
Übungsaufgaben zur Vorlesung „Analytische Zahlentheorie“

Blatt 7

Übung am 14.06.2023 fällt aus – veränderten Abgabetermin beachten!

Aufgabe 1: (3 Punkte)

Beweisen Sie Lemma 18.

Aufgabe 2: (3 Punkte)

Sei $\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(\tau) > 0\} \subset \mathbb{C}$ die obere Halbebene. Zeigen Sie, dass durch

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tau \right) \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \tau := \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

eine Operation von $\text{GL}_2(\mathbb{R})^+$, der Gruppe der reellen (2×2) -Matrizen mit positiver Determinante, auf \mathbb{H} definiert wird.

Aufgabe 3: (2+4+4 Punkte)

(1) Nach Aufgabe 2 operiert auch $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf \mathbb{H} . Seien

$$D := \left\{ \tau \in \mathbb{H} \mid |\tau| > 1, |\text{Re}(\tau)| < \frac{1}{2} \right\},$$

sowie

$$S := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Skizzieren Sie D , $S * D$, $T * D$ und $T^{-1} * D$.

(2) Zeigen Sie, dass es zu jedem $\tau \in \mathbb{H}$ eine Matrix $g \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $g * \tau \in D$ gibt.

(3) Zeigen Sie umgekehrt, dass je zwei verschiedene Elemente aus dem Inneren von D nicht in derselben $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Bahn liegen.

Abgabedetails: Am **Mittwoch, 21. Juni 2023**, Anfang der Übung.

Übung am 14.06.2023 fällt aus – veränderten Abgabetermin beachten!

Generelle Informationen:

- Mathematische Folgerungen sollen vollständig begründet werden.
- Übungsblätter können maximal **zu zweit** abgegeben werden. Abgabe zu zweit wird empfohlen.