

Worum geht es in diesem Kurs

Die Zahlentheorie ist ein Teilgebiet der Mathematik, das sich mit den Eigenschaften natürlicher Zahlen beschäftigt, also

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

Besonderes Augenmerk wird auf eine Klasse von Zahlen gelegt, die als Primzahlen bezeichnet werden.

Definition 1. Eine *Primzahl* ist eine Zahl größer als 1, deren einzige Teiler 1 und die Zahl selbst sind. Zahlen, die nicht prim sind, werden *zusammengesetzt* genannt, außer der Zahl 1, die weder als prim, noch als zusammengesetzt betrachtet wird.

Es gibt keine einfache Formel, die alle Primzahlen liefert. Darüber hinaus sind Primzahlen ziemlich unregelmäßig verteilt. Zur Untersuchung dieser Verteilung verwenden wir eine Funktion namens $\pi(x)$:

$$\pi(x) = \{\#p : p \leq x \text{ und } p \text{ ist prim}\}.$$

Trotzdem kann man bei der Betrachtung großer Gruppen von Primzahlen beobachten, dass sie tendenziell gleichmäßig verteilt sind (im Durchschnitt). Obwohl es unendlich viele Primzahlen gibt, nimmt ihr durchschnittlicher Abstand voneinander zu. Die quantitative Aussage dazu ist der sogenannte **Primzahlsatz**, der besagt, dass

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = 1.$$

In diesem Kurs werden wir uns mit einem Beweis von Riemann beschäftigen, der das Problem mit analytischen Methoden angegangen ist mit Hilfe einer sogenannten Riemannschen Zeta-Funktion:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1.$$

Im Verlauf des Beweises werden wir Eigenschaften der Riemannschen Zeta-Funktion, ihrer speziellen Werte und meromorphen Fortsetzungen untersuchen. Dazu gehört auch die Lösung des Basler Problems¹

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

und die Möglichkeit, Summen wie

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots = -\frac{1}{12}$$

sinnvoll zu behandeln.

Der zweite Teil des Kurses umfasst die Voraussetzungen und eine Skizze des Beweises eines Theorems von Maryna Viazovska, welches ihr 2022 die Fields-Medaille eingebracht hat. Das Theorem findet die **optimale Kugelpackung** in den Dimensionen 8 und 24, das heißt, die effizienteste Art, identische Kugeln zu packen, bei der keine zwei Kugeln sich überschneiden. Der Beweis verwendet sogenannte modulare Formen, die analytische Funktionen im oberen Halbraum sind und sich unter der Gruppenwirkung von $SL_2(\mathbb{Z})$ gut verhalten. Dieser Kurs konzentriert sich nicht auf die Theorie der modularen Formen, aber wir werden diese in genügendem Detail verhandeln, um die Skizze von Viazovskas Beweis zu verstehen.

¹nach der Stadt Basel benannt!

Klassische elementare Ergebnisse

Wir erinnern uns an den Fundamentalsatz der Arithmetik.

Satz 1. [?, Theorem 1.10] Jede natürliche Zahl $n > 1$ kann als Produkt von Primzahlen geschrieben werden und diese Darstellung ist, bis auf die Reihenfolge der Faktoren, eindeutig. \square

Der Beweis für die Existenz einer solchen Zerlegung wird hier ausgelassen. In der Praxis ist es jedoch sehr kompliziert, diese Zerlegung zu finden. Die Schwierigkeit dieses Problems ist wichtig für in der Kryptographie verwendeten Algorithmen², z.B. für RSA.

1 Arithmetische Funktionen

1.1 Einführung und grundlegende Beispiele

Ein einfaches, aber sehr nützliches Konzept in der Zahlentheorie ist das der arithmetischen Funktion.

Definition 2. Eine *arithmetische Funktion* ist eine reell- oder komplexwertige Funktion, die auf der Menge \mathbb{N} der positiven ganzen Zahlen definiert ist.

1.1.1 Die Möbiusfunktion

Definition 3. Die *Möbiusfunktion* wird wie folgt definiert:

$$\mu(1) = 1.$$

Falls $n > 1$, sei $n = p_1^{a_1} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$. Dann ist

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^k, & a_1 = a_2 = \dots = a_k = 1, \\ 0, & n \text{ sonst.} \end{cases}$$

Die grundlegende Eigenschaft der Möbiusfunktion wird in folgendem Theorem dargelegt.

Satz 2. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 0, & n \neq 1, \\ 1, & n = 1. \end{cases}$$

Beweis. Sei $n = 1$, dann ist $\sum_{d|n} \mu(d) = \mu(1) = 1$.

Sei nun $n \geq 2$ und $n = \prod_{i=1}^k p_i^{a_i}$ die kanonische Primfaktorzerlegung von n . Wenn d nicht quadratfrei ist, ist $\mu(d) = 0$. Dann kann die Summe über d auf Teiler der Form $d = \prod_{i \in I} p_i$ beschränkt werden, wobei $I \subset \{1, 2, \dots, k\}$:

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{\substack{d|n \\ d \text{ ist quadratfrei}}} \mu(d) = \sum_{I \subset \{1, 2, \dots, k\}} \mu \left(\prod_{i \in I} p_i \right).$$

²Das ist ein Teil der ersten Übungsblatt!

Jeder solcher Teiler leistet einen Beitrag $\mu(d) = (-1)^{|I|}$. Somit gilt:

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{I \subset \{1, \dots, k\}} (-1)^{|I|}$$

Bitte beachten Sie, dass es für jedes $r \in 0, 1, \dots, k$, $\binom{k}{r}$ Teilmengen I mit $|I| = r$ gibt, und für jede solche Teilmenge der Summand $(-1)^{|I|}$ gleich $(-1)^r$ ist. Daher reduziert sich die obige Summe auf

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{r=0}^k (-1)^r \binom{k}{r} = (1 - 1)^k = 0$$

mithilfe des Binomialtheorems. □

1.1.2 Eulersche Phi-Funktion

Definition 4. Die Eulersche φ (Phi)-Funktion ist die Anzahl der positiven ganzen Zahlen $m \leq n$, die zu n teilerfremd sind; d.h.,

$$\varphi(n) = \sum_{m=1, (m,n)=1}^n 1.$$

Satz 3. Für jede $n \in \mathbb{N}$, gilt

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

Beweis. Teilen Sie die Menge $A = \{1, 2, \dots, n\}$ in paarweise disjunkte Teilmengen

$$A = \sqcup_{d|n} A_d, \quad A_d = \{m \in A : (m, n) = d\}.$$

Indem man ein Element $m \in A_d$ als $m = dm'$ schreibt, sehen wir, dass

$$A_d = \{dm' : 1 \leq m' \leq n/d, (m', n/d) = 1\},$$

und somit $|A_d| = \varphi(n/d)$. Da $n = |A| = \sum_{d|n} |A_d|$, folgt, dass

$$\sum_{d|n} \varphi(n/d) = n.$$

Schreibt man $d' = n/d$ und beachtet, dass d über alle positiven Teiler von n läuft, so tut dies auch d' , womit wir die gewünschte Identität erhalten. □

Satz 4. Für alle $n \geq 1$,

$$\sum_{d|n} \mu(d) \cdot \frac{n}{d} = \varphi(n).$$

Beweis.

$$\varphi(n) = \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{(n, k)} \right] \stackrel{\text{Satz 2}}{=} \sum_{k=1}^n \sum_{d|(n, k)} \mu(d) = \sum_{k=1}^n \sum_{d|n, d|k} \mu(d).$$

Sei $k = qd$, dann ist $1 \leq k \leq n$ genau dann wenn $1 \leq q \leq n/d$. Dann ist

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \sum_{q=1}^{n/d} \mu(d) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot \frac{n}{d}.$$

□

Satz 5. Für $n \geq 1$, es gilt

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Oben sind p verschiedene Primteiler von n .

Beweis. Für $n = 1$ ist das Produkt leer, da es keine Primzahlen gibt, die 1 teilen. In diesem Fall wird das Produkt jedoch als 1 zugewiesen.

Angenommen, $n > 1$ und p_1, \dots, p_r sind die verschiedenen Primteiler von n . Das Produkt kann geschrieben werden wie folgt:

$$\begin{aligned} \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) &= \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \\ &= 1 - \sum \frac{1}{p_i} + \sum \frac{1}{p_i p_j} - \sum \frac{1}{p_i p_j p_k} + \dots + \sum \frac{(-1)^r}{p_1 p_2 \dots p_r} \\ &= \sum_{\substack{d|n \\ d \text{ quadratfrei}}} \frac{\mu(d)}{d} = \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} \stackrel{\text{Satz 4}}{=} \frac{\varphi(n)}{n}. \end{aligned}$$

□

Korollar 1. (i) $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$ für Primzahl p und $\alpha \geq 1$,

(ii) $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ falls $(m, n) = 1$.

1.1.3 Die von Mangoldt-Funktion

Definition 5. Die Mangoldt-Funktion wird wie folgt definiert:

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log(p), & n = p^m \text{ für eine Primzahl } p \text{ und eine ganze Zahl } m, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Definition der Mangoldt-Funktion kann auf den ersten Blick seltsam erscheinen. Eine Motivation für diese eigentümliche Definition liegt in der folgenden Identität.

Satz 6. Es gilt

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Für $n = 1$ gilt die Identität, da $\Lambda(1) = 0$ (da 1 keine Primzahl ist). Für $n \geq 2$ haben wir, gemäß der Definition von Λ ,

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{p^m|n} \log p = \log n$$

Für den letzten Schritt beachte man, dass für jede Primzahlpotenz $p^\alpha|n$ jeder der Terme $p^1, p^2, \dots, p^\alpha$ einen Term $\log p$ zur Summe beiträgt, sodass der Gesamtbeitrag aus Potenzen von p gleich $\alpha(\log p) = \log p^\alpha$ ist. Die Summe dieser Beiträge über alle Primzahlpotenzen $p^\alpha|n$ ergibt $\sum_{p^\alpha|n} \log p^\alpha = \log \prod_{p^\alpha|n} p^\alpha = \log n$. \square

1.2 Multiplikative und additive Funktionen

Viele wichtige arithmetische Funktionen sind multiplikative oder additive Funktionen im Sinne der folgenden Definition.

Definition 6. Eine arithmetische Funktion f heißt *multiplikativ*, wenn $f \neq 0$ und

$$f(n_1 n_2) = f(n_1) f(n_2) \quad \text{für } (n_1, n_2) = 1; \quad (1.1)$$

f heißt *additiv*, wenn

$$f(n_1 n_2) = f(n_1) + f(n_2) \quad \text{für } (n_1, n_2) = 1.$$

Wenn diese Bedingung ohne die Einschränkung $(n_1, n_2) = 1$ erfüllt ist, wird f als *vollständig (oder total) multiplikativ* bzw. *vollständig (oder total) additiv* bezeichnet.

Beispiel 1. (i) $n \mapsto n^2$ ist multiplikativ,

(ii) $n \mapsto \lfloor \frac{1}{n} \rfloor$ ist total multiplikativ,

(iii) μ ist multiplikativ, aber nicht total multiplikativ ($0 = \mu(4) \neq \mu(2)\mu(2) = 1$),

(iv) φ ist multiplikativ, aber nicht total multiplikativ ($2 = \varphi(4) \neq \varphi(2)\varphi(2) = 1$),

(v) das Produkt multiplikativer Funktionen ist multiplikativ (wobei $(fg)(n) := f(n)g(n)$).

Satz 7. Falls f multiplikativ ist, dann ist $f(1) = 1$.

Beweis. Es existiert $n \in \mathbb{N}$ so dass $f(n) \neq 0$ ist. Weil $(n, 1) = 1$, dann ist $f(n) = f(n)f(1)$. \square

Korollar 2. Λ ist nicht multiplikativ, weil $\Lambda(1) = 0$.

Satz 8. (Charakterisierung multiplikativer Funktionen). Eine arithmetische Funktion f ist genau dann multiplikativ, wenn $f(1) = 1$ und für $n \geq 2$ gilt:

$$f(n) = \prod_{p^m||n} f(p^m). \quad (1.2)$$

Oben bedeutet $p^m||n$, dass p^m genau n teilt, das heißt, $p^m | n$ und $p^{m+1} \nmid n$.

Die Funktion f ist genau dann total multiplikativ, wenn die obige Bedingung erfüllt ist und zusätzlich $f(p^m) = f(p)^m$ für alle Primzahlpotenzen p^m gilt.

Bemerkung 1. (i) Der Satz zeigt, dass eine multiplikative Funktion durch ihre Werte auf Primzahlpotenzen eindeutig bestimmt ist, und eine komplett multiplikative Funktion durch ihre Werte auf Primzahlen eindeutig bestimmt ist.

(ii) Mit der Konvention, dass ein leeres Produkt als 1 interpretiert werden soll, kann die Bedingung $f(1) = 1$ als der spezielle Fall $n = 1$ von (1.2) betrachtet werden. Mit dieser Interpretation ist f multiplikativ, wenn und nur wenn f die Gleichung (1.2) für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt.

Beweis. Angenommen, zuerst gilt $f(1) = 1$ und (1.2) für $n \geq 2$. Wenn n_1 und n_2 positive ganze Zahlen mit $(n_1, n_2) = 1$ sind, dann haben die Primfaktorzerlegungen von n_1 und n_2 disjunkte Mengen von Primzahlpotenzen. Wenn wir nun jeweils $f(n_1)$, $f(n_2)$ und $f(n_1 n_2)$ durch (1.2) ausdrücken, sehen wir, dass f die Gleichung (1.1) erfüllt. Da $f(1) = 1$ ist und f nicht identisch 0 sein kann, ist f multiplikativ.

Rückblickend angenommen: f ist multiplikativ. Dann ist f nicht identisch 0, sodass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, für das $f(n) \neq 0$ ist. Durch Anwenden von (1.2) mit $(n_1, n_2) = (n, 1)$ erhalten wir $f(n) = f(1 \cdot n) = f(1)f(n)$, was uns $f(1) = 1$ ergibt, wenn wir durch $f(n)$ teilen.

Als Nächstes sei $n \geq 2$ mit Primfaktorzerlegung $n = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$ gegeben. Indem wir nacheinander Primzahlpotenzen "abschneiden", erhalten wir:

$$\begin{aligned} f(n) &= f(p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}) = f(p_1^{\alpha_1} \cdots p_{k-1}^{\alpha_{k-1}}) f(p_k^{\alpha_k}) \\ &= \cdots = f(p_1^{\alpha_1}) \cdots f(p_k^{\alpha_k}), \end{aligned}$$

dann ist (1.2) wahr.

Wenn f vollständig multiplikativ ist, dann haben wir für jede Primzahlpotenz p^m :

$$f(p^m) = f(p^{m-1} \cdot p) = f(p^{m-1}) f(p) = \cdots = f(p)^m.$$

Umgekehrt, wenn f multiplikativ ist und $f(p^m) = f(p)^m$ für alle Primzahlpotenzen p^m erfüllt, dann kann (1.2) geschrieben werden als $f(n) = \prod_{i=1}^r f(p_i)$, wobei $n = \prod_{i=1}^r p_i$ die Faktorisierung von n in einzelne (nicht notwendigerweise verschiedene) Primfaktoren p_i ist. Da das Produkt der entsprechenden Faktorisierungen für jedes Paar (n_1, n_2) von positiven ganzen Zahlen die Faktorisierung des Produkts ist, folgt, dass die Multiplikativitätseigenschaft $f(n_1 n_2) = f(n_1) f(n_2)$ für jedes Paar (n_1, n_2) von positiven ganzen Zahlen erfüllt ist. Daher ist f vollständig multiplikativ. \square

1.3 Das Dirichlet-Produkt von arithmetischen Funktionen

Die beiden offensichtlichen Operationen auf der Menge der arithmetischen Funktionen sind punktweise Addition und Multiplikation. Die konstanten Funktionen $f = 0$ und $f = 1$ sind neutrale Elemente bezüglich dieser Operationen, und die additiven und multiplikativen Inverse einer Funktion f sind gegeben durch $-f$ und $1/f$.

Obwohl diese Operationen manchmal nützlich sind, ist bei weitem die wichtigste Operation unter zahlentheoretischen Funktionen das sogenannte Dirichlet-Produkt, eine Operation, die sich als äußerst nützliches Werkzeug in der Theorie der arithmetischen Funktionen erwiesen hat.

Definition 7. Gegeben seien zwei arithmetische Funktionen f und g . Das Dirichlet-Produkt (oder die Dirichlet-Faltung) von f und g , bezeichnet mit $f * g$, ist die arithmetische Funktion, definiert durch

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$$

Es gilt

- $(f * g)(1) = f(1)g(1)$,
- $(f * g)(p) = f(1)g(p) + f(p)g(1)$ für Primzahl p ,
- und $(f * g)(p^m) = \sum_{k=0}^m f(p^k)g(p^{m-k})$ für jede Primzahlpotenz p^m .

Es kann nützlich sein, das Dirichlet-Produkt in sogenannten symmetrischer Form zu schreiben.

$$(f * g)(n) = \sum_{ab=n} f(a)g(b)$$

Die Summation läuft über alle Paare (a, b) von positiven ganzen Zahlen, deren Produkt n ergibt. Die Äquivalenz der beiden Definitionen folgt unmittelbar daraus, dass die Paare $(d, n/d)$, wobei d alle Teiler von n durchläuft, genau die Paare (a, b) der obigen Form sind. Hier sind einige Beispiele:

- $d(n) = \sum_{d|n} 1$, so $d = 1 * 1$ (wobei $1(n) = 1$),
- $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$, so $\sigma = \text{id} * 1$ (wobei $\text{id}(n) = n$),
- $\sum_{d|n} \mu(d) = e(n)$, so $\mu * 1 = e$, wobei $e(n) = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ 0, & \text{else,} \end{cases}$ oder $e(n) = \lfloor \frac{1}{n} \rfloor$,
- $\sum_{d|n} \mu(d)(n/d) = \varphi(n)$, so $\mu * \text{id} = \varphi$,
- $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$, so $\varphi * 1 = \text{id}$.
- $\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log n$, so $\Lambda * 1 = \log$.

Eine weitere Motivation für die Definition des Dirichlet-Produkts auf die oben beschriebene Weise besteht darin, dass dieses Produkt schöne algebraische Eigenschaften hat.

Satz 9. (Eigenschaften des Dirichlet-Produkts).

- (i) Die Funktion e fungiert als neutrales Element für $*$, d.h. $f * e = e * f = f$ für alle arithmetischen Funktionen f .
- (ii) Das Dirichlet-Produkt ist kommutativ, d.h. $f * g = g * f$ für alle f und g .
- (iii) Das Dirichlet-Produkt ist assoziativ, d.h. $(f * g) * h = f * (g * h)$ für alle f, g, h .
- (iv) Wenn $f(1) \neq 0$, dann besitzt f eine eindeutige Dirichlet-Inverse, d.h. es gibt eine eindeutige Funktion g mit $f * g = e$.

Beweis. (i) folgt unmittelbar aus der Definition des Dirichlet-Produkts. Zur Beweisführung von (ii) (Kommutativität) und (iii) (Assoziativität) ist es nützlich, mit der symmetrischen Version des Dirichlet-Produkts zu arbeiten, d.h. $(fg)(n) = \sum_{ab=n} f(a)g(b)$. Die Kommutativität von $*$ folgt unmittelbar aus dieser Darstellung. Um die Assoziativität zu erhalten, wenden wir diese Darstellung zweimal an, um zu erhalten:

$$\begin{aligned} ((f * g) * h)(n) &= \sum_{dc=n} (f * g)(d)h(c) = \sum_{dc=n} \sum_{ab=d} f(a)g(b)h(c) \\ &= \sum_{abc=n} f(a)g(b)h(c). \end{aligned}$$

Oben läuft die letzte Summe über alle Tripel (a, b, c) von positiven ganzen Zahlen, deren Produkt gleich n ist. Wenn wir (f, g, h) in dieser Formel durch (g, h, f) ersetzen, erhalten wir dieselbe endgültige (dreifache) Summe und schließen daraus, dass $(fg)h = (gh)f = f(gh)$ gilt, was die Assoziativität von $*$ beweist.

