Dr. Ksenia Fedosova
Dr. Andreas Demleitner SS 2023

Übungsaufgaben zur Vorlesung „Analytische Zahlentheorie“

Blatt 8

Einzige Aufgabe: (4+4+2+4+2 Punkte)
Für $\tau \in \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$ setzen wir $q := \exp(2\pi i\tau)$ und

$$\mathbb{G}_2(\tau) := -\frac{1}{24} + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) q^n,$$
$$G_2(\tau) := -4\pi^2 \cdot \mathbb{G}_2(\tau),$$

wobei $\sigma_1(n) = \sum_{d|n} d$ die Teilersummenfunktion sei. Sie dürfen im Folgenden davon ausgehen, dass

$$G_2(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(m\tau+n)^2}. \tag{1}$$

Diese Gleichheit kann mit einer ähnlichen Methode wie in der Vorlesung für G_k, $k \geq 4$ bewiesen werden.

Vorsicht: Die Doppelreihe (1) konvergiert nicht mehr absolut und lokal gleichmäßig – das gilt nur für Exponenten > 2 im Nenner! Deshalb müssen wir eine Summationsreihenfolge festlegen. Wir einigen uns auf

$$G_2(\tau) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2} + \sum_{m\neq 0} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(m\tau+n)^2} \right).$$

Das Ziel dieser Aufgabe ist es, zu zeigen, dass für $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und $\tau \in \mathbb{H}$ gilt, dass

$$G_2\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^2 G_2(\tau) - \pi i c(c\tau+d). \tag{2}$$

Gehen Sie wie folgt vor:

(i) Für $\varepsilon > 0$ und $\tau \in \mathbb{H}$ sei

$$G_{2,\varepsilon}(\tau) := \frac{1}{2} \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(m\tau+n)^2 \cdot |m\tau+n|^{2\varepsilon}}.$$

Erklären Sie, warum Gleichung (2) aus

$$\lim_{\varepsilon\to 0} G_{2,\varepsilon}(\tau) = G_2(\tau) - \frac{\pi}{2\operatorname{Im}(\tau)} \tag{3}$$

folgt.

(ii) Zeigen Sie, dass die Doppelsumme

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{(m\tau+n)^2 |m\tau+n|^{2\varepsilon}} - \int_n^{n+1} \frac{1}{(m\tau+t)^2 |m\tau+t|^{2\varepsilon}} \,\mathrm{d}t \right]$$

für $\varepsilon > -\frac{1}{2}$ absolut und lokal gleichmäßig konvergiert.

Hinweis: Für fixierte m, n, ε, τ betrachten Sie

$$f(t) := \frac{1}{(m\tau + t)^2 |m\tau + t|^{2\varepsilon}}.$$

Zeigen Sie dann, dass

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{(m\tau + n)^2 |m\tau + n|^{2\varepsilon}} - \int_n^{n+1} \frac{1}{(m\tau + t)^2 |m\tau + t|^{2\varepsilon}} \,\mathrm{d}t \right| \\ &= \left| \int_n^{n+1} (f(n) - f(t)) \,\mathrm{d}t \right| = O(|m\tau + n|^{-3-2\varepsilon}), \end{aligned}$$

indem Sie geeignet abschätzen.

(iii) Für $\varepsilon > -\frac{1}{2}$ und $\tau \in \mathbb{H}$ betrachte man die Funktion

$$I_\varepsilon(\tau) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\tau + t)^2 |\tau + t|^{2\varepsilon}} \,\mathrm{d}t.$$

Zeigen Sie, dass für $\varepsilon > 0$ gilt, dass

$$G_{2,\varepsilon}(\tau) - \sum_{m=1}^{\infty} I_\varepsilon(m\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2+2\varepsilon}} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{(m\tau + n)^2 |m\tau + n|^{2\varepsilon}} - \int_n^{n+1} \frac{1}{(m\tau + t)^2 |m\tau + t|^{2\varepsilon}} \,\mathrm{d}t \right].$$

Folgern Sie aus (ii), dass der Grenzwert $\varepsilon \to 0$ der rechten Seite existiert und gleich $G_2(\tau)$ ist.

(iv) Im Folgenden schreiben wir $\tau = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, $y > 0$. Zeigen Sie für $\varepsilon > -\frac{1}{2}$ die Gleichung

$$\sum_{m=1}^{\infty} I_\varepsilon(m\tau) = \frac{I(\varepsilon)\zeta(1 + 2\varepsilon)}{y^{1+2\varepsilon}} \qquad \text{mit} \qquad I(\varepsilon) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t + i)^2 (t^2 + 1)^\varepsilon} \,\mathrm{d}t,$$

Zeigen Sie außerdem $I(0) = 0$ und $I'(0) = -\pi$.

(v) Machen Sie sich $\zeta(1 + 2\varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon} + O(1)$ klar und folgern Sie schließlich Gleichung (3).

<u>Abgabedetails:</u> Am **Mittwoch, 28. Juni 2023**, Anfang der Übung.

<u>Generelle Informationen:</u>

- Mathematische Folgerungen sollen vollständig begründet werden.
- Übungsblätter können maximal **zu zweit** abgegeben werden. Abgabe zu zweit wird empfohlen.