Dr. Ksenia Fedosova
Dr. Andreas Demleitner SS 2023

Übungsaufgaben zur Vorlesung „Analytische Zahlentheorie“

Blatt 9

Aufgabe 1: (2+3+3 Punkte)
Sei $u > 0$ und $f(x) := \exp(-\pi u x^2)$ für $x \in \mathbb{R}$. In Blatt 4, Aufgabe 4 haben wir

$$\widehat{f}(y) = \frac{\exp\left(-\frac{\pi y^2}{u}\right)}{\sqrt{u}} \tag{1}$$

bewiesen. Sie können im Folgenden davon ausgehen, dass die obige Formel für $u \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(u) > 0$ gültig bleibt – das Symbol $\sqrt{u}$ bezeichnet hierbei die eindeutige komplexe Zahl mit Quadrat u und positivem Realteil.

(1) Zeigen Sie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) = \frac{1}{\sqrt{u}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(2\pi i n x - \frac{\pi n^2}{u}\right)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Für $z \in \mathbb{C}$ und $\tau \in \mathbb{H}$ (der offenen oberen Halbebene in $\mathbb{C}$) definieren wir außerdem wie in der Vorlesung

$$\theta(z, \tau) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(2\pi i n z + \pi i n^2 \tau).$$

(2) Sei $\tau = iu \in \mathbb{H}$. Zeigen Sie unter Verwendung der vorherigen Teilaufgabe, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\exp(\pi i \tau x^2) \cdot \theta(\tau x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{-i\tau}} \cdot \theta\left(x, -\frac{1}{\tau}\right).$$

(3) Zeigen Sie schließlich

$$\theta\left(\frac{z}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{-i\tau} \cdot \exp\left(\frac{\pi i z^2}{\tau}\right) \cdot \theta(z, \tau)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ und $\tau \in \mathbb{H}$.

Aufgabe 2: (3+1+4 Punkte)
Beweisen Sie den *Zwei-Quadrate-Satz von Fermat*: Eine ungerade Primzahl p kann genau dann in der Form $p = x^2 + y^2$ mit $x, y \in \mathbb{Z}$ geschrieben werden, wenn $p \equiv 1 \pmod 4$. Zum Beweis setzen wir $\theta(\tau) := \theta(0, \tau)$.

(1) Für $n \geq 0$ sei $r_2(n)$ die Anzahl an Paaren $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ mit $x^2 + y^2 = n$. Zeigen Sie $\theta^2(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} r_2(k) \exp(\pi i n^2 \tau)$.

(2) Nach den folgenden beiden Fakten (von denen Sie ohne Beweis ausgehen dürfen) gibt es einen Skalar λ, sodass $\theta^2 = \lambda G_{1,\chi}$ (siehe Fakt 1 für die Definition von $G_{1,\chi}$). Finden Sie λ.

Fakt 1: Der Vektorraum der Modulformen vom Gewicht 1 und der Stufe 4 ist eindimensional und wird von

$$G_{1,\chi}(\tau) := \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{d \mid n} \chi(d) \right) \exp(\pi i n \tau), \qquad \chi(m) := \begin{cases} 1, & \text{falls } m \equiv 1 \pmod 4 \\ -1, & \text{falls } m \equiv 3 \pmod 4 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

erzeugt.

Fakt 2: Es ist θ^2 eine Modulform vom Gewicht 1 und der Stufe 4.

(3) Berechnen Sie $r_2(p)$ für ungerade Primzahlen p und folgern Sie Fermats Zwei-Quadrate-Satz.

Abgabedetails: Am **Mittwoch, 05. Juli 2023**, Anfang der Übung.

Generelle Informationen:

- Mathematische Folgerungen sollen vollständig begründet werden.
- Übungsblätter können maximal **zu zweit** abgegeben werden. Abgabe zu zweit wird empfohlen.