Es bleibt zu beweisen, dass (iv) gilt. Sei f eine arithmetische Funktion mit $f(1) \neq 0$. Nach Definition ist eine Funktion g eine Dirichlet-Inverse von f , wenn $(f * g)(1) = e(1) = 1$ und $(f * g)(n) = e(n) = 0$ für alle $n \geq 2$ gilt. Durch Ausmultiplizieren des Dirichlet-Produkts $(f * g)(n)$ sehen wir, dass dies äquivalent zum unendlichen System von Gleichungen ist:

$$\begin{aligned} f(1)g(1) &= 1 \\ \sum_{d|n} g(d)f(n/d) &= 0 \quad (n \geq 2). \end{aligned}$$

Wir müssen zeigen, dass das System $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ eine eindeutige Lösung g hat. Dazu benutzen wir durch eine induktive Konstruktion der Werte $g(n)$ und zeigen, dass diese Werte eindeutig bestimmt sind.

Für $n = 1$ gibt die Gleichung (A_1) , dass $g(1) = 1/f(1)$ ist, was wohldefiniert ist, da $f(1) \neq 0$. Somit ist $g(1)$ eindeutig definiert und (A_1) gilt. Sei nun $n \geq 2$ und angenommen, wir haben gezeigt, dass es eindeutige Werte $g(1), \dots, g(n-1)$ gibt, so dass Gleichungen $(A_1) - (A_{n-1})$ erfüllt sind. Da $f(1) \neq 0$ ist, ist die Gleichung (A_n) äquivalent zu

$$g(n) = -\frac{1}{f(1)} \sum_{d|n, d < n} g(d)f(n/d)$$

Da die rechte Seite nur Werte $g(d)$ mit $d < n$ enthält, wird $g(n)$ eindeutig bestimmt, und wenn wir $g(n)$ durch (1.5) definieren, sehen wir, dass (A_n) (zusätzlich zu $(A_1) - (A_{n-1})$) gilt. Damit ist die Induktion abgeschlossen. \square

1.4 Moebius-Inversionssatz

Da $\mu * 1 = e$ gilt, ist die Moebius-Funktion die Dirichlet-Inverse der Funktion 1. Durch Multiplikation der Identität $\varphi = \mu * \text{id}$ (die in der letzten Sektion erhalten wurde) mit 1 erhalten wir $\varphi * 1 = 1 * \varphi = 1 * \mu * \text{id} = e * \text{id} = \text{id}$, und somit erhalten wir die Identität $\varphi * 1 = \text{id}$.

Das letzte Beispiel ist ein spezieller Fall eines wichtigen allgemeinen Prinzips, das wir als Theorem formulieren.

Satz 10. (Moebius-Inversionssatz). Wenn $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dann ist $f(n) = \sum_{d|n} g(d)\mu(n/d)$ für alle n .

Beweis. Die gegebene Relation kann als $g = f * 1$ geschrieben werden. Wenn wir das Dirichlet-Produkt jeder Seite dieser Relation mit der Funktion μ nehmen, erhalten wir $g * \mu = (f * 1) * \mu = f * (1 * \mu) = f * e = f$, was die behauptete Beziehung ist. \square

Schließlich ist eine dritte Motivation für die Definition des Dirichlet-Produkts, dass es die wichtige Eigenschaft der Multiplikativität einer Funktion bewahrt, wie in folgendem Satz gezeigt wird. Dies ist wiederum keineswegs offensichtlich.

Satz 11. (Dirichlet-Produkt und multiplikative Funktionen).

- (i) Sind f und g multiplikativ, so ist auch $f * g$ multiplikativ.
- (ii) Ist f multiplikativ, so ist auch die Dirichlet-Inverse f^{-1} multiplikativ.
- (iii) Wenn $f * g = h$ und f und h multiplikativ sind, so ist auch g multiplikativ.
- (iv) (Distributivität mit punktweiser Multiplikation) Wenn h vollständig multiplikativ ist, dann gilt für alle Funktionen f und g : $h(f * g) = (hf) * (hg)$.

2 Dirichlet-Reihe

Sei f eine arithmetische Funktion. Wir definieren *ihr Dirichlet-Reihe* als

$$L_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s},$$

wobei $s \in \mathbb{C}$. Wir bemerken, dass wir schon einmal eine Dirichlet-Reihe gesehen haben: für eine arithmetische Funktion $f(n) \equiv 1$, ist ihre Dirichlet-Reihe die Riemannsche Zeta-Funktion:

$$L_1(s) = \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}.$$

In diesem Kapitel beweisen wir einige grundlegende Eigenschaften von Dirichlet-Reihen.

2.1 Konvergenz

Sei $s \in \mathbb{C}$; wir werden die Notation von Riemann verwenden und schreiben

$$s = \sigma + it,$$

wobei $\sigma, t \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$n^s = e^{s \log n} = e^{(\sigma+it) \log n} = n^\sigma e^{it \log n}$$

und

$$|n^s| = n^\sigma,$$

weil $|e^{i\theta}| = 1$ für $\theta \in \mathbb{R}$.

Die Menge der Punkte $s = \sigma + i$ mit $\sigma > a$ heißt (*rechte*) *Halbebene*. Wir werden zeigen, dass es für jede Dirichlet-Reihe eine Halbebene $\sigma > \sigma_c$ gibt, in der die Reihe konvergiert, und eine weitere Halbebene $\sigma > \sigma_a$, in der sie absolut konvergiert. Wir werden auch zeigen, dass die Reihe in der Halbebene der Konvergenz eine analytische Funktion der komplexen Variablen s darstellt.

Für $\sigma \geq a$ es gilt $|n^s| = n^\sigma \geq n^a$ und somit

$$\left| \frac{f(n)}{n^s} \right| \leq \frac{|f(n)|}{n^a}.$$

Wenn also eine Dirichlet-Reihe $\sum f(n)n^{-s}$ absolut für $s = a + ib$ konvergiert, dann konvergiert sie nach dem Vergleichstest auch absolut für alle s mit $\sigma \geq a$. Diese Beobachtung impliziert den folgenden Satz.

Satz 12. Angenommen, die Reihe $\sum |f(n)n^{-s}|$ konvergiert nicht für alle s oder divergiert nicht für alle s . Dann gibt es eine reelle Zahl σ_a , Abszisse der absoluten Konvergenz genannt, so dass die Reihe $\sum f(n)n^{-s}$ absolut konvergiert, wenn $\sigma > \sigma_a$, konvergiert aber nicht absolut, wenn $\sigma < \sigma_a$.

Beweis. Sei D die Menge aller reellen σ , sodass $\sum |f(n)n^{-s}|$ divergiert. D ist nicht leer, weil die Reihe nicht für alle s konvergiert, und D ist nach oben beschränkt, weil die Reihe nicht für alle s divergiert. Daher hat D eine kleinste obere Grenze, die wir σ_a nennen. Wenn $\sigma < \sigma_a$ dann ist $\sigma \in D$, sonst wäre σ eine Obergrenze für D kleiner als die kleinste Obergrenze. Wenn $\sigma > \sigma_a$ dann $\sigma \notin D$, da σ_a eine Obergrenze für D ist. Dies beweist den Satz. \square

Bemerkung 2. Wenn $\sum |f(n)n^{-s}|$ überall konvergiert, definieren wir $\sigma_a = -\infty$. Wenn die Reihe $\sum |f(n)n^{-s}|$ nirgendwo konvergiert, definieren wir $\sigma_a = +\infty$.

Beispiel 2. Die Dirichlet-Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ konvergiert absolut für $\sigma > 1$. Bei $s = 1$ divergiert die Reihe, also $\sigma_a = 1$. Die Summe dieser Reihe wird mit $\zeta(s)$ bezeichnet und heißt Riemann-Zeta-Funktion. Die Dirichlet-Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ konvergiert absolut für $\sigma > 1$. Bei $s = 1$ divergiert die Reihe, also $\sigma_a = 1$. Die Summe dieser Reihe wird mit $\zeta(s)$ bezeichnet und heißt Riemann-Zeta-Funktion.

Beispiel 3. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^n n^{-s}$ divergiert für jedes s also $\sigma_a = +\infty$.

Beispiel 4. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-n} n^{-s}$ konvergiert absolut für jedes s , also $\sigma_a = -\infty$.

2.2 Die durch eine Dirichlet-Reihe definierte Funktionen

Nehmen Sie an, dass $\sum f(n)n^{-s}$ absolut konvergiert für $\sigma > \sigma_a$ und bezeichnen Sie mit $F(s)$ die Summenfunktion

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \text{ für } \sigma > \sigma_a.$$

Zuerst beweisen wir das folgende Lemma.

Lemma 1. Wenn $N \geq 1$, $s = \sigma + it$ für $\sigma, t \in \mathbb{R}$ und $\sigma \geq c > \sigma_a$ ist, gilt

$$\left| \sum_{n=N}^{\infty} f(n)n^{-s} \right| \leq N^{-(\sigma-c)} \sum_{n=N}^{\infty} |f(n)|n^{-c}.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=N}^{\infty} f(n)n^{-s} \right| &\leq \sum_{n=N}^{\infty} |f(n)|n^{-\sigma} = \sum_{n=N}^{\infty} |f(n)|n^{-c}n^{-(\sigma-c)} \\ &\leq N^{-(\sigma-c)} \sum_{n=N}^{\infty} |f(n)|n^{-c}. \end{aligned}$$

□

Der nächste Satz beschreibt das Verhalten von $F(s)$ als $\sigma \rightarrow +\infty$.

Satz 13. Für $-\infty < t < +\infty$, es gilt

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} F(s = \sigma + it) = f(1).$$

Beweis. Da $F(s) = f(1) + \sum_{n=2}^{\infty} f(n)n^{-s}$ ist, müssen wir nur beweisen, dass der zweite Term $\rightarrow 0$ wenn $\sigma \rightarrow +\infty$. Sei $c > \sigma_a$. Dann gilt für $\sigma \geq c$

$$\left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \right| \stackrel{\text{Lemma 1}}{\leq} 2^{-(\sigma-c)} \sum_{n=2}^{\infty} |f(n)|n^{-c} = \frac{A}{2^\sigma}$$

wobei A unabhängig von σ und t ist. Da $A/2^\sigma \rightarrow 0$ als $\sigma \rightarrow +\infty$ ist, beweist dies den Satz. □

Als nächstes beweisen wir, dass alle Koeffizienten durch die Summenfunktion eindeutig bestimmt sind.

Satz 14 (Eindeutigkeitssatz). Seien

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \quad \text{und} \quad G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}$$

beide absolut konvergent für $\sigma > \sigma_a$. Wenn $F(s) = G(s)$ für jedes s in einer unendlichen Folge $\{s_k\}$, so dass $\sigma_k \rightarrow +\infty$ wenn $k \rightarrow \infty$, dann ist $f(n) = g(n)$ für jedes n .

Beweis. Sei $h(n) = f(n) - g(n)$ und sei $H(s) = F(s) - G(s)$. Dann ist $H(s_k) = 0$ für jedes k . Um zu beweisen, dass $h(n) = 0$ für alle n gilt, nehmen wir an, dass $h(n) \neq 0$ für einige n und erhalten einen Widerspruch.

Sei N die kleinste ganze Zahl, für die $h(n) \neq 0$ gilt. Dann

$$H(s) = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s} = \frac{h(N)}{N^s} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}.$$

Somit ist

$$h(N) = N^s H(s) - N^s \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}.$$

Wenn wir $s = s_k$ setzen, haben wir $H(s_k) = 0$ also

$$h(N) = -N^{s_k} \sum_{n=N+1}^{\infty} h(n)n^{-s_k}.$$

Wir wählen k so, dass $\sigma_k > c$ mit $c > \sigma_a$. Dann impliziert Lemma 1

$$|h(N)| \leq N^{\sigma_k} (N+1)^{-(\sigma_k-c)} \sum_{n=N+1}^{\infty} |h(n)|n^{-c} = \left(\frac{N}{N+1}\right)^{\sigma_k} A$$

wobei A unabhängig von k ist. Setzt man $k \rightarrow \infty$, finden wir $(N/(N+1))^{\sigma_k} \rightarrow 0$ also $h(N) = 0$, ein Widerspruch. \square

Der Eindeutigkeitsatz impliziert die Existenz einer Halbebene, in der eine Dirichlet-Reihe nicht verschwindet.

Satz 15. Sei $F(s) = \sum f(n)n^{-s}$ und nehme an, dass $F(s) \neq 0$ für einige s mit $\sigma > \sigma_a$. Dann gibt es eine Halbebene $\sigma > c \geq \sigma_a$, in der $F(s)$ niemals Null ist.

Beweis. Angenommen, es existiert keine solche Halbebene. Dann gibt es für alle $k = 1, 2, \dots$ einen Punkt s_k mit $\sigma_k > k$, so dass $F(s_k) = 0$. Da $\sigma_k \rightarrow +\infty$ gleich $k \rightarrow \infty$ ist, zeigt der Eindeutigkeitsatz, dass $f(n) = 0$ für alle n gilt, was der Hypothese widerspricht, dass $F(s) \neq 0$ für ein paar s . \square

2.3 Multiplikation von Dirichlet-Reihen

Der nächste Satz setzt Produkte von Dirichlet-Reihen mit der Dirichlet-Faltung ihrer Koeffizienten in Beziehung.

Satz 16. Gegeben sind zwei Funktionen $F(s)$ und $G(s)$ dargestellt durch Dirichlet-Reihen,

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \text{ für } \sigma > a$$

und

$$G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s} \text{ für } \sigma > b.$$

In einer Halbebene, in der beide Reihen absolut konvergieren, erhalten wir

$$F(s)G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}$$

wobei $h = f * g$, die Dirichlet-Faltung von f und g :

$$h(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Umgekehrt, wenn $F(s)G(s) = \sum \alpha(n)n^{-s}$ für alle s in eine Folge $\{s_k\}$ mit $\sigma_k \rightarrow +\infty$ wenn $k \rightarrow \infty$ dann ist $\alpha = f * g$.

Beweis. Für jedes s , für das beide Reihen absolut konvergieren, haben wir

$$F(s)G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s} \sum_{m=1}^{\infty} g(m)m^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f(n)g(m)(mn)^{-s}.$$

Aufgrund der absoluten Konvergenz können wir diese Reihen miteinander multiplizieren und die Terme beliebig neu anordnen, ohne die Summe zu verändern. Sammeln wir die Terme, für die mn konstant ist, und nennen $mn = k$. Die möglichen Werte von k sind also $1, 2, \dots$, und wir erhalten

$$F(s)G(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{mn=k} f(n)g(m) \right) k^{-s} = \sum_{k=1}^{\infty} h(k)k^{-s}$$

wobei $h(k) = \sum_{mn=k} f(n)g(m) = (f * g)(k)$. Damit ist die erste Behauptung bewiesen, die zweite folgt aus dem Eindeutigkeitssatz. \square

Beispiel 5. Beide Reihen $\sum n^{-s}$ und $\sum \mu(n)n^{-s}$ konvergieren absolut für $\sigma > 1$. Wenn wir $f(n) = 1$ und $g(n) = \mu(n)$ nehmen, finden wir $(1 * \mu)(n) = e(n)$, wobei $e(n) = \lfloor \frac{1}{n} \rfloor$ ist. Dann ist

$$\zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = 1 \quad \text{if } \sigma > 1.$$

Insbesondere zeigt dies, dass $\zeta(s) \neq 0$ für $\sigma > 1$ und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)} \quad \text{für } \sigma > 1.$$

Beispiel 6. Sei $f(1) \neq 0$ und sei $g = f^{-1}$ (in der Sinne dass $g * f = e$ ist). Dann in jeder Halbebene, in der beide Reihen $F(s) = \sum f(n)n^{-s}$ und $G(s) = \sum g(n)n^{-s}$ absolut konvergieren, haben wir $F(s) \neq 0$ und $G(s) = 1/F(s)$.

Für das nächste Beispiel benötigen wir das folgende Lemma:

Lemma 2. Falls f vollständig multiplikativ ist, dann ist $\mu \cdot f$ eine Dirichlet-Inverse von f .

Beweis. Es gilt

$$((\mu \cdot f) * f)(n) = \sum_{d|n} \mu(d)f(d)f(n/d) = \sum_{d|n} \mu(d)f(n) = f(n) \sum_{d|n} \mu(d) \stackrel{\text{Satz 2}}{=} f(n)e(n) \stackrel{\text{Satz 7}}{=} e(n),$$

was zu beweisen war. \square

Beispiel 7. Wir nehmen an, $F(s) = \sum f(n)n^{-s}$ konvergiert absolut für $\sigma > \sigma_a$. Wenn f vollständig multiplikativ ist, haben wir³ $f^{-1}(n) = \mu(n)f(n)$. Da $|f^{-1}(n)| \leq |f(n)|$, konvergiert die Reihe $\sum \mu(n)f(n)n^{-s}$ auch absolut für $\sigma > \sigma_a$ und wir haben

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)f(n)}{n^s} = \frac{1}{F(s)} \quad \text{für } \sigma > \sigma_a.$$

³Oben, bezeichnet f^{-1} die "Dirichlet-inverse von f "; d.h., $f * f^{-1} = e$.

Beispiel 8. Sei $f(n) = 1$ und $g(n) = \varphi(n)$. Wegen $\varphi(n) \leq n$ konvergiert die Reihe $\sum \varphi(n)n^{-s}$ absolut für $\sigma > 2$. Außerdem ist $1 * \varphi = \text{id}_s$, und

$$\zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^s} = \zeta(s-1) \text{ für } \sigma > 2.$$

Dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} \text{ für } \sigma > 2.$$

Beispiel 9. Nehmen Sie $f(n) = 1$ und $g(n) = n^\alpha$. Dann $(f * g)(n) = \sum_{d|n} d^\alpha =: \sigma_\alpha(n)$, und

$$\zeta(s)\zeta(s-\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_\alpha(n)}{n^s} \text{ wenn } \sigma > \max\{1, 1 + \text{Re}(\alpha)\}.$$

2.4 Euler-Produkte

Der nächste Satz wird manchmal als analytische Version des Fundamentalsatzes der Arithmetik bezeichnet.

Satz 17. Sei f eine multiplikative arithmetische Funktion, so dass die Reihe $\sum f(n)$ absolut konvergent ist. Dann kann die Summe der Reihe als absolut konvergentes unendliches Produkt ausgedrückt werden,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_p (1 + f(p) + f(p^2) + \dots), \quad (2.1)$$

wobei das Produkt über allen möglichen Primzahlen steht. Wenn f vollständig multiplikativ ist, vereinfacht sich das Produkt und wir haben

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_p \frac{1}{1 - f(p)}.$$

Beweis. Wir betrachten

$$P(x) = \prod_{p \leq x} (1 + f(p) + f(p^2) + \dots),$$

wobei das Produkt über allen möglichen Primzahlen steht. Da dies das Produkt einer endlichen Anzahl absolut konvergenter Reihen ist, können wir die Reihe multiplizieren und die Terme beliebig neu anordnen, ohne die Summe zu verändern. Ein typischer Begriff ist von der Form

$$f(p_1^{a_1}) f(p_2^{a_2}) \cdots f(p_r^{a_r}) = f(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r})$$

Der Fundamentalsatz der Arithmetik impliziert dass

$$P(x) = \sum_{n \in A} f(n)$$

wobei A aus den n besteht, die alle ihre Primfaktoren $\leq x$ haben. Dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) - P(x) = \sum_{n \in B} f(n)$$

wobei B die Menge von n mit mindestens einem Primfaktor $> x$ ist. Somit

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} f(n) - P(x) \right| \leq \sum_{n \in B} |f(n)| \leq \sum_{n > x} |f(n)|.$$

Als $x \rightarrow \infty$ ist die letzte Summe rechts $\rightarrow 0$, da $\sum |f(n)|$ konvergent ist. Also $P(x) \rightarrow \sum f(n)$ als $x \rightarrow \infty$. Nun konvergiert ein unendliches Produkt der Form $\prod (1 + a_n)$ absolut immer dann, wenn die entsprechende Reihe $\sum a_n$ absolut konvergiert. In diesem Fall haben wir

$$\sum_{p \leq x} |f(p) + f(p^2) + \dots| \leq \sum_{p \leq x} (|f(p)| + |f(p^2)| + \dots) \leq \sum_{n=2}^x |f(n)|.$$

Da alle Partialsummen beschränkt sind, ist die Reihe positiver Terme

$$\sum_p |f(p) + f(p^2) + \dots|$$

konvergiert, und dies impliziert absolute Konvergenz des Produkts in (2.1).

