2/(4\pi u)}}{\sqrt{u}}.$$

Abgabedetails: Am **Mittwoch, 17. Mai 2023**, Anfang der Übung.

Generelle Informationen:

- Mathematische Folgerungen sollen vollständig begründet werden.
- Übungsblätter können maximal **zu zweit** abgegeben werden. Abgabe zu zweit wird empfohlen.