Dr. Ksenia Fedosova
Dr. Andreas Demleitner SS 2023

Übungsaufgaben zur Vorlesung „Analytische Zahlentheorie“

Blatt 6

Veränderter Abgabetermin aufgrund Pfingstpause beachten!

Aufgabe 1: (2+4 Punkte)
Sei χ ein Dirchlet-Charakter modulo N, der vom Hauptcharakter modulo N verschieden ist.

(1) Zeigen Sie, dass $A(x) := \sum_{n \leq x} \chi(n)$ beschränkt ist.

(2) Zeigen Sie, dass in der Halbebene $\sigma = \mathrm{Re}(s) > 1$ gilt, dass

$$L(s, \chi) = s \cdot \int_1^\infty \frac{A(t)}{t^{s+1}} \, \mathrm{d}t,$$

und dass letzteres Integral gleichmäßig auf Kompakta für $\sigma = \mathrm{Re}(s) > 0$ konvergiert.

Hinweis: $\chi(n) = A(n) - A(n-1)$.

Aufgabe 2: (2+2+2+2+2 Punkte)
Sei χ ein Dirchlet-Charakter modulo N, der vom Hauptcharakter modulo N verschieden ist. Das Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass $L(1, \chi) \neq 0$. Wir nehmen dafür an, dass $L(1, \chi) = 0$ und führen das zu einem Widerspruch.

(1) Zeigen Sie, dass χ der einzige Dirichlet-Charakter modulo N ist, sodass $L(1, \chi) = 0$.

Hinweis: Aufgabe 1, vorherige Übungsaufgaben.

(2) Folgern Sie, dass χ nur reelle Werte annehmen kann.

(3) Sei $G(s) := \zeta(s) \cdot L(s, \chi)$. Begründen Sie kurz, dass G für $\sigma = \mathrm{Re}(s) > 0$ holomorph ist.

(4) Sei nun $G(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{a(n)}{n^s}$ die Dirchlet-Reihe von G. Nutzen Sie die Bonusaufgabe, um zu zeigen, dass sie für $s = \frac{1}{2}$ konvergiert.

(5) Leiten Sie den Widerspruch $G(\frac{1}{2}) = \infty$ her, indem Sie $G(\frac{1}{2})$ geeignet nach unten abschätzen.

Bonusaufgabe 3: (2+4 Punkte)
Sei $\sum_{n=1}^\infty \frac{a(n)}{n^s}$ eine Dirichlet-Reihe, deren Konvergenzhalbebene gerade $\mathrm{Re}(s) > 0$ ist. Es gelte $a(n) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ für alle n. Wir möchten zeigen, dass die für $\mathrm{Re}(s) > 0$ holomorphe Funktion $f(s) := \sum_{n=1}^\infty \frac{a(n)}{n^s}$ nicht nach 0 fortsetzbar ist.

(1) Nehmen Sie an, f ließe sich holomorph nach 0 fortsetzen. Zeigen Sie, dass die Taylorreihe

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(s-1)^k$$

von f um 1 auf einem Kreis mit Radius $1 + \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$ konvergiert.

(2) Leiten Sie einen Widerspruch her, in dem Sie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(-\varepsilon - 1)^k = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) n^{\varepsilon}$$

berechnen. Erklären Sie, wo die Voraussetzung $a(n) \geq 0$ verwendet wird.

Hinweis: Berechnen Sie die Ableitungen $f^{(k)}(1)$ mit Hilfe der Darstellung von f als Dirichlet-Reihe.

Abgabedetails: Am **Mittwoch, 06. Juni 2023**, Anfang der Übung.

Generelle Informationen:

- Mathematische Folgerungen sollen vollständig begründet werden.
- Übungsblätter können maximal **zu zweit** abgegeben werden. Abgabe zu zweit wird empfohlen.