Wenn schließlich f vollständig multiplikativ ist, haben wir $f(p^n) = f(p)^n$ und jede Reihe rechts von (2.1) ist eine konvergente geometrische Reihe mit Summe $(1 - f(p))^{-1}$. \square

Satz 18. Angenommen, $\sum f(n)n^{-s}$ konvergiert absolut für $\sigma > \sigma_a$. Wenn f multiplikativ ist, haben wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \left\{ 1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \dots \right\} \text{ if } \sigma > \sigma_a.$$

Wenn f vollständig multiplikativ ist, haben wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - f(p)p^{-s}} \text{ if } \sigma > \sigma_a.$$

Beispiel 10.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}} \text{ if } \sigma > 1.$$

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \prod_p (1 - p^{-s}) \text{ if } \sigma > 1.$$

$$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1 - p^{-s}}{1 - p^{1-s}} \text{ if } \sigma > 2.$$

$$\zeta(s)\zeta(s-\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_{\alpha}(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{(1 - p^{-s})(1 - p^{\alpha-s})} \text{ if } \sigma > \max\{1, 1 + \operatorname{Re}(\alpha)\}.$$

2.5 Die Konvergenzhalbebene einer Dirichlet-Reihe

Um die Existenz einer Halbebene der Konvergenz zu beweisen, verwenden wir das folgende Ergebnis.

Satz 19. Abelsche Identität. Für jede arithmetische Funktion $a(n)$ sei

$$A(x) = \sum_{n \leq x} a(n)$$

wobei $A(x) = 0$ wenn $x < 1$. Wir nehmen an, dass f eine stetige Ableitung auf dem Intervall $[y, x]$ hat, wobei $0 < y < x$. Dann gilt:

$$\sum_{y < n \leq x} a(n)f(n) = A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'(t)dt.$$

Beweis. Seien $k = \lfloor x \rfloor$ und $m = \lfloor y \rfloor$, sodass $A(x) = A(k)$ und $A(y) = A(m)$ sind. Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{y < n \leq x} a(n)f(n) &= \sum_{n=m+1}^k a(n)f(n) = \sum_{n=m+1}^k \{A(n) - A(n-1)\}f(n) \\ &= \sum_{n=m+1}^k A(n)f(n) - \sum_{n=m}^{k-1} A(n)f(n+1) \\ &= \sum_{n=m+1}^{k-1} A(n)\{f(n) - f(n+1)\} + A(k)f(k) - A(m)f(m+1) \\ &= - \sum_{n=m+1}^{k-1} A(n) \int_n^{n+1} f'(t)dt + A(k)f(k) - A(m)f(m+1) \\ &= - \sum_{n=m+1}^{k-1} \int_n^{n+1} A(t)f'(t)dt + A(k)f(k) - A(m)f(m+1) \\ &= - \int_{m+1}^k A(t)f'(t)dt + A(x)f(x) - \int_k^x A(t)f'(t)dt \\ &\quad - A(y)f(y) - \int_y^{m+1} A(t)f'(t)dt \\ &= A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'(t)dt. \end{aligned}$$

□

Lemma 3. Sei $s_0 = \sigma_0 + it_0$ und nehmen wir an, dass die Dirichlet-Reihe $\sum f(n)n^{-s_0}$ beispielsweise beschränkte Partialsummen für alle $x \geq 1$

$$\left| \sum_{n \leq x} f(n)n^{-s_0} \right| \leq M$$

hat. Dann haben wir für jedes s mit $\sigma > \sigma_0$, dass

$$\left| \sum_{a < n \leq b} f(n)n^{-s} \right| \leq 2Ma^{\sigma_0 - \sigma} \left(1 + \frac{|s - s_0|}{\sigma - \sigma_0} \right).$$

Beweis. Sei $a(n) = f(n)n^{-s_0}$ und sei $A(x) = \sum_{n \leq x} a(n)$. Dann ist $f(n)n^{-s} = a(n)n^{s_0-s}$, und wir erhalten

$$\sum_{a < n \leq b} f(n)n^{-s} = A(b)b^{s_0-s} - A(a)a^{s_0-s} + (s - s_0) \int_a^b A(t)t^{s_0-s-1} dt.$$

Da $|A(x)| \leq M$, gilt die folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{a < n \leq b} f(n)n^{-s} \right| &\leq Mb^{\sigma_0-\sigma} + Ma^{\sigma_0-\sigma} + |s - s_0| M \int_a^b t^{\sigma_0-\sigma-1} dt \\ &\leq 2Ma^{\sigma_0-\sigma} + |s - s_0| M \left| \frac{b^{\sigma_0-\sigma} - a^{\sigma_0-\sigma}}{\sigma_0 - \sigma} \right| \\ &\leq 2Ma^{\sigma_0-\sigma} \left(1 + \frac{|s - s_0|}{\sigma - \sigma_0} \right). \end{aligned}$$

□

Satz 20. Wenn die Reihe $\sum f(n)n^{-s}$ für $s = \sigma_0 + it_0$ konvergiert, dann konvergiert sie auch für alle s mit $\sigma > \sigma_0$. Wenn es für $s = \sigma_0 + it_0$ divergiert, dann divergiert es für alle s mit $\sigma < \sigma_0$.

Beweis. Die zweite Aussage folgt aus der ersten. Um die erste Aussage zu beweisen, wählen Sie ein beliebiges s mit $\sigma > \sigma_0$. Dann zeigt Lemma 2

$$\left| \sum_{a < n \leq b} f(n)n^{-s} \right| \leq Ka^{\sigma_0-\sigma}$$

wobei K unabhängig von a ist. Da $a^{\sigma_0-\sigma} \rightarrow 0$ gleich $a \rightarrow +\infty$ ist, zeigt die Cauchy-Bedingung, dass $\sum f(n)n^{-s}$ konvergiert.

□

Satz 21. Wenn die Reihe $\sum f(n)n^{-s}$ nicht überall konvergiert oder überall divergiert, dann gibt es eine reelle Zahl σ_c , die Abszisse der Konvergenz genannt wird, sodass die Reihe konvergiert für alle s in der Halbebene $\sigma > \sigma_c$ und divergiert für alle s in der Halbebene $\sigma < \sigma_c$.

Beweis. Wir argumentieren wie im Beweis von Satz 12 und nehmen σ_c als kleinste obere Schranke aller σ , für die $\sum f(n)n^{-s}$ divergiert. □

Bemerkung 3. Wenn die Reihe überall konvergiert, definieren wir $\sigma_c = -\infty$, und wenn sie nirgendwo konvergiert, definieren wir $\sigma_c = +\infty$.

Es gilt $\sigma_a \geq \sigma_c$. Für $\sigma_a > \sigma_c$ gibt es einen unendlichen Streifen $\sigma_c < \sigma < \sigma_a$, in dem die Reihe bedingt konvergiert. Der nächste Satz zeigt, dass die Breite dieses Streifens 1 nicht überschreitet.

Satz 22. Für jede Dirichlet-Reihe mit endlichem σ_c gilt

$$0 \leq \sigma_a - \sigma_c \leq 1.$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass wenn $\sum f(n)n^{-s_0}$ für einige s_0 konvergiert, dann konvergiert die Reihe für alle s mit $\sigma > \sigma_0 + 1$ absolut. Sei A eine obere Schranke für die Zahlen $|f(n)n^{-s_0}|$. Dann gilt

$$\left| \frac{f(n)}{n^s} \right| = \left| \frac{f(n)}{n^{s_0}} \right| \left| \frac{1}{n^{s-s_0}} \right| \leq \frac{A}{n^{\sigma-\sigma_0}},$$

also konvergiert $\sum |f(n)n^{-s}|$ gegen $\sum n^{\sigma_0-\sigma}$. \square

Beispiel 11. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}$$

konvergiert bei $\sigma > 0$, aber die Konvergenz ist nur für $\sigma > 1$ absolut. Also ist in diesem Beispiel $\sigma_c = 0$ und $\sigma_a = 1$.

3 Dirichlet Reihen als Analytische Funktionen

Lemma 4. Sei $\{f_n\}$ eine Folge von Funktionen, die auf einer offenen Teilmenge S der komplexen Ebene analytisch sind, und nehme an, dass $\{f_n\}$ auf jeder kompakten Teilmenge von S gleichmäßig zu einer Grenzwertfunktion f konvergiert. Dann ist f analytisch auf S und die Folge der Ableitungen $\{f'_n\}$ konvergiert gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von S gegen die Ableitung f' .

Um das Lemma auf Dirichlet-Reihen anzuwenden zeigen wir zunächst, dass wir gleichmäßige Konvergenz auf kompakten Teilmengen der Konvergenzhalbebene haben.

Satz 23. Eine Dirichlet-Reihe $\sum f(n)n^{-s}$ konvergiert gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge, die innerhalb der Konvergenzhalbebene $\sigma > \sigma_c$ liegt.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass $\sum f(n)n^{-s}$ auf jedem kompakten Rechteck $R = [\alpha, \beta] \times [c, d]$ mit $\alpha > \sigma_c$ gleichmäßig konvergiert. Dazu verwenden wir die in Lemma 2 erhaltene Abschätzung,

$$\left| \sum_{a < n \leq b} f(n)n^{-s} \right| \leq 2Ma^{\sigma_0-\sigma} \left(1 + \frac{|s-s_0|}{\sigma-\sigma_0} \right),$$

wobei $s_0 = \sigma_0 + it_0$ ein beliebiger Punkt in der Halbebene $\sigma > \sigma_c$ und s ein beliebiger Punkt mit $\sigma > \sigma_0$ ist. Wir wählen $s_0 = \sigma_0$ wobei $\sigma_c < \sigma_0 < \alpha$.

Wenn dann $s \in R$ ist, haben wir $\sigma - \sigma_0 \geq \alpha - \sigma_0$ und $|s_0 - s| < C$, wobei C eine Konstante ist, die von s_0 und R abhängt, aber nicht von s . Dann gilt

$$\left| \sum_{a < n \leq b} f(n)n^{-s} \right| \leq 2Ma^{\sigma_0-\alpha} \left(1 + \frac{C}{\alpha - \sigma_0} \right) = Ba^{\sigma_0-\alpha},$$

wobei B unabhängig von s ist. Da $a^{\sigma_0-\alpha} \rightarrow 0$ wenn $a \rightarrow +\infty$ gilt, ist die Cauchy-Bedingung für gleichmäßige Konvergenz erfüllt. \square

Satz 24. Die Summenfunktion $F(s) = \sum f(n)n^{-s}$ einer Dirichlet-Reihe ist analytisch in ihre Konvergenzhalbebene $\sigma > \sigma_c$ und ihrer Ableitung $F'(s)$ wird in dieser Halbebene durch die Dirichlet-Reihe repräsentiert

$$F'(s) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n) \log n}{n^s}.$$

Diese erhält man, indem man Term für Term differenziert. □

Wenn wir den obigen Satz wiederholt anwenden, finden wir, dass die k -te Ableitung gegeben durch

$$F^{(k)}(s) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)(\log n)^k}{n^s} \text{ für } \sigma > \sigma_c$$

ist.

Beispiel 12. Für $\sigma > 1$ haben wir

$$\zeta'(s) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s}$$

und

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Die erste Gleichung ergibt sich aus der gliedweisen Differentiation der Reihen für die Zeta-Funktion, und die zweite Gleichung aus der Multiplikation der beiden Dirichlet-Reihen $\sum \Lambda(n)n^{-s}$ und $\sum n^{-s}$ und unter Verwendung der Identität $\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log n$.

4 Riemannsche Zeta Funktion

In diesem Kapitel beweisen wir die meromorphe⁴ Fortsetzung der Riemann-Zeta-Funktion (und einiger anderer Zeta-Funktionen). Aber es wäre für uns praktisch, mit der Einführung der Hurwitz-Zeta-Funktion $\zeta(s, a)$ zu beginnen, die für $\sigma > 1$ durch die folgende Reihe definiert ist

$$\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s}.$$

Hier ist a eine fixe reelle Zahl, $0 < a \leq 1$. Wenn $a = 1$, reduziert sich die Gleichung auf die Riemann-Zeta-Funktion, $\zeta(s) = \zeta(s, 1)$.

4.1 Eulersche Gamma Funktion

Im Laufe des Kapitels werden wir einige grundlegende Eigenschaften der Gammafunktion $\Gamma(s)$ benötigen. Für $\sigma > 0$ haben wir die Integraldarstellung

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx.$$

⁴Es sei D eine nichtleere offene Teilmenge der Menge \mathbb{C} der komplexen Zahlen und P_f eine weitere Teilmenge von \mathbb{C} , die nur aus isolierten Punkten besteht. Eine Funktion f heißt *meromorph*, wenn sie für Stellen aus D_f definiert und holomorph ist und für Stellen aus P_f Pole hat.

Die so für $\sigma > 0$ definierte Funktion kann über die Zeile $\sigma = 0$ hinaus fortgesetzt werden, und $\Gamma(s)$ existiert als Funktion, die überall in der s -Ebene außer einfach analytisch ist außer an den Punkten

$$s = 0, -1, -2, -3, \dots,$$

mit Residuum $(-1)^n/n!$ bei $s = -n$. Die Gammafunktion erfüllt für alle s zwei Funktionsgleichungen,

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$$

und

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}.$$

Außerdem, existiert eine Multiplikationsformel für alle s und alle ganzen Zahlen $m \geq 1$

$$\Gamma(s)\Gamma\left(s + \frac{1}{m}\right) \cdots \Gamma\left(s + \frac{m-1}{m}\right) = (2\pi)^{(m-1)/2} m^{(1/2)-ms} \Gamma(ms).$$

4.2 Integraldarstellung für die Hurwitz-Zeta-Funktion

Die Hurwitz-Zeta-Funktion $\zeta(s, a)$ wird zunächst für $\sigma > 1$ durch die Reihe definiert

$$\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s}$$

Satz 25. Die Reihe für $\zeta(s, a)$ konvergiert absolut für $\sigma > 1$. Die Konvergenz ist in jeder Halbebene $\sigma \geq 1 + \delta$, $\delta > 0$ gleichmäßig, also ist $\zeta(s, a)$ eine analytische Funktion von s in der Halbebene $\sigma > 1$.

Beweis. Alle diese Aussagen folgen aus den Ungleichungen

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(n+a)^{-s}| = \sum_{n=1}^{\infty} (n+a)^{-\sigma} \leq \sum_{n=1}^{\infty} (n+a)^{-(1+\delta)}.$$

□

Um $\zeta(s, a)$ über die Linie $\sigma = 1$ hinaus zu verlängern, leiten wir eine andere Darstellung in Form eines Konturintegrals her. Die Kontur C ist eine Schleife um die negative reelle Achse, wie in Abbildung gezeigt. Die Schleife besteht aus drei Teilen C_1, C_2, C_3 . Der Teil C_2 ist ein positiv orientierter Kreis mit Radius $c < 2\pi$ um den Ursprung, und C_1, C_3 sind die unteren und oberen Kanten eines "Schnitts" in z -Ebene entlang der negativen reellen Achse.

Das bedeutet, dass wir die Parametrisierungen $z = re^{-\pi i}$ auf C_1 und $z = re^{\pi i}$ auf C_3 verwenden, wobei r von c bis $+\infty$ variiert.

Satz 26. Sei $0 < a \leq 1$ und sei

$$I(s, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^{s-1} e^{az}}{1 - e^z} dz$$

die durch das Konturintegral definierte Funktion. Dann ist $I(s, a)$ eine ganze Funktion von s . Außerdem ist

$$\zeta(s, a) = \Gamma(1-s)I(s, a) \text{ für } \sigma > 1.$$

Beweis. Hier bedeutet z^s :

- $r^s e^{-\pi i s}$ auf C_1
- und $r^s e^{\pi i s}$ auf C_3 .

Wir betrachten eine beliebige kompakte Scheibe $|s| \leq M$ und beweisen, dass die Integrale über C_1 und C_3 auf jeder solchen Scheibe gleichmäßig konvergieren. Da der Integrand eine ganze Funktion von s ist beweist dies, dass $I(s, a)$ ganz ist.

Entlang C_1 haben wir für $r \geq 1$

$$|z^{s-1}| = r^{\sigma-1} |e^{-\pi i(\sigma-1+it)}| = r^{\sigma-1} e^{\pi t} \leq r^{M-1} e^{\pi M}$$

da $|s| \leq M$ ist. Ebenso haben wir entlang C_3 für $r \geq 1$

$$|z^{s-1}| = r^{\sigma-1} |e^{\pi i(\sigma-1+it)}| = r^{\sigma-1} e^{-\pi t} \leq r^{M-1} e^{\pi M}.$$

Somit haben wir entweder für C_1 oder C_3 für $r \geq 1$

$$\left| \frac{z^{s-1} e^{az}}{1 - e^z} \right| \leq \frac{r^{M-1} e^{\pi M} e^{-ar}}{1 - e^{-r}} = \frac{r^{M-1} e^{\pi M} e^{(1-a)r}}{e^r - 1}.$$

Aber $e^r - 1 > e^r/2$ wenn $r > \log 2$, also ist der Integrand durch $A r^{M-1} e^{-ar}$ begrenzt, wobei A eine Konstante ist, die von M , aber nicht von r abhängt. Da $\int_c^\infty r^{M-1} e^{-ar} dr$ konvergiert, wenn $c > 0$, zeigt dies, dass die Integrale entlang C_1 und C_3 konvergieren, und somit ist $I(s, a)$ eine ganze Funktion von s .

Wir schreiben jetzt

$$2\pi i I(s, a) = \left(\int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} \right) z^{s-1} g(z) dz$$

wobei $g(z) = e^{az} / (1 - e^z)$ ist. Auf C_1 und C_3 haben wir $g(z) = g(-r)$, und auf C_2 schreiben wir $z = ce^{i\theta}$, wobei $-\pi \leq \theta \leq \pi$ ist. Das gibt uns

$$\begin{aligned} 2\pi i I(s, a) &= \int_\infty^c r^{s-1} e^{-\pi i s} g(-r) dr + i \int_{-\pi}^\pi c^{s-1} e^{(s-1)i\theta} ce^{i\theta} g(ce^{i\theta}) d\theta \\ &\quad + \int_c^\infty r^{s-1} e^{\pi i s} g(-r) dr \\ &= 2i \sin(\pi s) \int_c^\infty r^{s-1} g(-r) dr + ic^s \int_{-\pi}^\pi e^{is\theta} g(ce^{i\theta}) d\theta. \end{aligned}$$

Dividiert durch $2i$ erhalten wir

$$\pi I(s, a) = \sin(\pi s) I_1(s, c) + I_2(s, c).$$

Nun sei $c \rightarrow 0$. Wir finden

$$\lim_{c \rightarrow 0} I_1(s, c) = \int_0^\infty \frac{r^{s-1} e^{-ar}}{1 - e^{-r}} dr = \Gamma(s) \zeta(s, a),$$

wenn $\sigma > 1$. Als nächstes zeigen wir, dass $\lim_{c \rightarrow 0} I_2(s, c) = 0$. Beachten Sie dazu, dass $g(z)$ in $|z| < 2\pi$ analytisch ist mit Ausnahme eines Pols erster Ordnung bei $z = 0$. Daher ist

$zg(z)$ überall innerhalb von $|z| < 2\pi$ analytisch und beschränkt bei $|g(z)| \leq A/|z|$, wobei $|z| = c < 2\pi$ und A eine Konstante ist. Somit erhalten wir

$$|I_2(s, c)| \leq \frac{c^\sigma}{2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-t\theta} \frac{A}{c} d\theta \leq Ae^{\pi|t|} c^{\sigma-1}.$$

Wenn $\sigma > 1$ und $c \rightarrow 0$ erhalten wir $I_2(s, c) \rightarrow 0$, also $\pi I(s, a) = \sin(\pi s)\Gamma(s)\zeta(s, a)$. Da $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \pi/\sin \pi s$ ist beweist dies den Satz. \square

Wir stellen fest dass für $n \in \mathbb{N}$

$$\left(\int_{C_1} + \int_{C_3} \right) z^{-n-1}g(z)dz = 0,$$

und dann ist

$$I(-n, a) = \int_{C_2} z^{-n-1}g(z)dz = \text{Res}_{z=0} \left(\frac{z^{-n-1}e^{az}}{1-e^z} \right).$$

Wir haben für $n \in \mathbb{N}$:

$$\zeta(-n, a) = \Gamma(n+1)I(-n, a) = n!I(-n, a) = n!\text{Res}_{z=0} \left(\frac{z^{-n-1}e^{az}}{1-e^z} \right).$$

Mit dieser Formel können wir rechnen, z.B.:

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}.$$

4.3 Fourier Reihen und Fourier Transformation

Im Folgenden geben wir einen alternativen Beweis für die meromorphe Fortsetzung der Riemannschen Zetafunktion.

