Dr. Ksenia Fedosova
Dr. Andreas Demleitner

Lösung zur Vorlesung „Analytische Zahlentheorie“

Blatt 8, Aufgabe 3 (2)

Sei $\tau \in \mathbb{H}$. Wir möchten ein $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ finden, sodass $g * \tau \in D$.

Behauptung 1: Es gibt $(c, d) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, sodass $|c\tau + d|$ minimal ist. In diesem Fall gilt $\mathrm{ggT}(c, d) = 1$.

Beweis von Behauptung 1: Da $\Lambda = \{m\tau + n \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ diskret ist, enthält $\Lambda \cap B_R(0)$ für jedes $R > 0$ nur endlich viele Punkte. Wähle nun R groß genug, sodass der Schnitt $\neq \{(0, 0)\}$ ist. Aus den endlich vielen Punkten $\neq (0, 0)$ im Durchschnitt gibt es nun sicherlich einen mit minimalem Abstand zum Ursprung.
Ist nun $(c, d) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ mit $|c\tau + d|$ minimal, so schreibe man $c = g \cdot c'$, $d = g \cdot d'$ mit $\mathrm{ggT}(c, d) \geq 1$ und $c', d' \in \mathbb{Z}$. Dann folgt

$$|c\tau + d| = \mathrm{ggT}(c, d) \cdot |c'\tau + d'| \geq |c'\tau + d'|,$$

und wegen der Wahl von (c, d) folgt $\mathrm{ggT}(c, d) = 1$. $\square_{\text{Beh. 1}}$

Aus Behauptung 1 erhalten wir nun die Existenz von $a, b \in \mathbb{Z}$ mit

$$h := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Wähle nun $j \in \mathbb{Z}$, sodass $|\operatorname{Re}((T^j h) * \tau)| \leq \frac{1}{2}$.

Behauptung 2: Es gilt $|(T^j h) * \tau| \geq 1$. Insbesondere gilt die zu zeigende Aussage mit $g := T^j h$.

Beweis von Behauptung 2: Wir bemerken zunächst, dass

$$\operatorname{Im}((T^j h) * \tau) = \operatorname{Im}(h * \tau) = \frac{\operatorname{Im}(\tau)}{|c\tau + d|^2}.$$

Da $(c, d) \neq (0, 0)$ so gewählt war, dass $|c\tau + d|$ minimal ist, ist $\operatorname{Im}((T^j h) * \tau)$ also maximal unter den $\operatorname{Im}(\widetilde{g} * \tau)$ für $\widetilde{g} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
Des Weiteren gilt für alle $\tau' \in \mathbb{H}$, dass

$$\operatorname{Im}(S * \tau') = \frac{\operatorname{Im}(\tau')}{|\tau'|^2}.$$

Aus obiger Gleichung folgt mit $\tau' = (T^j h) * \tau$ und der Maximalität von $\operatorname{Im}((T^j h) * \tau)$ also

$$\operatorname{Im}((ST^j h) * \tau) = \frac{\operatorname{Im}((T^j h) * \tau)}{|(T^j h) * \tau|^2} \leq \operatorname{Im}((T^j h) * \tau),$$

das heißt $|(T^j h) * \tau| \geq 1$, wie behauptet. $\square_{\text{Beh. 2}}$