Dr. Ksenia Fedosova
Dr. Andreas Demleitner SS 2023

Übungsaufgaben zur Vorlesung „Analytische Zahlentheorie“

Blatt 5

Aufgabe 1: (2+2+2 Punkte)

(1) Sei χ ein Dirichlet-Charakter modulo N. Begründen Sie mithilfe vorheriger Übungsaufgaben und Resultaten der Vorlesung kurz, dass $L(s,\chi)$ eine meromorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C}$ besitzt.

(2) Sei χ_0 Hauptcharakter modulo N. Zeigen Sie, dass $L(s,\chi_0)$ in 1 einen Pol der Ordnung 1 hat.

Aufgabe 2: (3+2+2+1)

Sei G eine endliche abelsche Gruppe und $\widehat{G}$ die Gruppe der Gruppenhomomorphismen $G \to \mathbb{C}^*$ bzgl. der Multiplikation. Zeigen Sie:

(1) $|\widehat{G}| = |G|$.

(2) Für $\chi \in \widehat{G}$ gilt:

$$\sum_{g\in G} \chi(g) = \begin{cases} |G|, & \text{falls } \chi \text{ trivial} \\ 0, & \text{falls } \chi \text{ nicht-trivial} \end{cases}$$

(3) Für $g \in G$ gilt:

$$\sum_{\chi\in \widehat{G}} \chi(g) = \begin{cases} |G|, & \text{falls } g = 0 \\ 0, & \text{falls } g \neq 0 \end{cases}$$

(4) Sei N eine natürliche Zahl. Erklären Sie kurz, wie ein Dirichlet-Charakter χ modulo N ein Element $\chi' \in \widehat{(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*}$ liefert.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Für eine natürliche Zahl N betrachte man

$$F(s) := \prod_{\chi} L(s,\chi),$$

wobei das Produkt über alle Dirichlet-Charaktere modulo N läuft.
Zeigen Sie, dass $F(s) \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ für $s \in \mathbb{R}_{\geq 1}$, falls F in s keinen Pol hat.

Hinweis: Betrachten Sie $\log(F(s))$.

Abgabedetails: Am **Mittwoch, 24. Mai 2023**, Anfang der Übung.

Generelle Informationen:

- Mathematische Folgerungen sollen vollständig begründet werden.
- Übungsblätter können maximal **zu zweit** abgegeben werden. Abgabe zu zweit wird empfohlen.