Dazu rekapitulieren wir einige Eigenschaften der Fourier-Reihe und der Fourier-Transformationen. Das Thema der Fourier-Analyse ist zu umfangreich, um es hier im Detail zu behandeln, aber im weiteren Verlauf der Zahlentheorie werden wir eine Perle der Fourier-Analyse verwenden, nämlich die Poisson-Summenformel.

Definition 8. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ist 2π -periodisch, wenn für alle $\theta \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(\theta + 2\pi) = f(\theta).$$

In dieser Vorlesung gehen wir davon aus, dass $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ auf jedem beschränktem Intervall Riemann integrierbar⁵ ist. Die Frage, welche wir beantworten möchten: Kann man $f(x)$ in eine Reihe erweitern in der Form

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) \quad (4.1)$$

⁵Fragen zur Selbstkontrolle: Kennen Sie hinreichende Bedingungen, ab wann eine Funktion Riemann integrierbar ist? Sind abgeschlossene Funktionen Riemann integrierbar? Können sie ein Beispiel einer Funktion geben, welche nicht glatt ist aber trotzdem Riemann integrierbar?

Sei

$$c_0 := \frac{1}{2}a_0, \quad c_n := \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad c_{-n} := \frac{1}{2}(a_n + ib_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

dann können wir (4.1) wie folgt umschreiben:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}. \quad (4.2)$$

Wir nehmen für einen Moment an, dass $f(\theta)$ wie in (4.2) beschrieben wird. Wir möchten nun c_n durch f ausdrücken. Dazu nehmen wir an, dass wir dies formell tun können und ignorieren potentielle Konvergenzprobleme o.ä.

Wir wählen ein $k \in \mathbb{Z}$, multiplizieren (4.2) mit $e^{-ik\theta}$ und integrieren von $-\pi$ bis π und erhalten:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-ik\theta} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i(n-k)\theta} d\theta.$$

Zusätzlich nehmen wir an, dass hier Integration und Summierung austauschbar sind und erhalten:⁶

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i(n-k)\theta} d\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)\theta} d\theta. \quad (4.3)$$

Es gilt für $n \neq k$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)\theta} d\theta = \left. \frac{e^{i(n-k)\theta}}{i(n-k)} \right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{(-1)^{n-k} - (-1)^{n-k}}{i(n-k)} = 0,$$

und für $n = k$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)\theta} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta = 2\pi.$$

Wenn wir diese Integrale in (4.3) einsetzen erhalten wir:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-ik\theta} d\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)\theta} d\theta = 2\pi c_k.$$

Wir benennen nun k zu n um und erhalten für beliebige $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta. \quad (4.4)$$

Es ist nun einfach die Koeffizienten a_n und b_n zu finden: für $n = 0$, gilt⁷

$$a_0 = 2c_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta$$

⁶Weitere Frage zur Selbstkontrolle: Wann genau dürfen wir das tun?

⁷Wir haben b_j nur für $j = 1, 2, 3, \dots$ definiert.

und für $n = 1, 2, 3, \dots$,

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) (e^{-in\theta} + e^{in\theta}) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) (e^{-in\theta} - e^{in\theta}) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta$$

d.h.,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta, \quad n \geq 1, \quad (4.5)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta, \quad n \geq 1. \quad (4.6)$$

Beachten Sie, dass die Gleichungen ebenfalls für $n = 0$ gelten:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos(0 \cdot \theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta. \quad (4.7)$$

Es sei angemerkt, dass obige Berechnungen formell, d.h. unbewiesen sind. Aber wenn f nun eine beliebige, Riemann-integrierbare, periodische Funktion ist, ergeben die oberen Integrale Sinn und wir können sie nutzen, um die Koeffizienten a_n , b_n , und c_n zu definieren. Wir können nun eine formale Definition erstellen:

Definition 9. Wir nehmen an, eine Funktion f ist 2π -periodisch und zwischen $[-\pi, \pi]$ integrierbar. Die Zahlen c_n , definiert durch (4.4), oder die Zahlen a_n und b_n , definiert durch (4.5), (4.6), (4.7), sind die Fourier Koeffizienten von f und die zugehörige Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} \text{ oder } \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

ist die Fourier Reihe von f .

Satz 27. Wenn eine Funktion f 2π -periodisch und glatt auf \mathbb{R} ist, und S_N^f durch

$$S_N^f(\theta) := \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^N (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) = \sum_{-N}^N c_n e^{in\theta} \quad (4.8)$$

definiert ist, dann ist

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N^f(\theta) = f(\theta)$$

für jedes θ . □

Definition 10. Wenn g eine integrierbare Funktion auf \mathbb{R} ist, ist ihre Fourier-Transformation die Funktion \widehat{g} auf \mathbb{R} definiert durch

$$\widehat{g}(\xi) = \int e^{-i\xi x} g(x) dx.$$

Die Poissonsche Summenformel ist ein Hilfsmittel der Fourier-Analyse und Signalverarbeitung. Sie dient unter anderem zur Analyse der Eigenschaften von Abtastmethoden.

Lemma 5. Sei ϕ genügend glatt und im Unendlichen genügend schnell fallend, gilt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(2\pi n).$$

Beweis. Die Funktion

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(k+t)$$

ist stetig, beschränkt, differenzierbar und periodisch mit Periode 1. Diese kann also in eine punktweise konvergente Fourier-Reihe entwickelt werden,

$$g(t) = \sum_n c_n e^{2\pi i n t}$$

wobei

$$c_n = \int_0^1 \sum_k \phi(k+t) e^{-2\pi i n t} dt = \sum_k \int_k^{k+1} \phi(t) e^{-2\pi i n t} dt = \hat{\phi}(2\pi n),$$

dann ist

$$g(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(k) = \sum_n c_n e^{2\pi i n \cdot 0} = \sum_n c_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(2\pi n).$$

□

4.4 Ein weiterer Beweis für die meromorphe Fortsetzung der Riemann-Zeta-Funktion

Definition 11. Wir definieren eine so-genannte *Thetafunktion*:

$$\theta(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 u}, \quad \operatorname{Re}(u) > 0.$$

Lemma 6. Es gilt:

$$\theta(1/u) = u^{1/2} \theta(u).$$

Beweis. Sei $f(x) = e^{-\pi u x^2}$. Dann ist

$$\hat{f}(\xi) = \int e^{-ix\xi} f(x) dx = \int e^{-ix\xi} e^{-\pi u x^2} dx = \frac{e^{-\xi^2/(4\pi u)}}{u^{1/2}},$$

und

$$\theta(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\pi n^2/u}}{u^{1/2}} = \frac{\theta(1/u)}{u^{1/2}}.$$

□

Für unser nächstes Theorem ist es bequemer, die Funktion ψ zu verwenden:

$$\psi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 u} = \frac{\theta(u) - 1}{2}$$

die

$$\psi(u) = -\frac{1}{2} + u^{-\frac{1}{2}} \left(\psi\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{1}{2} \right).$$

erfüllt.

Satz 28. Die Riemannsche Zeta-Funktion lässt eine meromorphe Fortsetzung von $s \in \mathbb{C}$ zu; außerdem erfüllt es die folgende Funktionsgleichung:

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s).$$

Beweis. Es gilt

$$\frac{1}{n^s} \Gamma\left(\frac{s}{2} - 1\right) \pi^{-\frac{s}{2}} = \int_0^{\infty} e^{-n^2 \pi x} x^{\frac{s}{2}-1} dx,$$

dann ist

$$\zeta(s) \Gamma\left(\frac{s}{2} - 1\right) \pi^{-\frac{s}{2}} = \int_0^{\infty} \psi(x) x^{\frac{s}{2}-1} dx,$$

oder

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{s}{2} - 1\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s) &= \left(\int_1^{\infty} + \int_0^1 \right) \psi(x) x^{\frac{s}{2}-1} dx \\ &= \int_1^{\infty} \psi(x) x^{\frac{s}{2}-1} dx + \int_0^1 \left(x^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \right) x^{\frac{s}{2}-1} dx \\ &= \int_1^{\infty} \psi(x) x^{\frac{s}{2}-1} dx + \int_0^1 \psi\left(\frac{1}{u}\right) u^{\frac{s-3}{2}} du + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x^{\frac{s-3}{2}} - x^{\frac{s}{2}-1} \right) dx \\ &= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{\infty} \psi(x) \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{1+s}{2}} \right) dx. \end{aligned}$$

Die rechte Seite konvergiert für beliebige Werte von s , was die meromorphe Fortsetzung impliziert. Außerdem ist es symmetrisch unter der Transformation $s \mapsto 1-s$, d.h.,

$$\Gamma\left(\frac{s}{2} - 1\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s) = \Gamma\left(\frac{1-s}{2} - 1\right) \pi^{-\frac{1-s}{2}} \zeta(1-s).$$

Daraus erhalten wir die Funktionsgleichung. □

4.5 Der (bisher) kürzeste Beweis des Primzahlsatzes

Wir haben zwei Beweise für die meromorphe Fortsetzung der Riemannschen Zetafunktion auf $s \in \mathbb{C}$ geliefert: einen mit dem Konturintegral und einen mit Hilfe der Poisson-Summenformel. Wenn wir jedoch nur die meromorphe Fortsetzung zu $\operatorname{Re}(s) > 0$ untersuchen wollten, hätten wir dies in 3 Zeilen tun können.

Lemma 7. Die Funktion $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ ist holomorph auf $\operatorname{Re}(s) > 0$.

Beweis. Für $\sigma > 1$ gilt

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx \quad (4.9)$$

Andererseits haben wir für $\sigma > 0$

$$\begin{aligned} \left| \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx \right| &= \left| s \int_n^{n+1} \int_n^x \frac{du}{u^{s+1}} dx \right| \\ &\leq \max_{n \leq x \leq n+1} \int_n^x \left| \frac{s du}{u^{s+1}} \right| \leq \max_{n \leq u \leq n+1} \left| \frac{s}{u^{s+1}} \right| = \frac{|s|}{n^{\sigma+1}}. \end{aligned}$$

□

Im Folgenden verwenden wir immer p , um eine Primzahl zu bezeichnen. Für den Beweis des Primzahlsatzes benötigen wir folgende Funktionen:

$$\Phi(s) = \sum_p \frac{\log p}{p^s}, \quad \vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p, \quad s \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}.$$

Lemma 8. Es gilt $\vartheta(x) = O(x)$.

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$2^{2n} = (1+1)^{2n} = \binom{2n}{0} + \dots + \binom{2n}{2n}$$

Wir wissen, dass jeder Summand der obigen Summe positiv ist. Wir beachten auch, dass $\binom{2n}{n}$ einer der Summanden ist. Daraus können wir schließen, dass die Gesamtsumme größer oder gleich $\binom{2n}{n}$ ist.

Es gilt $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$. Anhand der Eigenschaften von Binomialkoeffizienten wissen wir, dass es sich um eine ganze Zahl handelt. Wir stellen fest, dass jede Primzahl p , die $n < p \leq 2n$ erfüllt, $(2n)!$ teilt, aber nicht $(n!)^2$. Dann gilt $\left(\prod_{n < p \leq 2n} p \right) \mid \binom{2n}{n}$, und

$$\binom{2n}{n} \geq \prod_{n < p \leq 2n} p = e^{\vartheta(2n) - \vartheta(n)} \implies 2^{2n} \geq e^{\vartheta(2n) - \vartheta(n)}.$$

Dann ist

$$\vartheta(2n) - \vartheta(n) \leq 2n \log(2).$$

Unser nächster Schritt besteht darin zu zeigen, dass eine ähnliche Ungleichung nicht nur für ganze Zahlen, sondern auch für die reellen gilt:

$$\begin{aligned} \vartheta(x) &\leq \vartheta(2\lfloor x/2 \rfloor) + \log(x) + \log(x-1), \\ -\vartheta(x/2) &\leq -\vartheta(\lfloor x/2 \rfloor), \end{aligned}$$

dann ist

$$\vartheta(x) - \vartheta(x/2) \leq \vartheta(2\lfloor x/2 \rfloor) - \vartheta(\lfloor x/2 \rfloor) + \log(x) + \log(x-1) \leq 2 \log(2) \lfloor x/2 \rfloor + 2 \log(x).$$

Oder,

$$\vartheta(x) - \vartheta(x/2) \leq Cx,$$

für jedes $C > \log 2$ und $x \geq x_0 = x_0(C)$. Wir summieren diese Ungleichungen⁸ für $x, x/2, \dots, x/2^r$ mit $x/2^r \geq x_0 > x/2^{r+1}$ und erhalten $\vartheta(x) \leq 2Cx + O(1)$. \square

Lemma 9. Die Funktion $\Phi(s) - \frac{1}{s-1}$ ist holomorph für $\sigma \geq 1$, und es gilt $\zeta(s) \neq 0$ für $\sigma \geq 1$.

Beweis. Es gilt für $\sigma > 1$

$$\begin{aligned} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= -(\log(\zeta(s)))' = -\left(\log\left(\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}\right)\right)' = -\sum_p \left(\log\left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right)\right)' \\ &= \sum_p \left(\frac{(1-p^{-s})'}{1-p^{-s}}\right) = \sum_p \frac{\log(p)p^{-s}}{1-p^{-s}} = \sum_p \frac{\log(p)}{p^s-1} = \Phi(s) + \sum_p \frac{\log p}{p^s(p^s-1)} \end{aligned}$$

Die Summe $\sum_p \frac{\log p}{p^s(p^s-1)}$ konvergiert für $\sigma > 1/2$. D.h., wir haben eine meromorphe Fortsetzung von $\Phi(s)$ in der Halbebene $\sigma > \frac{1}{2}$ gefunden.

Wir stellen fest, dass Pole von Φ entweder von Polen oder Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion stammen. Wir bemerken zuerst, dass für $\sigma > 0$,

$$(s-1) \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = (s-1) \frac{-\frac{1}{(s-1)^2} + \text{holomorphe Funktion}}{\frac{1}{s-1} + \text{holomorphe Funktion}} = \frac{-1 + (s-1) \cdot \text{holomorphe Funktion}}{1 + (s-1) \cdot \text{holomorphe Funktion}},$$

und

$$\lim_{s \rightarrow 1} \left(-(s-1) \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) = 1.$$

Wir nehmen $\epsilon = s-1$ und lassen $\epsilon \searrow 0$. Dann gilt

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \epsilon \Phi(1+\epsilon) = \lim_{\epsilon \searrow 0} \epsilon \left(-\frac{\zeta'(1+\epsilon)}{\zeta(1+\epsilon)} - \sum_p \frac{\log(p)}{p^{1+\epsilon}(p^{1+\epsilon}-1)} \right) = 1.$$

Der Pol der Riemannschen Zetafunktion trägt also zu einem Pol für Φ bei. Nun gehen wir davon aus, dass die Riemannsche Zetafunktion bei $\sigma = 1$ eine Nullstelle hat; nämlich, wir nehmen an, dass $\zeta(s)$ eine Nullstelle der Ordnung $\mu \geq 0$ bei $s = 1 + i\alpha$ hat^{9,10} mit $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$. Dann gilt

$$\lim_{s \rightarrow 1+i\alpha} (s-1-i\alpha) \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \mu$$

und

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \epsilon \Phi(1+\epsilon-i\alpha) = -\mu.$$

Eine schöne Konsequenz der Formel (4.9): wenn $1+i\alpha$ eine Nullstelle ist, dann ist auch $1-i\alpha$ eine Nullstelle gleicher Ordnung. Das impliziert

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \epsilon \Phi(1+\epsilon+i\alpha) = -\mu.$$

⁸D.h., wir schreiben $(\vartheta(x) - \vartheta(x/2)) + (\vartheta(x/2) - \vartheta(x/4)) + \dots \leq Cx + Cx/2 + Cx/4 + \dots$

⁹D.h., \exists eine holomorphe Funktion h mit $h(1+i\alpha) \neq 0$ so dass $\zeta(s) = (s-1-i\alpha)^\mu h(s)$

¹⁰Es kann sein, dass $\mu = 0$ ist!

Wir nehmen auch an, dass es eine Nullstelle der Ordnung ν bei $1 + 2i\alpha$ gibt¹¹. Dann gilt

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \epsilon \Phi(1 + \epsilon \pm 2i\alpha) = -\nu.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{r=-2}^2 \binom{4}{2+r} \Phi(1 + \epsilon + ir\alpha) &= \sum_{r=-2}^2 \binom{4}{2+r} \sum_p \frac{\log(p)}{p^{1+\epsilon+ir\alpha}} \\ &= \sum_p \frac{\log(p)}{p^{1+\epsilon}} \sum_{r=-2}^2 \binom{4}{2+r} p^{-ir\alpha} \\ &= \sum_p \frac{\log(p)}{p^{1+\epsilon}} (p^{i\alpha/2} + p^{-i\alpha/2})^4 \geq 0. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{\epsilon \searrow 0} \sum_{r=-2}^2 \binom{4}{2+r} \epsilon \Phi(1 + \epsilon + ir\alpha) = \sum_{r=-2}^2 \binom{4}{2+r} \lim_{\epsilon \searrow 0} \epsilon \Phi(1 + \epsilon + ir\alpha) \\ &= -\binom{4}{0}\nu - \binom{4}{1}\mu + \binom{4}{2} - \binom{4}{3}\mu - \binom{4}{4}\nu \\ &= -\nu - 4\mu + 6 - 4\mu - \nu = 6 - 8\mu - 2\nu, \end{aligned}$$

und

$$8\mu \leq 6 - 2\nu.$$

Weil $\nu \geq 0$, muss $\mu = 0$ sein. Dann ist $\zeta(1 + i\alpha) \neq 0$. □

Satz 29. Sei $f(t), t \geq 0$ eine beschränkte und lokal integrierbare Funktion und angenommen, dass die Funktion

$$g(z) = \int_0^\infty f(t)e^{-zt} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0$$

eine holomorphe Fortsetzung zu $\operatorname{Re}(z) \geq 0$ hat. Dann existiert $\int_0^\infty f(t)dt$, und $\int_0^\infty f(t)dt = g(0)$.

Beweis. Für $T > 0$ setze $g_T(z) = \int_0^T f(t)e^{-zt} dt$. Dies ist eindeutig holomorph für alle z . Wir müssen zeigen, dass $\lim_{T \rightarrow \infty} g_T(0) = g(0)$ ist.

Seien R groß und C die Grenze der Region $\{z \in \mathbb{C}, |z| \leq R, \operatorname{Re}(z) \geq -\delta\}$, wobei $\delta > 0$ klein genug ist (abhängig von R), sodass $g(z)$ holomorph in und auf C ist. Dann gilt¹²

$$g(0) - g_T(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C (g(z) - g_T(z)) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z}.$$

Sei $B = \max_{t \geq 0} |f(t)|$. Auf dem Halbkreis $C_+ = C \cap \{\operatorname{Re}(z) > 0\}$ ist der Integrand durch $2B/R^2$ begrenzt, weil

$$|g(z) - g_T(z)| = \left| \int_T^\infty f(t)e^{-zt} dt \right| \leq B \int_T^\infty |e^{-zt}| dt = \frac{Be^{-\operatorname{Re}(z)T}}{\operatorname{Re}(z)}, \quad \operatorname{Re}(z) > 0$$

¹¹Dies ist nicht zu restriktiv, da wir davon ausgehen können, dass $\nu = 0$.

¹²weil $(g(z) - g_T(z)) e^{zT} z^2 / (R^2 z)$ holomorph, und $\operatorname{Res}_{z=0}((g(z) - g_T(z)) e^{zT} / z) = g(0) - g_T(0)$ ist.

und

$$\left| e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right) \frac{1}{z} \right| = e^{\operatorname{Re}(z)T} \cdot \frac{2\operatorname{Re}(z)}{R^2}.$$

Dann $\exists K_1 > 0$ (unabhängig von B , T und R) mit

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} (g(z) - g_T(z)) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right) \frac{dz}{z} \right| \leq K_1 \frac{B}{R}.$$

Sei jetzt

$$C_- = C \cap \{\operatorname{Re}(z) < 0\} \quad \text{und} \quad C'_- = \{z \in \mathbb{C}, |z| = R, \operatorname{Re}(z) < 0\}.$$

Weil g_T eine ganze Funktion ist, dann ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_-} g_T(z) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right) \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'_-} g_T(z) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right) \frac{dz}{z}.$$

Weil

$$|g_T(z)| = \left| \int_0^T f(t) e^{-zt} dt \right| \leq B \int_{-\infty}^T |e^{-zt}| dt = \frac{B e^{-\operatorname{Re}(z)T}}{|\operatorname{Re}(z)|} \quad (\operatorname{Re}(z) < 0),$$

existiert K_2 (unabhängig von B , T und R) mit

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_-} (g_T(z)) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right) \frac{dz}{z} \right| \leq K_2 \frac{B}{R}.$$

Schließlich betrachten wir

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_-} g(z) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right) \frac{dz}{z} \right|.$$

Der Integrand ist das Produkt der Funktion $g(z) \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right) / z$, die unabhängig von T ist, und die Funktion e^{zT} , die auf kompakten Mengen schnell und gleichmäßig gegen 0 in der Halbebene $\operatorname{Re}(z) < 0$ geht.

Da R beliebig ist, ist

$$|g(0) - g_T(0)| = 0,$$

was zu beweisen war. □

Lemma 10. $\int_1^\infty \frac{\vartheta(x)-x}{x^2} dx < \infty.$

Beweis. Es bleibt zu zeigen, dass

$$\int_0^\infty (\vartheta(e^t) e^{-t} - 1) dt$$

konvergiert. Für $\operatorname{Re}(s) > 1$ gilt

$$\frac{\Phi(s)}{s} = \sum_p \frac{\log p}{sp^s} = \int_1^\infty \frac{\vartheta(x)}{x^{s+1}} dx = \int_0^\infty e^{-st} \vartheta(e^t) dt.$$

Dann ist für $\operatorname{Re}(z) > 0$

$$\frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z} = \int_0^\infty (\vartheta(e^t)e^{-t} - 1)e^{-zt} dt.$$

Das heißt, wir können wegen Lemmata 8 und 9 den Satz 29 mit

$$f(t) = \vartheta(e^t)e^{-t} - 1$$

und

$$g(z) = \frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z}$$

anwenden. □

Satz 30. Es gilt $\vartheta(x) \sim x$.

Beweis. Sei $F(T) := \int_1^T \frac{\vartheta(x)-x}{x^2} dx$. Wir nehmen an, dass für ein festes $\lambda > 1$ beliebig große x mit $\vartheta(x) \geq \lambda x$ existieren. Weil ϑ nimmt nicht ab, für diese x haben wir

$$F(\lambda x) - F(x) = \int_x^{\lambda x} \frac{\vartheta(t) - t}{t^2} dt \geq \int_x^{\lambda x} \frac{\lambda x - t}{t^2} dt = \int_1^\lambda \frac{\lambda - t}{t^2} dt = \lambda - \log(\lambda) - 1 > 0.$$

Lemma 10 impliziert, dass $\lim_{T \rightarrow \infty} F(T)$ existiert. Das ist ein Widerspruch. Auch der Fall $\vartheta(x) < \lambda x$ führt zu einem Widerspruch. □

Satz 31 (Primzahlsatz).

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}.$$

Beweis. Es gilt

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p \leq \sum_{p \leq x} \log x = \pi(x) \log x,$$

$$\vartheta(x) \geq \sum_{x^{1-\epsilon} \leq p \leq x} \log p \geq \sum_{x^{1-\epsilon} \leq p \leq x} (1-\epsilon) \log x = (1-\epsilon) \log x [\pi(x) + O(x^{1-\epsilon})].$$

□

5 Primzahlsatz für arithmetische Folgen

5.1 Dirichlet-Charaktere

Bevor wir fortfahren, erinnern wir uns an die Definitionen und Eigenschaften der Dirichlet-Charaktere.

Definition 12. Sei $q \geq 1$. Ein *Dirichlet-Charakter modulo q* ist eine Abbildung $\chi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (a) Für alle $n \in \mathbb{Z}$ ist $\chi(n) = 0$ genau dann, wenn $(n, q) \neq 1$,
- (b) χ ist vollständig multiplikativ, d.h. für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ gilt $\chi(nm) = \chi(n)\chi(m)$,

(c) χ ist q -periodisch, d.h. für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt $\chi(n + q) = \chi(n)$.

Definition 13. Die Abbildung χ_0 heißt *Hauptcharakter modulo q* , falls

$$\chi_0(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } (n, q) = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt.

Es gibt eine alternative Definition:

Definition 14. Sei

$$(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^* = \{k \pmod{q}, \gcd(k, q) = 1\}.$$

Dann wird ein Homomorphismus von A in die multiplikative Gruppe \mathbb{C}^* mit dem *Dirichlet-Charakter modulo q* bezeichnet. Ein trivialer Homomorphismus ist der Hauptcharakter.

Die wichtigsten Eigenschaften, die wir heute verwenden werden, sind:

- $\chi(1) = 1$, weil $\chi(1) \neq 0$ und $\chi(1) = \chi(1)^2$.
- Der Satz von Euler impliziert: für $\gcd(a, q) = 1$ gilt $a^{\varphi(q)} = 1$. Dann ist

$$\chi(a)^{\varphi(q)} = \chi(a^{\varphi(q)}) = 1$$

und $|\chi(a)| = 1$. Dann sind von Null verschiedene Werte von Dirichlet-Zeichen Einheitswurzeln.

- Sei $ab = 1 \pmod{q}$. Dann ist $1 = \chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$, das heißt $\chi(a) = (\chi(b))^{-1} = \overline{\chi(b)}$.

•

$$\sum_{n=1}^q \chi(n) = \begin{cases} \varphi(q), & \chi = \chi_0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

•

$$\sum_{\chi} \chi(a) = \begin{cases} \varphi(q), & a \equiv 1 \pmod{q}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

5.2 Primzahlsatz für arithmetische Folgen

Unser Ziel in diesem Kapitel ist herauszufinden, wie Primzahlen in arithmetischen Folgen verteilt sind. Wir folgen einer leicht modifizierten Version unseres vorherigen Vortrags. Wie zuvor bezeichnet der Buchstabe p jedes Mal eine Primzahl.

Seien

- χ ein Dirichlet-Charakter modulo q ,
- χ_0 ein Hauptcharakter,
- $L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$,
- $\theta_q(x) = \phi(q) \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv a(q)}} \log p$,

- $\phi(s, \chi) = \sum_p \frac{\chi(p) \log p}{p^s}$,
- $\Phi_q(s) = \sum_\chi \phi(s, \chi)$,
- $\Phi_{q,a}(s) = \sum_\chi \overline{\chi(a)} \phi(s, \chi)$.

Lemma 11. Für $\sigma > 1$ gilt

$$L(s, \chi) = \prod_p (1 - \chi(p)p^{-s})^{-1}.$$

Insbesondere gilt

$$L(s, \chi_0) = \zeta(s) \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p|q}} (1 - p^{-s}).$$

Beweis. Dirichlet-Charaktere sind vollständig multiplikativ, und somit lässt die L-Funktion $L(s, \chi)$ ein Euler-Produkt zu. Dies impliziert die erste Aussage.

Um die zweite Aussage zu beweisen, notieren wir:

$$\begin{aligned} L(s, \chi_0) &= \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ (p,q)=1}} (1 - p^{-s})^{-1} = \prod_{p \text{ prim}} (1 - p^{-s}) \cdot \left(\prod_{\substack{p \text{ prim} \\ (p,q) \neq 1}} (1 - p^{-s}) \right) \\ &= \zeta(s) \left(\prod_{\substack{p \text{ prim} \\ (p,q) \neq 1}} (1 - p^{-s}) \right) = \zeta(s) \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p|q}} (1 - p^{-s}). \end{aligned}$$

Die dritte Gleichung folgt aus dem Euler-Produkt der Riemannschen Zetafunktion. Die vierte Ungleichung folgt aus der Gleichheit der Mengen

$$\{p \text{ prim}, p | q\} \text{ und } \{p \text{ prim}, (p, q) \neq 1\}.$$

□

Lemma 12. Sei χ ein Dirichlet-Charakter, der kein Hauptcharakter ist. Die Funktionen $L(s, \chi_0) - \frac{\varphi(q)}{q} \frac{1}{s-1}$ und $L(s, \chi)$ lassen eine holomorphe Fortsetzung zu $\text{Re}(s) > 0$ zu.

Beweis. Für den Hauptcharakter gibt das vorherige Lemma eine meromorphe Fortsetzung zu $\text{Re}(s) > 0$ mit einem einfachen Pol bei $s = 1$ und dem Residuum

$$\prod_{p|q} (1 - p^{-1}) \stackrel{\text{Satz 5}}{=} \frac{\varphi(q)}{q}.$$

Die zweite Aussage ist eine Hausaufgabe.

□

Lemma 13. $\theta_q(x) = O(x)$.

Beweis.

$$\theta_q(x) \leq \varphi(q) \sum_{p \leq x} \log p = \varphi(q) \theta(x) = O(x).$$

□

Lemma 14. Sei χ ein Dirichlet-Charakter. Dann ist $L(s, \chi) \neq 0$ für $\sigma \geq 1$.

Beweis. In der nächsten Übungseinheit werden Sie zeigen, dass $L(1, \chi) \neq 0$ für jeden nicht-Hauptcharakter χ ist. Wir werden diese Tatsache im Folgenden als bekannt betrachten.

Nun betrachten wir die Funktion

$$\mathcal{L}(s) = \prod_{\chi} L(s, \chi).$$

Die Funktion $L(s, \chi_0)$ (und daher auch $\mathcal{L}(s)$) hat einen einfachen Pol bei $s = 1$. Angenommen,

- $\mathcal{L}(s)$ hat eine Nullstelle der Ordnung $\mu \geq 0$ bei $s = 1 \pm i\alpha$ für $\alpha \neq 0$,
- $\mathcal{L}(s)$ hat eine Nullstelle der Ordnung $\nu \geq 0$ bei $s = 1 \pm 2i\alpha$ für $\alpha \neq 0$.

Für $\sigma > 1$ gilt

$$\begin{aligned} -\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} &= -\sum_p \frac{d}{ds} \left(\log (1 - \chi(p)p^{-s})^{-1} \right) = \sum_p \frac{\chi(p)p^{-s} \log p}{1 - \chi(p)p^{-s}} \\ &= \sum_p \frac{\chi(p) \log p}{p^s - \chi(p)} = \sum_p \frac{\chi(p) \log p}{p^s} + \sum_p \frac{\chi^2(p) \log p}{p^s(p^s - \chi(p))} \\ &= \phi(s, \chi) + \sum_p \frac{\chi^2(p) \log p}{p^s(p^s - \chi(p))}. \end{aligned}$$

Der zweite Summand ist holomorph für $\sigma > 1/2$. Wir summieren über alle möglichen Dirichlet-Charaktere:

$$-\frac{\mathcal{L}'(s)}{\mathcal{L}(s)} = -\sum_{\chi} \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = \Phi_q(s) + \text{eine holomorphe Funktion für } \operatorname{Re}(s) > 1/2.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{s=1}(\Phi_q(s)) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \Phi_q(1 + \varepsilon) = 1, \\ \operatorname{res}_{s=1 \pm i\alpha}(\Phi_q(s)) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \Phi_q(1 + \varepsilon \pm i\alpha) = -\mu, \\ \operatorname{res}_{s=1 \pm 2i\alpha}(\Phi_q(s)) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \Phi_q(1 + \varepsilon \pm 2i\alpha) = -\nu. \end{aligned}$$

Wie früher,

$$\begin{aligned} \sum_{r=-2}^2 \binom{2+r}{4} \Phi_q(1 + \varepsilon + ri\alpha) &= \sum_p \frac{\log p}{p^{1+\varepsilon}} (p^{i\alpha/2} + p^{-i\alpha/2})^4 \sum_{\chi} \chi(p) \\ &= \sum_{p \equiv 1 \pmod{q}} \frac{\varphi(q) \log p}{p^{1+\varepsilon}} (p^{i\alpha/2} + p^{-i\alpha/2})^4 \geq 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Die obige Gleichheit folgt aus¹³

$$\sum_{\chi} \chi(a) = \begin{cases} \varphi(q), & a \equiv 1 \pmod{q}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

¹³das was eine Hausaufgabe!

Dann gilt

$$0 \stackrel{(5.1)}{\leq} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{r=-2}^2 \binom{4}{2+r} \Phi_q(1 + \varepsilon + ri\alpha) = 6 - 8\mu - 2\nu \implies \mu = 0.$$

□

Lemma 15. $\Phi_{q,a}(s) - \frac{1}{s-1}$ ist holomorph für $\sigma \geq 1$.

Beweis. Die Definition impliziert

$$\Phi_{q,a}(s) = \sum_{\chi} \overline{\chi(a)} \phi(s, \chi) = \sum_{\chi \neq \chi_0} \overline{\chi(a)} \phi(s, \chi) + \phi(s, \chi_0).$$

Beachten Sie, dass jedes $\phi(s, \chi)$ holomorph für $\sigma \geq 1$ ist, da $L(s, \chi)$ holomorph ist und keine Nullstellen in $\sigma \geq 1$ hat. Die Funktion $\phi(s, \chi_0) - \frac{1}{s-1}$ ist auch holomorph für $\sigma \geq 1$, da $L(s, \chi_0)$ einen einfachen Pol bei $s = 1$ und keine Nullstellen in $\sigma \geq 1$ hat. □

Lemma 16. $\int_1^\infty \frac{\theta_q(x)-x}{x^2} dx < \infty$.

Beweis. Sei b so dass $ba \equiv 1 \pmod{q}$ ist. Dann ist $\overline{\chi(a)} = \chi(b)$, und die Definition impliziert, dass

$$\begin{aligned} \Phi_{q,a}(s) &= \sum_{\chi} \overline{\chi(a)} \sum_p \frac{\chi(p) \log p}{p^s} = \sum_p \left(\sum_{\chi} \chi(b) \chi(p) \right) \frac{\log p}{p^s} \\ &= \sum_p \left(\sum_{\chi} \chi(bp) \right) \frac{\log p}{p^s} = \sum_{bp \equiv 1 \pmod{q}} \frac{\varphi(q) \log p}{p^s} = \sum_{p \equiv a \pmod{q}} \frac{\varphi(q) \log p}{p^s}. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\Phi_{q,a}(s) = \int_1^\infty \frac{d\theta_q(x)}{x^s} = \frac{\theta_q(x)}{x^s} \Big|_1^\infty + s \int_1^\infty \frac{\theta_q(x)}{x^{s+1}} dx = s \int_0^\infty e^{-st} \theta_q(e^t) dt.$$

Sei jetzt

$$f(t) = \theta_q(e^t) e^{-t} - 1.$$

Die Funktion f ist beschränkt, da $\theta_q(x) = O(x)$ gilt, und lokal integrierbar, da sie eine diskrete Menge von Diskontinuitätspunkten aufweist. Wir erhalten

$$\begin{aligned} g(z) &= \int_0^\infty f(t) e^{-zt} dt = \int_0^\infty \theta_q(e^t) e^{-(z+1)t} dt - \int_0^\infty e^{-zt} dt \\ &= \frac{\Phi_{q,a}(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z}, \end{aligned}$$

Die Funktion g ist holomorph auf $\sigma \geq 0$. Es bleibt noch den analytische Satz anzuwenden. □

Lemma 17. $\theta_q(x) \sim x, x \rightarrow \infty$. □

Satz 32. Sei $a, q \in \mathbb{N}$ mit $(a, q) = 1$. Sei $\pi(x, q)$ die Anzahl aller Primzahlen p , die nicht größer als x sind und zu $a \pmod q$ kongruent sind:

$$\pi(x, a, q) = \#\{p \text{ prim, } p \equiv a \pmod q \text{ und } p \leq x\}.$$

Dann ist

$$\pi(x, a, q) \sim \frac{1}{\phi(q)} \frac{x}{\log x}.$$

Beweis.

$$\theta_q(x) = \phi(q) \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv a(q)}} \log p \leq \phi(q) \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv a(q)}} \log x = \phi(q) \pi(x, a, q) \log x.$$

Wir nehmen ein festes $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$\theta_q(x) \geq \phi(q) \sum_{\substack{x^{1-\varepsilon} \leq p \leq x \\ p \equiv a(q)}} \log p \geq \phi(q) \sum_{\substack{x^{1-\varepsilon} \leq p \leq x \\ p \equiv a(q)}} (1-\varepsilon) \log x = \phi(q)(1-\varepsilon) \log x (\pi(x, a, q) + O(x^{1-\varepsilon})),$$

weil $\pi(x, a, q) = O(x)$ ist.

□

6 Modulformen

6.1 Doppelte periodische Funktionen

Definition 15. Eine Funktion f einer komplexen Variablen heißt *periodisch* mit der Periode $\omega \in \mathbb{C}$ falls $f(z + \omega) = f(z)$. Dies gilt immer dann, wenn z und $z + \omega$ im Bereich¹⁴ von f liegen.

Definition 16. Eine Funktion f heißt *doppelt periodisch*, wenn sie zwei Perioden ω_1 und ω_2 hat, sodass $\omega_2/\omega_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Definition 17. Wir nehmen an, dass die Funktion f Perioden ω_1, ω_2 hat, mit $\omega_2/\omega_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Das Paar (ω_1, ω_2) heißt *Fundamentalpaar*, wenn jede Periode von f die Form $m\omega_1 + n\omega_2$ hat, wobei m und n ganze Zahlen sind.

Bemerkung 4. Nicht jede doppelperiodische Funktion lässt ein fundamentales Periodenpaar zu. Sei

$$f(z) = \begin{cases} 1, & \operatorname{Re}(z) \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Funktion ist doppelperiodisch mit den Perioden i und 1 . Aber andererseits ist jede Zahl $1/n, n \in \mathbb{N}$ auch eine Periode dieser Funktion.

Jedes fundamentale Periodenpaar ω_1, ω_2 bestimmt ein Netzwerk von Parallelogrammen, die eine Tessellation der Ebene bilden. Diese werden *Periodenparallelogramme* genannt. Die Eckpunkte sind die *Perioden* $\omega = m\omega_1 + n\omega_2$. Es ist üblich, zwei sich schneidende Kanten und ihren Schnittpunkt als einzige Randpunkte zu betrachten, die zum Periodenparallelogramm gehören.

Lemma 18. Wenn (ω_1, ω_2) ein fundamentales Periodenpaar ist, dann enthält das Dreieck mit den Eckpunkten $0, \omega_1, \omega_2$ keine weiteren Perioden in seinem Inneren oder an seiner Grenze. Umgekehrt ist jedes Periodenpaar mit dieser Eigenschaft ein fundamentales Periodenpaar. \square

6.2 Elliptische Funktionen

Definition 18. Eine Funktion f heißt *elliptisch*, wenn sie doppel periodisch und meromorph ist.

Satz 33. Eine nichtkonstante elliptische Funktion hat ein fundamentales Periodenpaar.

Beweis. Unter allen Perioden ungleich Null von f gibt es mindestens eine, deren Abstand vom Ursprung minimal ist. Andernfalls hätte f beliebig kleine Perioden ungleich Null und wäre daher konstant¹⁵. Sei ω eine der Perioden ungleich Null, die dem Ursprung am nächsten liegen. Wählen wir unter allen Perioden mit dem Modulus $|\omega|$ die Periode ω_1 mit dem kleinsten nichtnegativen Argument. Auch hier muss eine solche Periode existieren, sonst würde es beliebig kleine Perioden ungleich Null geben. Wenn noch andere Perioden (außer ω_1 und

¹⁴Als Definitionsbereich werden wir in Zukunft meist \mathbb{C} ohne isolierte Punkte verwenden, da wir uns überwiegend mit meromorphen Funktionen befassen werden.

¹⁵Eine Frage, die man sich stellen sollte: Warum ist die Eigenschaft, analytisch zu sein, hier entscheidend?

$-\omega_1$) mit dem Modul $|\omega_1|$ existieren, wählen wir das mit dem kleinsten Argument größer als $\arg(\omega_1)$. Wir werden diesen Period ω_2 nennen. Wenn keine andere Perioden (außer ω_1 und $-\omega_1$) mit dem Modul $|\omega_1|$ existieren, suchen wir den nächstgrößeren Kreis mit Perioden $\neq n\omega_1$ und wählen das Period mit dem kleinsten nichtnegative Argument. Eine solche Periode existiert, da f zwei nichtkollineare Perioden hat. Wenn wir dieses ω_2 nennen, haben wir konstruktionsbedingt keine Perioden im Dreieck $0, \omega_1, \omega_2$ außer den Eckpunkten, daher das Paar (ω_1, ω_2) ist fundamental. \square

Bemerkung 5. Wenn f und g elliptische Funktionen mit den Perioden ω_1 und ω_2 sind, dann sind ihre Summe, Differenz, ihr Produkt und ihr Quotient ebenfalls elliptisch mit den gleichen Perioden. Das gilt auch für die Ableitung f' .

Aufgrund der Periodizität reicht es aus, das Verhalten einer elliptischen Funktion in einem beliebigen Periodenparallelogramm zu untersuchen.

Satz 34. Wenn eine elliptische Funktion f in einem Periodenparallelogramm keine Pole hat, dann ist f konstant.

Beweis. Wenn f in einem Periodenparallelogramm keine Pole hat, dann ist f stetig und daher auf den Abschluss des Parallelogramms beschränkt. Durch die Periodizität ist f in der gesamten Ebene begrenzt. Daher ist f nach dem Satz von Liouville konstant. \square

Satz 35. Wenn eine elliptische Funktion f in einem Periodenparallelogramm keine Nullstellen hat, dann ist f konstant.

Beweis. Wenden Sie die gleichen Überlegungen wie zuvor auf die Funktion $1/f$ an. \square

Bemerkung 6. Manchmal ist es unpraktisch, Nullstellen oder Pole auf der Grenze eines Periodenparallelogramms zu haben. Da eine meromorphe Funktion in jedem begrenzten Teil der Ebene nur eine endliche Anzahl von Nullstellen oder Polen hat, kann ein Periodenparallelogramm immer in ein kongruentes Parallelogramm ohne Nullstellen oder Pole auf seiner Grenze übersetzt werden. Ein solches verschobenes Parallelogramm ohne Nullstellen oder Pole an seinem Rand wird als *Zelle* bezeichnet. Seine Eckpunkte müssen keine Periode sein.

Satz 36. Das Konturintegral einer elliptischen Funktion entlang der Grenze einer beliebigen Zelle ist Null.

Beweis. Die Integrale entlang paralleler Kanten heben sich aufgrund der Periodizität auf. \square

Satz 37. Die Summe den Residuums einer elliptischen Funktion an ihren Polen in jedem Periodenparallelogramm ist Null.

Beweis. Wenden Sie den Residuensatz von Cauchy auf eine Zelle an. \square

Bemerkung 7. Satz 37 zeigt, dass eine elliptische Funktion, die nicht konstant ist, in jedem Periodenparallelogramm mindestens zwei einfache Pole oder mindestens einen Doppelpol hat.

Satz 38. Die Anzahl der Nullstellen einer elliptischen Funktion in jedem Periodenparallelogramm ist gleich der Anzahl der Pole, jeweils gezählt mit ihrer Multiplizität.

Beweis. Das Integral,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial C} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

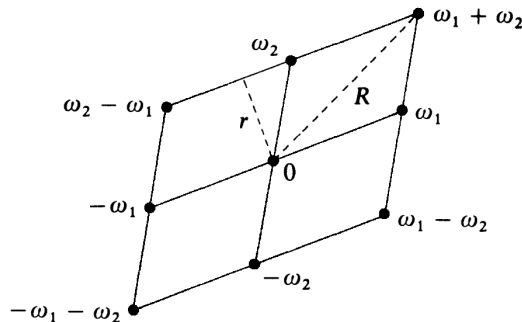
um die Grenze ∂C einer Zelle herum gemessen, zählt (mit ihren jeweiligen Multiplizitäten) die Differenz zwischen der Anzahl der Nullen und der Anzahl der Pole innerhalb der Zelle. Die Funktion f'/f ist elliptisch mit den gleichen Perioden wie f , und Satz 36 impliziert, dass dieses Integral Null ist. \square

Bemerkung 8. Die Anzahl der Nullstellen (oder Pole) einer elliptischen Funktion in einem beliebigen Periodenparallelogramm wird als *Ordnung der Funktion* bezeichnet. Jede nichtkonstante elliptische Funktion hat die Ordnung ≥ 2 .

6.3 Konstruktion elliptischer Funktionen

Satz 39. Wenn α reell ist, konvergiert die unendliche Reihe $\sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ \omega \neq 0}} \frac{1}{\omega^\alpha}$ genau dann absolut, wenn $\alpha > 2$. Die Summe $\sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ \omega \neq 0}} \frac{1}{\omega^\alpha}$ ist eine Summe über alle Perioden $\omega = m\omega_1 + n\omega_2$ mit $\omega \neq 0$.

Beweis. Sehen Sie sich Abbildung an und lassen Sie r und R den minimalen bzw. maximalen Abstand von 0 zum gezeigten Parallelogramm bezeichnen.



Wenn ω eine der 8 in diesem Diagramm gezeigten Perioden ungleich Null ist, haben wir

$$r \leq |\omega| \leq R \quad \text{für 8 Perioden } \omega.$$

In der nächsten konzentrischen Schicht von Perioden, die diese 8 umgibt, haben wir $2 \cdot 8 = 16$ neue Perioden, die die Ungleichungen erfüllen

$$2r \leq |\omega| \leq 2R \quad \text{für 16 neue Perioden } \omega.$$

In der nächsten Ebene haben wir $3 \cdot 8 = 24$ neue erfüllende Perioden

$$3r \leq |\omega| \leq 3R \quad \text{für 24 neue Perioden, } \omega$$

usw. Deshalb haben wir die Ungleichungen

$$\frac{1}{R^\alpha} \leq \frac{1}{|\omega|^\alpha} \leq \frac{1}{r^\alpha} \quad \text{für die ersten 8 Perioden } \omega,$$

$$\frac{1}{(2R)^\alpha} \leq \frac{1}{|\omega|^\alpha} \leq \frac{1}{(2r)^\alpha} \quad \text{für die nächsten 16 Perioden } \omega,$$

usw. Somit erfüllt die Summe $S(n) = \sum |\omega|^{-\alpha}$, genommen über die $8(1 + 2 + \dots + n)$ Nicht-Null-Perioden, die dem Ursprung am nächsten liegen, die Ungleichungen

$$\frac{8}{R^\alpha} + \frac{2 \cdot 8}{(2R)^\alpha} + \dots + \frac{n \cdot 8}{(nR)^\alpha} \leq S(n) \leq \frac{8}{r^\alpha} + \frac{2 \cdot 8}{(2r)^\alpha} + \dots + \frac{n \cdot 8}{(nr)^\alpha}$$

oder

$$\frac{8}{R^\alpha} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{\alpha-1}} \leq S(n) \leq \frac{8}{r^\alpha} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{\alpha-1}}$$

Dies zeigt, dass die Partialsummen $S(n)$ nach oben durch $8\zeta(\alpha-1)/r^\alpha$ begrenzt sind, wenn $\alpha > 2$. Aber jede Teilsumme liegt zwischen zwei solchen Teilsummen, sodass alle Teilsummen der Reihe $\sum |\omega|^{-\alpha}$ nach oben beschränkt sind und daher die Reihe konvergiert, wenn $\alpha > 2$. Die untere Grenze für $S(n)$ zeigt auch, dass die Reihe divergiert, wenn $\alpha \leq 2$. \square

Lemma 19. Wenn $\alpha > 2$ und $R > 0$, konvergiert die Reihe

$$\sum_{|\omega| > R} \frac{1}{(z - \omega)^\alpha}$$

absolut und gleichmäßig in der Scheibe $|z| \leq R$.

Beweis. Wir werden zeigen, dass es eine Konstante M gibt (abhängig von R und α), so dass, wenn $\alpha \geq 1$ ist, gilt

$$\frac{1}{|z - \omega|^\alpha} \leq \frac{M}{|\omega|^\alpha}$$

für alle ω mit $|\omega| > R$ und alle z mit $|z| \leq R$. Obere Ungleichung ist äquivalent zu

$$\left| \frac{z - \omega}{\omega} \right|^\alpha \geq \frac{1}{M}$$

Um M darzustellen, betrachten wir alle ω in Ω mit $|\omega| > R$. Wählen Sie dazu ein ω , dessen Modul minimal ist, sagen wir $|\omega| = R + d$, wobei $d > 0$ ist. Dann, wenn $|z| \leq R$ und $|\omega| \geq R + d$ sind, haben wir

$$\left| \frac{z - \omega}{\omega} \right| = \left| 1 - \frac{z}{\omega} \right| \geq 1 - \left| \frac{z}{\omega} \right| \geq 1 - \frac{R}{R + d}$$

und daher ist

$$\left| \frac{z - \omega}{\omega} \right|^\alpha \geq \left(1 - \frac{R}{R + d} \right)^\alpha = \frac{1}{M},$$

wobei $M = \left(1 - \frac{R}{R+d} \right)^{-\alpha}$ ist. \square

Wie bereits erwähnt, könnten wir versuchen, die einfachste elliptische Funktion zu konstruieren, indem wir eine Reihe dieser Form verwenden

$$\sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{(z - \omega)^2}.$$

In der Nähe jeder Periode befindet sich der entsprechende Hauptteil. Da die Reihe jedoch nicht absolut konvergiert, verwenden wir stattdessen eine Reihe, bei der der Exponent zwei durch drei ersetzt wird. Dadurch erhalten wir eine elliptische Funktion der dritten Ordnung.

Satz 40. Sei f durch die Reihe definiert

$$f(z) = \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{(z - \omega)^3}.$$

Dann ist dies eine elliptische Funktion mit den Perioden ω_1, ω_2 und mit einem Pol der Ordnung drei an jeder Periode ω in Ω .

Beweis. Die durch Summieren über $|\omega| > R$ erhaltene Reihe konvergiert gleichmäßig in der Scheibe $|z| \leq R$. Daher stellt es in dieser Scheibe eine analytische Funktion dar. Die übrigen Terme, deren Anzahl endlich ist, sind in dieser Scheibe ebenfalls analytisch, mit Ausnahme eines Pols dritten Ordnung in jeder Periode ω in der Scheibe. Dies beweist, dass f meromorph ist und an jedem ω in Ω einen Pol der Ordnung drei hat.

Als nächstes zeigen wir, dass f die Perioden ω_1 und ω_2 hat. Dazu machen wir uns die absolute Konvergenz der Reihe zunutze. Wir haben

$$f(z + \omega_1) = \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{(z + \omega_1 - \omega)^3} = \sum_{\omega' = \omega - \omega_1 \in \Omega} \frac{1}{(z + \omega')^3}.$$

Durch absolute Konvergenz gilt $f(z + \omega_1) = f(z)$. Ebenso ist $f(z + \omega_2) = f(z)$, also ist f doppelt periodisch. Damit ist der Beweis abgeschlossen. \square

6.4 Die Weierstrass \wp -Funktion

Definition 19. Die *Weierstrass-Funktion* \wp wird durch die Reihe definiert

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \neq 0} \left\{ \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right\}.$$

Satz 41. Die so definierte Funktion \wp hat die Perioden ω_1 und ω_2 . Es ist analytisch, mit Ausnahme eines Doppelpols in jeder Periode ω in Ω . Darüber hinaus ist $\wp(z)$ eine gerade Funktion von z .

Beweis. Jeder Term in der Reihe hat einen Modul

$$\left| \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| = \left| \frac{\omega^2 - (z - \omega)^2}{\omega^2(z - \omega)^2} \right| = \left| \frac{z(2\omega - z)}{\omega^2(z - \omega)^2} \right|.$$

Betrachten Sie nun eine beliebige $|z| \leq R$. Auf dieser Scheibe gibt es nur endlich viele Perioden ω . Wenn wir die Terme der Reihe ausschließen, die diese Perioden enthält, erhalten wir

$$\left| \frac{1}{(z - \omega)^2} \right| \leq \frac{M}{|\omega|^2}$$

wobei M eine Konstante ist, die nur von R abhängt. Es gilt

$$\left| \frac{z(2\omega - z)}{\omega^2(z - \omega)^2} \right| \leq \frac{MR(2|\omega| + R)}{|\omega|^4} \leq \frac{MR(2 + R/|\omega|)}{|\omega|^3} \leq \frac{3MR}{|\omega|^3}.$$

Dies zeigt, dass die abgeschnittene Reihe in der Kreisscheibe $|z| \leq R$ absolut und gleichmäßig konvergiert und ist daher in dieser Scheibe analytisch. Die übrigen Terme ergeben an jedem ω

innerhalb dieser Scheibe einen Pol zweiter Ordnung. Daher ist $\wp(z)$ meromorph mit einem Pol der Ordnung 2 in jeder Periode.

Als nächstes beweisen wir, dass \wp eine gerade Funktion ist. Wir notieren

$$(-z - \omega)^2 = (z + \omega)^2 = (z - (-\omega))^2.$$

Da $-\omega$ alle Perioden ungleich Null mit ω durchläuft, zeigt dies, dass $\wp(-z) = \wp(z)$, also \wp gerade ist.

Schließlich stellen wir die Periodizität fest. Die Ableitung von \wp ist durch

$$\wp'(z) = -2 \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{(z - \omega)^3}$$

gegeben. Wir haben bereits gezeigt, dass diese Funktion die Perioden ω_1 und ω_2 hat. Somit ist $\wp'(z + \omega) = \wp'(z)$ für jede Periode ω . Daher ist die Funktion $\wp(z + \omega) - \wp(z)$ konstant. Aber wenn $z = -\omega/2$ ist, ist diese Konstante $\wp(\omega/2) - \wp(-\omega/2) = 0$, da \wp gerade ist. Daher ist $\wp(z + \omega) = \wp(z)$ für jedes ω , also hat \wp die erforderlichen Perioden. \square

6.5 Weitere Eigenschaften von \wp .

Satz 42. Sei $r = \min\{|\omega| : \omega \neq 0\}$. Dann gilt für $0 < |z| < r$

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)G_{2n+2}z^{2n}$$

wobei

$$G_n = \sum_{\omega \neq 0} \frac{1}{\omega^n} \quad \text{für } n \geq 3$$

ist.

Beweis. Wenn $0 < |z| < r$, dann ist $|z/\omega| < 1$ und wir haben

$$\frac{1}{(z - \omega)^2} = \frac{1}{\omega^2 \left(1 - \frac{z}{\omega}\right)^2} = \frac{1}{\omega^2} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \left(\frac{z}{\omega}\right)^n\right),$$

dann ist

$$\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\omega^{n+2}} z^n.$$

Durch Summieren aller ω finden wir

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \sum_{\omega \neq 0} \frac{1}{\omega^{n+2}} z^n = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)G_{n+2}z^n.$$

Da $\wp(z)$ eine gerade Funktion ist, müssen die Koeffizienten G_{2n+1} verschwinden. \square

Satz 43. Die Funktion \wp erfüllt die nichtlineare Differentialgleichung

$$[\wp'(z)]^2 = 4\wp^3(z) - 60G_4\wp(z) - 140G_6.$$

Beweis. Wir erhalten dies, indem wir eine lineare Kombination der Potenzen von \wp und \wp' bilden, die den Pol bei $z = 0$ eliminiert. Dies ergibt eine elliptische Funktion, die keine Pole hat und daher konstant sein muss. Nahe $z = 0$ haben wir

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + 6G_4z + 20G_6z^3 + \dots,$$

eine elliptische Funktion der Ordnung 3. Ihr Quadrat hat daher die Ordnung 6

$$[\wp'(z)]^2 = \frac{4}{z^6} - \frac{24G_4}{z^2} - 80G_6 + \dots$$

wobei $+\dots$ eine Potenzreihe in z angibt, die bei $z = 0$ verschwindet. Es gilt

$$4\wp^3(z) = \frac{4}{z^6} + \frac{36G_4}{z^2} + 60G_6 + \dots$$

dann ist

$$[\wp'(z)]^2 - 4\wp^3(z) = -\frac{60G_4}{z^2} - 140G_6 + \dots$$

Wir erhalten

$$[\wp'(z)]^2 - 4\wp^3(z) + 60G_4\wp(z) = -140G_6 + \dots$$

Da das linke Element bei $z = 0$ keinen Pol hat, hat es nirgendwo in einem Periodenparallelogramm Pole, also muss es konstant sein. Daher muss diese Konstante $-140G_6$ sein und dies beweist den Satz. \square

6.6 Die Eisenstein-Reihe und die Invarianten g_2 und g_3

Definition 20. Für $n \geq 3$, heißt die Reihe

$$G_n = \sum_{\omega \neq 0} \frac{1}{\omega^n}$$

Eisensteinreihe der Ordnung n . Wir nehmen,

$$g_2 = 60G_4, \quad g_3 = 140G_6.$$

Die Differentialgleichung für \wp nimmt nun die Form

$$[\wp'(z)]^2 = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3 \tag{6.1}$$

an.

Da nur g_2 und g_3 in die Differentialgleichung eingehen, sollten sie \wp vollständig bestimmen. Dies ist tatsächlich so, weil alle Koeffizienten $(2n+1)G_{2n+2}$ in der Laurent-Entwicklung von $\wp(z)$ durch g_2 und g_3 ausgedrückt werden können.

Satz 44. Jede Eisenstein-Reihe G_n lässt sich als Polynom in g_2 und g_3 mit positiven rationalen Koeffizienten ausdrücken. Tatsächlich haben wir für $b(n) = (2n + 1)G_{2n+2}$ die Rekursionsbeziehungen

$$b(1) = g_2/20, \quad b(2) = g_3/28,$$

mit

$$(2n + 3)(n - 2)b(n) = 3 \sum_{k=1}^{n-2} b(k)b(n - 1 - k) \quad \text{für } n \geq 3$$

oder gleichwertig,

$$(2m + 1)(m - 3)(2m - 1)G_{2m} = 3 \sum_{r=2}^{m-2} (2r - 1)(2m - 2r - 1)G_{2r}G_{2m-2r}$$

für $m \geq 4$.

Beweis. Die Differentiation der Differentialgleichung für \wp ergibt eine weitere Differentialgleichung zweiter Ordnung, die durch \wp erfüllt wird,

$$\wp''(z) = 6\wp^2(z) - \frac{1}{2}g_2.$$

Der Rest des Beweises erfolgt durch Einsetzen von $\wp(z) = z^{-2} + \sum_{n=1}^{\infty} b(n)z^{2n}$ in die obige Gleichung. \square

6.7 Die Zahlen e_1, e_2, e_3 .

Definition 21. Wir bezeichnen mit e_1, e_2, e_3 die Werte von \wp bei den Halbperioden,

$$e_1 = \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \quad e_2 = \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right), \quad e_3 = \wp\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right).$$

Der nächste Satz zeigt, dass diese Zahlen die Wurzeln des kubischen Polynoms $4\wp^3 - g_2\wp - g_3$ sind.

Satz 45. Es gilt

$$4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3 = 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3).$$

Darüber hinaus sind die Wurzeln e_1, e_2, e_3 verschieden. Dies impliziert $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$.

Beweis. Da \wp gerade ist, ist die Ableitung \wp' ungerade. Als nächstes wollen wir zeigen, dass die Halbperioden einer ungeraden elliptischen Funktion entweder Nullstellen oder Pole sind. Tatsächlich gilt aufgrund der Periodizität

$$\wp'\left(-\frac{1}{2}\omega\right) = \wp'\left(\omega - \frac{1}{2}\omega\right) = \wp'\left(\frac{1}{2}\omega\right),$$

und weil \wp' ungerade ist, haben wir auch

$$\wp' \left(-\frac{1}{2}\omega \right) = -\wp' \left(\frac{1}{2}\omega \right).$$

Daher ist $\wp' \left(\frac{1}{2}\omega \right) = 0$, wenn $\wp' \left(\frac{1}{2}\omega \right)$ endlich ist. Da $\wp'(z)$ keine Pole bei $\frac{1}{2}\omega_1, \frac{1}{2}\omega_2, \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ hat, müssen diese Punkte Nullstellen von \wp' sein. Da \wp' jedoch von der Ordnung 3 ist, müssen dies einfache Nullstellen von \wp' sein. Somit kann \wp' im Periodenparallelogramm mit den Eckpunkten $0, \omega_1, \omega_2, \omega_1 + \omega_2$ keine weiteren Nullstellen haben. Die Differentialgleichung (6.1) zeigt, dass jeder dieser Punkte auch eine Nullstelle der Kubik ist, also haben wir die angegebene Faktorisierung.

Als nächstes zeigen wir, dass die Zahlen e_1, e_2, e_3 verschieden sind. Die elliptische Funktion $\wp(z) - e_1$ verschwindet bei $z = \frac{1}{2}\omega_1$. Dies ist eine Doppelnulstelle, da $\wp' \left(\frac{1}{2}\omega_1 \right) = 0$ ist. Ebenso hat $\wp(z) - e_2$ eine Doppelnulstelle bei $\frac{1}{2}\omega_2$. Wenn e_1 gleich e_2 wäre, hätte die elliptische Funktion $\wp(z) - e_1$ eine Doppelnulstelle bei $\frac{1}{2}\omega_1$ und auch eine Doppelnulstelle bei $\frac{1}{2}\omega_2$, also wäre ihre Ordnung ≥ 4 . Aber ihre Ordnung ist 2, also ist $e_1 \neq e_2$. Ebenso ist $e_1 \neq e_3$ und $e_2 \neq e_3$.

Wenn ein Polynom unterschiedliche Wurzeln hat, verschwindet seine Diskriminante nicht¹⁶. Die Diskriminante des kubischen Polynoms

$$4x^3 - g_2x - g_3$$

ist $g_2^3 - 27g_3^2$. Wenn $x = \wp(z)$, sind die Wurzeln dieses Polynoms unterschiedlich, sodass die Zahl $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ ist. Damit ist der Beweis abgeschlossen. \square

6.8 Die Diskriminante Δ

Die Zahl $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ wird *Diskriminante* genannt. Wir betrachten die Invarianten g_2 und g_3 und die Diskriminante Δ als Funktionen der Perioden ω_1 und ω_2 und schreiben

$$g_2 = g_2(\omega_1, \omega_2), \quad g_3 = g_3(\omega_1, \omega_2), \quad \Delta = \Delta(\omega_1, \omega_2).$$

Die Funktionen g_2 und g_3 sind homogene Funktionen vom Grad -4 bzw. -6. Das heißt, wir haben

$$g_2(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2) = \lambda^{-4}g_2(\omega_1, \omega_2) \quad \text{und} \quad g_3(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2) = \lambda^{-6}g_3(\omega_1, \omega_2)$$

für jedes $\lambda \neq 0$. Daher ist Δ homogen vom Grad -12:

$$\Delta(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2) = \lambda^{-12}\Delta(\omega_1, \omega_2).$$

Wenn wir $\lambda = 1/\omega_1$ nehmen und $\tau = \omega_2/\omega_1$ schreiben, erhalten wir

$$g_2(1, \tau) = \omega_1^4 g_2(\omega_1, \omega_2), \quad g_3(1, \tau) = \omega_1^6 g_3(\omega_1, \omega_2), \\ \Delta(1, \tau) = \omega_1^{12} \Delta(\omega_1, \omega_2).$$

Wir werden ω_1 und ω_2 so wählen, dass ihr Verhältnis $\tau = \omega_2/\omega_1$ einen positiven Imaginärteil hat.

¹⁶Die Diskriminante von $4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ ist $16((x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2))^2$.

Definition 22. Die obere Halbebene

$$\{\tau \in \mathbb{H}, \quad \text{Im}(\tau) > 0\}$$

bezeichnen wir mit \mathbb{H} .

Wenn $\tau \in \mathbb{H}$, schreiben wir $g_2(\tau), g_3(\tau)$ und $\Delta(\tau)$ für $g_2(1, \tau), g_3(1, \tau)$ und $\Delta(1, \tau)$. Dann gilt

$$g_2(\tau) = 60 \sum_{\substack{m, n = -\infty \\ (m, n) \neq (0, 0)}}^{+\infty} \frac{1}{(m + n\tau)^4},$$

$$g_3(\tau) = 140 \sum_{\substack{m, n = -\infty \\ (m, n) \neq (0, 0)}}^{+\infty} \frac{1}{(m + n\tau)^6}$$

und

$$\Delta(\tau) = g_2^3(\tau) - 27g_3^2(\tau).$$

Satz 45 zeigt, dass $\Delta(\tau) \neq 0$ für alle τ in \mathbb{H} .

6.9 Kleins modulare Funktion $J(\tau)$

Kleins Funktion ist eine Kombination aus g_2 und g_3 , die so definiert ist, dass sie eine homoge Funktion vom Grad 0 mit den Perioden ω_1 und ω_2 ist.

Definition 23. Wenn ω_2/ω_1 nicht real ist, definieren wir

$$J(\omega_1, \omega_2) = \frac{g_2^3(\omega_1, \omega_2)}{\Delta(\omega_1, \omega_2)}.$$

Da g_2^3 und Δ gleichgradig homogen sind, gilt $J(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2) = J(\omega_1, \omega_2)$. Insbesondere wenn $\tau \in \mathbb{H}$, gilt

$$J(1, \tau) = J(\omega_1, \omega_2).$$

Wir schreiben $J(\tau)$ für $J(1, \tau)$.

Satz 46. Die Funktionen $g_2(\tau), g_3(\tau), \Delta(\tau)$ und $J(\tau)$ sind analytisch in \mathbb{H} .

Beweis. Da $\Delta(\tau) \neq 0$ in \mathbb{H} ist, reicht es zu beweisen, dass g_2 und g_3 analytisch in \mathbb{H} sind. Sowohl g_2 als auch g_3 sind durch Doppelreihen der Form

$$\sum_{\substack{m, n = -\infty \\ (m, n) \neq (0, 0)}}^{+\infty} \frac{1}{(m + n\tau)^\alpha}$$

mit $\alpha > 2$ gegeben. Sei $\tau = x + iy$, wobei $y > 0$ ist. Wir werden beweisen, dass diese Reihe bei $\alpha > 2$ absolut für jedes feste τ in H und gleichmäßig in jedem Streifen S der Form

$$S = \{x + iy : |x| \leq A, y \geq \delta > 0\}$$

konvergiert. Dazu beweisen wir, dass es eine Konstante $M > 0$ gibt, welches nur von A und δ abhängt, so dass

$$\frac{1}{|m + n\tau|^\alpha} \leq \frac{M}{|m + ni|^\alpha}$$

für alle τ in S und alle $(m, n) \neq (0, 0)$ ist. Es genügt zu beweisen, dass

$$|m + n\tau|^2 > K|m + ni|^2$$

für ein $K > 0$, welches nur von A und δ abhängt, gilt oder, dass

$$(m + nx)^2 + (ny)^2 > K(m^2 + n^2)$$

gilt. Wenn $n = 0$, gilt diese Ungleichung für jedes K ; wir können $0 < K < 1$ wählen. Wenn $n \neq 0$ sei $q = m/n$. Es ist dann äquivalent zu zeigen dass

$$\frac{(q + x)^2 + y^2}{1 + q^2} > K$$

für einige $K > 0$ gilt. Wir werden beweisen, dass dies für alle q gilt, mit

$$K = \frac{\delta^2}{1 + (A + \delta)^2}$$

wenn $|x| \leq A$ und $y \geq \delta$.

Wenn $|q| \leq A + \delta$ gilt die Ungleichung, weil $(q + x)^2 \geq 0$ und $y^2 \geq \delta^2$ ist. Wenn $|q| > A + \delta$, dann ist $|x/q| < |x|/(A + \delta) \leq A/(A + \delta) < 1$; d.h.,

$$\left|1 + \frac{x}{q}\right| \geq 1 - \left|\frac{x}{q}\right| > 1 - \frac{A}{A + \delta} = \frac{\delta}{A + \delta},$$

dann gilt

$$|q + x| \geq \frac{q\delta}{A + \delta}$$

und

$$\frac{(q + x)^2 + y^2}{1 + q^2} > \frac{\delta^2}{(A + \delta)^2} \frac{q^2}{1 + q^2}.$$

Nun ist $q^2/(1 + q^2)$ eine steigende Funktion von q^2 , also

$$\frac{q^2}{1 + q^2} \geq \frac{(A + \delta)^2}{1 + (A + \delta)^2}$$

wenn $q^2 > (A + \delta)^2$. Damit ist der Beweis beendet. □

6.10 Invarianz von J unter unimodularen Transformationen

Wenn ω_1, ω_2 Perioden mit nichtrealem Verhältnis sind, führen wir durch die Beziehungen

$$\omega'_2 = a\omega_2 + b\omega_1, \quad \omega'_1 = c\omega_2 + d\omega_1,$$

neue Perioden ω'_1, ω'_2 ein, wobei a, b, c, d ganze Zahlen mit

$$ad - bc = 1$$

sind. Dann erzeugt¹⁷ das Paar (ω'_1, ω'_2) die gleichen Menge von Perioden Ω wie (ω_1, ω_2) . Daher ist $g_2(\omega'_1, \omega'_2) = g_2(\omega_1, \omega_2)$ und $g_3(\omega'_1, \omega'_2) = g_3(\omega_1, \omega_2)$, da g_2 und g_3 nur von der Periodenmenge Ω abhängen. Folglich ist $\Delta(\omega'_1, \omega'_2) = \Delta(\omega_1, \omega_2)$ und $J(\omega'_1, \omega'_2) = J(\omega_1, \omega_2)$. Das Verhältnis der neuen Perioden beträgt

$$\tau' = \frac{\omega'_2}{\omega'_1} = \frac{a\omega_2 + b\omega_1}{c\omega_2 + d\omega_1} = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

wobei $\tau = \omega_2/\omega_1$ ist. Das zeigt eine einfache Rechnung

$$\operatorname{Im}(\tau') = \operatorname{Im}\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \frac{ad - bc}{|c\tau + d|^2} \operatorname{Im}(\tau) = \frac{\operatorname{Im}(\tau)}{|c\tau + d|^2}.$$

Daher ist $\tau' \in \mathbb{H}$ genau dann, wenn $\tau \in \mathbb{H}$. Die Gleichung

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

heißt *unimodulare Transformation*, wenn a, b, c, d ganze Zahlen mit $ad - bc = 1$ sind. Die Menge aller unimodularen Transformationen (modulo $\pm \operatorname{id}$) bildet (unter Zusammensetzung) eine Gruppe, die *modulare Gruppe* genannt wird. Die vorstehenden Bemerkungen zeigen, dass die Funktion $J(\tau)$ unter den Transformationen der modularen Gruppe invariant ist. Das heißt, wir haben:

Satz 47. Wenn $\tau \in \mathbb{H}$ und a, b, c, d ganze Zahlen mit $ad - bc = 1$ sind, dann ist

$$(a\tau + b)/(c\tau + d) \in \mathbb{H},$$

$$J\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = J(\tau),$$

und

$$G_{2k}\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^{2k} G_{2k}(\tau).$$

□

Eine bestimmte unimodulare Transformation ist $\tau \mapsto \tau + 1$, daher zeigt Satz 47, dass $J(\tau+1) = J(\tau)$. Mit anderen Worten, $J(\tau)$ ist eine periodische Funktion von τ mit Periode 1. Der nächste Satz zeigt, dass $J(\tau)$ eine Fourier-Entwicklung hat.

Satz 48. Wenn $\tau \in \mathbb{H}$, kann $J(\tau)$ durch eine absolut konvergente Fourier-Reihe dargestellt werden

$$J(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n)e^{2\pi in\tau}.$$

¹⁷Hausaufgabe!

Beweis. Wir führen den Variablenwechsel

$$x = e^{2\pi i\tau}$$

ein. Dann wird die obere Halbebene \mathbb{H} in die punktierte Einheitsscheibe D abgebildet

$$D = \{x : 0 < |x| < 1\}.$$

Jedes τ in \mathbb{H} wird auf einen eindeutigen Punkt x in D abgebildet, aber jedes x in D ist das Bild von unendlich vielen Punkten in \mathbb{H} . Wenn τ und τ' auf x abgebildet werden, dann ist $e^{2\pi i\tau} = e^{2\pi i\tau'}$ also τ und τ' unterscheiden sich um eine ganze Zahl.

Wenn $x \in D$, sei

$$f(x) = J(\tau)$$

wobei τ einer der Punkte in \mathbb{H} ist, die auf x abgebildet werden. Da J periodisch mit der Periode 1 ist, hat J an allen diesen Punkten den gleichen Wert, sodass $f(x)$ wohldefiniert ist. Jetzt ist f analytisch in D , weil

$$f'(x) = \frac{d}{dx}J(\tau) = \frac{d}{d\tau}J(\tau)\frac{d\tau}{dx} = J'(\tau)/\frac{dx}{d\tau} = \frac{J'(\tau)}{2\pi i e^{2\pi i\tau}}$$

also existiert $f'(x)$ an jedem Punkt in D . Da f in D analytisch ist, hat es eine Laurent-Entwicklung um 0,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n)x^n.$$

□

6.11 Die Fourier-Entwicklung der Eisenstein-Reihe

Definition 24. Die Bernoulli-Zahlen, B_n , $n \in \mathbb{Z}$, werden über die folgende Identität definiert¹⁸: für x klein genug gilt

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k x^k}{k!}.$$

Wenn wir die Taylor-Entwicklung um 0 von $\frac{x}{e^x - 1}$ herum nehmen, erhalten wir

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + \frac{x^6}{30240} - \frac{x^8}{1209600} + \frac{x^{10}}{47900160} + O(x^{11}),$$

und dann ist $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = \frac{1}{42}$, $B_8 = -\frac{1}{30}, \dots$

Lemma 20. Es gilt

$$B_1 = \zeta(0),$$

und für $n \geq 2$ gilt

$$B_n = -n\zeta(1 - n).$$

Für $n \geq 1$ gilt

$$B_{2n} = \frac{(-1)^{n+1} 2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \zeta(2n).$$

¹⁸Seien Sie vorsichtig mit dem Wert der Bernoulli-Zahl bei 1 – manchmal wird sie als gleich 1/2 statt $-1/2$ definiert. In diesem Kurs benötigen wir jedoch nur B_{2n} für $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Die dritte Identität folgt aus der ersten und der zweiten durch die Funktionsgleichung der Riemannsches Zetafunktion. Die erste Identität folgt aus $\zeta(0) = -1/2$ und

$$-n\zeta(1-n) = -n(n-1)!\operatorname{Res}_{z=0} \frac{z^{-n}}{1-e^z} = n!\operatorname{Res}_{z=0} \frac{z^{-n}}{e^z-1}, \quad n \geq 2.$$

□

Sei jetzt¹⁹ für $z \in \mathbb{H}$ und $k \in \mathbb{N}_{>2}$,

$$\mathbb{G}_k(z) = \frac{(k-1)! \zeta(k)}{(2\pi i)^k} \frac{1}{2} \sum_{\substack{m,n=-\infty \\ (m,n) \neq (0,0)}}^{+\infty} \frac{1}{(mz+n)^k}.$$

Lemma 21. Die Fourier-Entwicklung der Eisenstein-Reihe $\mathbb{G}_k(z)$ (k gerade, $k > 2$) ist

$$\mathbb{G}_k(z) = -\frac{B_k}{2k} + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n$$

wobei $q = e^{2\pi iz}$, B_k die k -te Bernoulli-Zahl und $\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}$ ist.

Manchmal verwenden Menschen eine andere Normalisierung:

$$E_k(z) := -\frac{2k}{B_k} \mathbb{G}_k(z).$$

Beweis. Wir beginnen mit der folgenden Identität²⁰

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{z+n} = \frac{\pi}{\tan \pi z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}, \quad (6.2)$$

wobei die Summe auf der linken Seite als $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N$ interpretiert werden soll. Auf der anderen Seite, ist

$$\frac{\pi}{\tan \pi z} = \pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} = \pi i \frac{e^{\pi iz} + e^{-\pi iz}}{e^{\pi iz} - e^{-\pi iz}} = -\pi i \frac{1+q}{1-q} = -2\pi i \left(\frac{1}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} q^r \right). \quad (6.3)$$

Wir finden die k -te Ableitung der beiden Formeln (6.2) und (6.3) und erhalten

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^k} = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left(\frac{\pi}{\tan \pi z} \right) = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{r=1}^{\infty} r^{k-1} q^r.$$

¹⁹Bis auf eine Konstante stimmen diese mit der Eisenstein-Reihe überein, die wir zuvor definiert haben. Die Normalisierung erfolgt so, dass die Fourier-Reihe "schöner" aussieht.

²⁰Diese Identität kann über die logarithmische Ableitung der Formel

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right).$$

erhalten werden. Die unendliche Darstellung der Sinusfunktion wiederum ist eine klassische Anwendung des Faktorisierungssatzes von Weierstrass. Wir werden dies hier jedoch nicht beweisen.

Jetzt haben wir

$$\begin{aligned} \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \mathbb{G}_k(z) &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \frac{1}{n^k} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{m, n \in \mathbb{Z} \\ m \neq 0}} \frac{1}{(mz+n)^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(mz+n)^k} \\ &= \zeta(k) + \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} r^{k-1} q^{mr} \\ &\stackrel{\text{Lemma 20}}{=} \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \left(-\frac{B_k}{2k} + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n \right). \end{aligned}$$

□

6.12 Die Fourier-Entwicklung von $\Delta(\tau)$

Satz 49. Es gilt für $z \in \mathbb{H}$,

$$\Delta(z) = (2\pi)^{12} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n,$$

wobei $\tau(n) \in \mathbb{Z}$ ist. Die Funktion $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ heißt die *Ramanujansche tau-Funktion*.

Beweis. Es ist bequem zu schreiben

$$A := \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n, \quad B := \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) q^n.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \Delta(z) &= g_2^3(z) - 27g_3^2(z) \\ &= \frac{64\pi^{12}}{27} [(1+240A)^3 - (1-504B)^2] \\ &= \frac{64\pi^{12}}{27} [12^2(5A+7B) + 12^3(100A^2 - 147B^2 + 8000A^3)]. \end{aligned}$$

Für $d \in \mathbb{N}$ gilt

$$5d^3 + 7d^5 = -d^3 + d^5 \pmod{3} = d^3(d^2 - 1) = 0 \pmod{3}$$

und

$$5d^3 + 7d^5 = d^3 - d^5 \pmod{4} = d^3(1 - d^2) = 0 \pmod{4},$$

dann ist $5d^3 + 7d^5 = 0 \pmod{12}$, und $\frac{5A+7B}{12} \in \mathbb{Z}$. □

Es gilt $\tau(1) = 1$, $\tau(2) = -24$, $\tau(3) = 252$, $\tau(4) = -1472$. Man kann dies direkt berechnen, viel bequemer (und zuverlässiger) ist es jedoch, dies mit Hilfe einer speziellen Software, einem Computer Algebra System, zu tun. In unserem Fall werden wir Pari/GP benutzen. Wenn Sie es bisher noch nicht auf Ihrem PC installiert haben, rate ich dies zu tun und sich mit den Grundlagen des Programms vertraut zu machen. Die Berechnung der Werte der Ramanujan-Tau-Funktion in Pari kann mit einer Zeile erfolgen:

```
ramanujantau(n)
```

wobei n eine beliebige Zahl ist.

Später werden wir die Fourier-Entwicklungen bestimmter Funktionen kennen müssen, und es wird äußerst kompliziert sein, diese von Hand zu berechnen.

6.13 Weitere Eigenschaften von $SL_2(\mathbb{Z})$

Definition 25. Die Gruppe $PSL_2(\mathbb{Z}) = SL_2(\mathbb{Z}) / \pm \text{id}$, wobei

$$SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\},$$

eine sogenannte *modulare Gruppe* ist. Falls $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $z \in \mathbb{H}$ ist, schreiben wir

$$A.z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Beispiel 13. Seien

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$T.z = z + 1, \quad S.z = -1/z.$$

Satz 50. Sei $A \in SL_2(\mathbb{Z})$. Dann $\exists k \in \mathbb{N}$ und $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$ sodass

$$A = T^{n_1} S T^{n_2} S \dots S T^{n_k}.$$

Beweis. Induktion über c :

(a) $c = 0 \implies ad = 1 \implies a = d = \pm 1$ und

$$A = \begin{pmatrix} \pm 1 & b \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \pm b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T^{\pm b}.$$

(b) $c = 1 \implies b = ad - 1$ und

$$A = \begin{pmatrix} a & ad - 1 \\ 1 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T^a S T^d.$$

(c) Sei $c > 1$. Angenommen, wir haben die Aussage für alle Matrizen bewiesen, bei denen der untere linke Eintrag kleiner als c ist. Dann $ad - bc = 1 \implies (c, d) = 1$. Sei

$$d = cq + r, \quad 0 < r < c.$$

Dann ist

$$AT^{-q} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -aq + b \\ c & r \end{pmatrix}$$

und

$$AT^{-q}S = \begin{pmatrix} a & -aq + b \\ c & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -aq + b & -a \\ r & -c \end{pmatrix}.$$

Nach der Induktionshypothese ist die letzte Matrix ein Produkt von S und T , also ist A auch ein Produkt von S und T . Damit ist der Beweis abgeschlossen.

□

Definition 26. Eine Funktion $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ erfüllt die *modulare Transformationseigenschaft des Gewichts k* , wenn

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z\right) = (cz + d)^k f(z), \quad z \in \mathbb{H}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL_2(\mathbb{Z})$$

gilt.

Bemerkung 9. Um zu zeigen, dass die Funktion f eine modulare Transformationseigenschaft mit dem Gewicht k erfüllt, genügt es zu zeigen, dass

$$f(-1/z) = z^k f(z), \quad f(z+1) = f(z).$$

gilt.

Bemerkung 10. Die einzige Funktion, die die modulare Transformationsregel mit ungeradem Gewicht erfüllt, ist eine Funktion, die identisch gleich Null ist: für jedes $z \in \mathbb{H}$, das wir haben

$$\begin{aligned} z^k f(z) &= f\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot z\right) \\ &= f(-1/z) \\ &= f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot z\right) \\ &= (-z)^k f(z). \end{aligned}$$

Falls k ungerade ist, dann gilt $f(z) = -f(z)$.

Beispiel 14. (i) J erfüllt die modulare Transformationseigenschaft des Gewichts 0.

(ii) E_k erfüllt die modulare Transformationseigenschaft des Gewichts k .

(iii) Seien

$$\varphi_{-2} := -\frac{1728E_4E_6}{E_4^3 - E_6^2}, \quad \varphi_{-4} := \frac{1728E_4^2}{E_4^3 - E_6^2}, \quad j = \frac{1728E_4^3}{E_4^3 - E_6^2}.$$

Dann erfüllt φ_{-2} die modulare Transformationseigenschaft des Gewichts -2 , φ_{-4} die modulare Transformationseigenschaft des Gewichts -4 , und j die modulare Transformationseigenschaft des Gewichts 0.

(iv) Die Funktion

$$E_2(z) := 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) e^{2\pi i n z}$$

erfüllt die modulare Transformationseigenschaft nicht²¹:

$$z^{-2} E_2(-1/z) = E_2(z) - \frac{6i}{\pi} \frac{1}{z}.$$

²¹Hausaufgabe!

(v) Seien jetzt

$$\begin{aligned}\phi_{-4} &:= \varphi_{-4}, \\ \phi_{-2} &:= \varphi_{-4}E_2 + \varphi_{-2}, \\ \phi_0 &:= \varphi_{-4}E_2^2 + 2\varphi_{-2}E_2 + j - 1728.\end{aligned}$$

Für den Beweis der optimalen Kugelpackung benötigen wir die Transformationsregel für ϕ_0 :

$$\begin{aligned}E_2(-1/z)^2 &= \left(z^2 E_2(z) - \frac{6i}{\pi} z \right)^2 \\ &= z^4 E_2(z)^2 - z^3 \frac{12i}{\pi} E_2(z) - \frac{36}{\pi^2} z^2, \\ \varphi_{-4}(-1/z) E_2(-1/z)^2 &= \varphi_{-4}(z) \left(E_2(z)^2 - z^{-1} \frac{12i}{\pi} E_2(z) - \frac{36}{\pi^2} z^{-2} \right), \\ 2\varphi_{-2}(-1/z) E_2(-1/z) &= 2\varphi_{-2}(z) E_2(z) - \frac{12i}{\pi} z^{-1} \varphi_{-4}(z).\end{aligned}$$

Dies impliziert

$$\phi_0(-1/z) = \phi_0(z) - \frac{12i}{\pi} \frac{1}{z} \phi_{-2}(z) - \frac{36}{\pi^2} \frac{1}{z^2} \phi_{-4}(z) \quad (6.4)$$

und

$$\begin{aligned}\phi_0\left(\frac{-1}{z+1}\right)(z+1)^2 - 2\phi_0\left(\frac{-1}{z}\right)z^2 + \phi_0\left(\frac{-1}{z-1}\right)(z-1)^2 \\ = \phi_0(z+1)(z+1)^2 - 2\phi_0(z)z^2 + \phi_0(z-1)(z-1)^2 \\ - \frac{12i}{\pi}(\phi_{-2}(z+1)(z+1) - 2\phi_{-2}(z)z + \phi_{-2}(z-1)(z-1)) \\ - \frac{36}{\pi^2}(\phi_{-4}(z+1) - 2\phi_{-4}(z) + \phi_{-4}(z-1)) \\ = 2\phi_0(z).\end{aligned} \quad (6.5)$$

(vi) Ein weiteres Beispiel für eine Funktion, die die Transformationseigenschaften nicht erfüllt, sind *Theta-Funktionen*. Wir definieren

$$\begin{aligned}\theta_{00}(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 z}, \\ \theta_{01}(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n e^{\pi i n^2 z}, \\ \theta_{10}(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i (n+1/2)^2 z}.\end{aligned}$$

In der Hausaufgabe werden Sie folgendes zeigen:

$$\begin{aligned}z^{-2}\theta_{00}^4(-1/z) &= -\theta_{00}^4(z), & z^{-2}\theta_{01}^4(-1/z) &= -\theta_{01}^4(z), & z^{-2}\theta_{10}^4(-1/z) &= -\theta_{10}^4(z), \\ \theta_{00}(z+1) &= \theta_{00}(z), & \theta_{01}(z+1) &= \theta_{01}(z), & \theta_{10}(z+1) &= \theta_{10}(z).\end{aligned}$$

Wir halten fest, dass die erste Gleichheit bereits gezeigt wurde, als wir die Funktionsgleichung für die Riemannsche Zetafunktion bewiesen haben.

Definition 27. Wir sagen, dass eine Funktion $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ eine modulare Form des Gewichts k ist, wenn

- (i) f erfüllt die modulare Transformationseigenschaft des Gewichts k ,
- (ii) f ist eine holomorphe Funktion,
- (iii) f hat ein subexponentielles Wachstum von $y \rightarrow \infty$.

Der Raum der holomorphen Modulformen des Gewichts k wird mit $M_k(PSL_2(\mathbb{Z}))$ bezeichnet.

Wir stellen fest, dass die Eigenschaften (i) und (ii) implizieren dass $\forall f \in M_k(PSL_2(\mathbb{Z}))$,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q^n, \quad z \in \mathbb{H}, \quad q = e^{2\pi iz}.$$

Eigenschaft (iii) impliziert dass $a_n = 0$ für $n < 0$; dann gilt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n, \quad z \in \mathbb{H}, \quad q = e^{2\pi iz}.$$

Beispiel 15. (i) $E_4 \in M_4(PSL_2(\mathbb{Z}))$,

(ii) $E_6 \in M_6(PSL_2(\mathbb{Z}))$,

(iii) $E_k \in M_k(PSL_2(\mathbb{Z}))$ für $k > 0$ gerade,

(iv) $\Delta \in M_{12}(PSL_2(\mathbb{Z}))$,

(v) $j \notin M_0(PSL_2(\mathbb{Z}))$, weil $E_4^3 = O(1)$, $E_4^3 - E_6^2 = O(q) \implies j = O(q^{-1})$ für $y \rightarrow \infty$.

6.14 Endliche Dimensionalität von $M_k(PSL_2(\mathbb{Z}))$

Lemma 22. Sei

$$D = \{\tau \in \mathbb{H}, |\tau| > 1, \operatorname{Re}(\tau) < 1/2\}.$$

Dann:

- (a) Sei $z, z' \in D$ und $z \neq z' \implies \exists \gamma \in PSL_2(\mathbb{Z})$ sodass $z = \gamma z'$,
- (b) $\mathbb{H} = \cup_{\gamma \in \mathbb{H}} \overline{\gamma \cdot D}$,
- (c) Die Punkte auf den beiden Geraden $\operatorname{Re}(z) = \pm 1/2$ sind durch die Wirkung von T äquivalent. Außerdem sind die Punkte links und rechts Hälften des Bogens $|z| = 1$ unter der Wirkung von S äquivalent.

Manchmal ist es praktisch, eine sogenannte Halbschließung \tilde{D} von D zu definieren:

$$\tilde{D} = \overline{D}/PSL_2(\mathbb{Z}).$$

Wir stellen fest, dass \tilde{D} aus \overline{D} erhalten werden kann, indem die gegenüberliegenden Seiten (Linien $\operatorname{Re}(s) = \pm 1/2$ und Hälften des Bogens $|z| = 1$) identifiziert werden).

Nun definieren wir für jeden Punkt $P \in \tilde{D}$ eine Zahl n_P als die Ordnung des Stabilisators von $PSL_2(\mathbb{Z})$ bei P .

- $P \in D \implies n_P = 1$. Dies ist eine direkte Folge von (a) in Lemma 22, der Stabilisator besteht aus der Identitätsmatrix.
- $P = i \implies n_P = 2$. Der Stabilisator von i ist $\langle S \rangle$, und es gilt $|\langle S \rangle| = 2$.
- $P = \omega = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}) \implies n_P = 3$. Der Stabilisator von ω ist $\langle ST \rangle$, und es gilt $|\langle S \rangle| = 3$.
- $P \in \tilde{D} \setminus (\{i, \omega\} \cup D) \implies n_P = 1$.

Lemma 23. Sei $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion so dass für $|z - z_0| < \varepsilon$ gilt $f(z) = (z - z_0)^b g(z)$, wobei $k \in \mathbb{Z}$, g auch eine holomorphe Funktion ist und $g(z_0) \neq 0$. Dann ist

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \alpha b,$$

wobei C_r ein Kreissegment mit dem Mittelpunktswinkel $2\pi\alpha$ und dem Mittelpunkt z_0 ist.

Beweis. Sei

$$C_r = \{re^{i\phi}, \quad \phi_0 \leq \phi \leq \phi_1\}.$$

Es gilt $\phi_1 - \phi_0 = 2\pi\alpha$,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{b}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\phi_0}^{\phi_1} \left(\frac{b}{re^{i\phi}} + \frac{g'(z_0 + re^{i\phi})}{g(z_0 + re^{i\phi})} \right) re^{i\phi} i d\phi \\ &= \alpha b + \frac{r}{2\pi} \int_{\phi_0}^{\phi_1} \frac{g'(z_0 + re^{i\phi})}{g(z_0 + re^{i\phi})} e^{i\phi} d\phi \xrightarrow{r \rightarrow 0} \alpha b. \end{aligned}$$

□

Definition 28. Für jedes $z \in \tilde{D}$ definieren wir $\text{ord}_z(f)$ als die Ordnung des Verschwindens der Funktion f bei z . Zusätzlich definieren wir $\text{ord}_\infty(f)$ als die kleinste ganze Zahl n mit $a_n \neq 0$ in der Fourier-Entwicklung von f .

Satz 51. Sei f eine von Null verschiedene modulare Form des Gewichts k auf $PSL_2(\mathbb{Z})$. Dann gilt

$$\sum_{P \in \tilde{D}} \frac{\text{ord}_P(f)}{n_P} + \text{ord}_\infty(f) = \frac{k}{12}.$$

Beweis. Wir beginnen mit der Feststellung, dass f endlich viele Nullstellen in \tilde{D} hat (andernfalls gäbe es einen Häufungspunkt). An jedem solchen Punkt ist $\text{ord}_P f(z)$ gleich dem Rest von $(\log(f(z)))'$.

Wir lassen D' die abgeschlossene Menge sein, die man aus \tilde{D} erhält, indem man ε -Umgebungen aller Nullstellen und die „Umgebung der Unendlichkeit“ löscht. Wir stellen fest, dass f keine Nullen in D' hat,

$$\int_{\partial D'} d(\log(f(z))) = 0.$$

Das Integral über dem Schnittpunkt von ∂D mit $\operatorname{Re}(z) = \pm 1/2$ verschwindet, da $f(-1/2 + it) = f(1/2 + it)$, und somit wir bekommen

$$\int_{\partial D' \cap \{\operatorname{Re}(z) = \pm 1/2\}} d(\log(f(z))) = 0.$$

Die Integrale über die Grenzen gelöschter Nachbarschaften sind gleich

$$\int d(\log(f(z))) = \sum_{P \in \tilde{D}} 2\pi i \frac{\operatorname{ord}_P(f)}{n_P}.$$

Wir müssen Korrekturen, n_P , vornehmen weil wir um i herum nur über $1/2$ des Kreises integrieren, und um ω herum integrieren wir über $1/3$ des Kreises.

Entlang der oberen vertikalen Linie ist das Integral gleich $2\pi i \cdot \operatorname{ord}_\infty f$.

Um das Integral entlang der Untersehne zu berechnen, beachten wir das

$$d \log f(Sz) = d \log f(z) + k \frac{dz}{z}.$$

Somit bleibt uns nur noch das Integral über die Halbsehne von $k \frac{dz}{z}$, das gleich $\pi i k / 6$ ist. \square

Korollar 3. $\Delta(z) = \frac{1}{1728}(E_4^3(z) - E_6^2(z)) \neq 0$ für $z \in \mathbb{H}$.

Beweis. $\Delta(z) = O(q) \implies \operatorname{ord}_\infty(\Delta) = 1 \implies \sum_{P \in \tilde{D}} \frac{\operatorname{ord}_P(\Delta)}{n_P} = \frac{12}{12} - 1 = 0.$ \square

Als nächstes wenden wir den obigen Satz an, um zu zeigen, dass der Raum modularer Formen endlichdimensional ist.

Satz 52. Die Dimension von $M_k(PSL_2(\mathbb{Z}))$ ist 0, wenn $k < 0$ oder k ungerade, und für gerade $k \geq 0$ gilt

$$\dim M_k(PSL_2(\mathbb{Z})) \leq \begin{cases} \lfloor k/12 \rfloor + 1, & k \not\equiv 2 \pmod{12}, \\ \lfloor k/12 \rfloor, & k \equiv 2 \pmod{12}. \end{cases}$$

Beweis. • Sei $m \geq \lfloor k/12 \rfloor + 1$; wir wählen m Punkte $P_i \in D$, $i = 1, \dots, m$. Angenommen, es gibt $m+1$ linear unabhängige Modulformen f_1, \dots, f_{m+1} . Dann ist es durch die lineare Algebra möglich, eine Linearkombination f zu wählen, so dass für alle P_i , gilt $f(P_i) = 0$. Wir erhalten den Widerspruch:

$$\frac{k}{12} \stackrel{\text{Satz 51}}{=} m + \operatorname{ord}_\infty(f) \geq m \geq \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor + 1.$$

Dann gilt $m \leq \lfloor k/12 \rfloor$, und $\dim M_k(PSL_2(\mathbb{Z})) \leq \lfloor k/12 \rfloor + 1$.

- Sei jetzt $k \equiv 2 \pmod{12}$, oder $k = 12k' + 2$ für $k' \in \mathbb{N}_0$. Sei $m \geq \lfloor k/12 \rfloor$; wir wählen $m-1$ Punkte $P_i \in D$, $i = 1, \dots, m-1$. Angenommen, es gibt m linear unabhängige Modulformen f_1, \dots, f_m . Dann ist es durch die lineare Algebra möglich, eine Linearkombination f zu wählen, so dass für alle P_i , gilt $f(P_i) = 0$. Es gilt $\frac{k}{12} = k' + \frac{1}{6}$, und Satz 51 impliziert, dass

$$\sum_{P \in \tilde{D}, P \neq i, \omega} \operatorname{ord}_P(f) + \operatorname{ord}_\infty(f) + \frac{\operatorname{ord}_i(f)}{2} + \frac{\operatorname{ord}_\omega(f)}{3} = k' + \frac{1}{6}$$

gilt. Dann ist $3 \operatorname{ord}_i(f) + 2 \operatorname{ord}_\omega(f) = 1 \pmod{6} \implies \operatorname{ord}_i(f) \neq 0$ und $\operatorname{ord}_\omega(f) \neq 0$. Wir sollten mindestens $\operatorname{ord}_i(f) = 1$ und $\operatorname{ord}_\omega(f) = 2$ haben.

$$m - 1 \leq \sum_{P \in \tilde{D}, P \neq i, \omega} \operatorname{ord}_P(f) + \operatorname{ord}_\infty(f) = \frac{k}{12} - \frac{7}{6},$$

dann ist $m \leq \frac{k}{12} - \frac{1}{6}$, aber das ist ein Widerspruch. □

Beispiel 16. Es gilt

$$\begin{aligned} M_0(PSL_2(\mathbb{Z})) &= \mathbb{C}, \\ M_2(PSL_2(\mathbb{Z})) &= \{0\}, \\ M_4(PSL_2(\mathbb{Z})) &= \mathbb{C}E_4, \\ M_6(PSL_2(\mathbb{Z})) &= \mathbb{C}E_6, \\ M_8(PSL_2(\mathbb{Z})) &= \mathbb{C}E_4^2, \\ M_{10}(PSL_2(\mathbb{Z})) &= \mathbb{C}E_4E_6, \\ M_{14}(PSL_2(\mathbb{Z})) &= \mathbb{C}E_4^2E_6. \end{aligned}$$

$M_{12}(PSL_2(\mathbb{Z}))$ enthält $\mathbb{C}\Delta$ und $\mathbb{C}E_4^3$, und die q -Entwicklung impliziert, dass E_4^3 und Δ linear unabhängig sind.

Korollar 4.

$$\sum_{m=1}^{n-1} \sigma_3(m)\sigma_3(n-m) = \frac{\sigma_7(n) - \sigma_3(n)}{120}.$$

Beweis. $E_8 \in M_8(PSL_2(\mathbb{Z}))$, dann $\exists C \in \mathbb{C}$ so dass

$$CE_8 = (E_4)^2,$$

oder

$$C \left(1 + 480 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_7(n)q^n \right) = \left(1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n)q^n \right)^2.$$

Dies impliziert $C = 1$ und

$$1 + 480 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_7(n)q^n = 1 + 240^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_3(k)\sigma_3(n-k)q^n + 480 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n)q^n.$$

Durch den Vergleich der Fourier-Koeffizienten erhalten wir die gewünschte Gleichheit. □

Bemerkung 11. Ebenso kann man andere Identitäten erhalten, z.B.

$$E_{14} = E_4E_{10} \implies \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_3(m)\sigma_9(n-m) = \frac{\sigma_{13}(n) - 11\sigma_9(n) + 10\sigma_3(n)}{2640}.$$

Selbst wenn die Dimension von $M_k(PSL_2(\mathbb{Z}))$ nicht mehr gleich 1 ist, kann die Technik verwendet werden, um interessante Gleichheiten zu erhalten. Zum Beispiel haben wir für $k = 12$, dass $E_4E_8, E_6^2, E_{12} \in M_{12}(PSL_2(\mathbb{Z}))$, aber nur zwei davon sind linear unabhängig. Wenn wir die ersten beiden Terme der Fourier-Entwicklungen vergleichen, erhalten wir

$$441E_4E_8 + 250E_6^2 = 691E_{12}.$$

Korollar 5. $\dim M_{12}(PSL_2(\mathbb{Z})) \leq 2$, und falls $f, g \in M_{12}(PSL_2(\mathbb{Z}))$ linear unabhängig sind, ist $z \mapsto f(z)/g(z)$ ein Isomorphismus zwischen $\tilde{D} \cup \{\infty\}$ und $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Beweis. Sei f, g wie oben. Dann $\forall (0, 0) \neq (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, hat die Funktion $\lambda f - \mu g$ genau eine Nullstelle in $\tilde{D} \cup \{\infty\}$, weil

$$\sum_{P \in \tilde{D}} \frac{\text{ord}_P(\lambda f - \mu g)}{n_P} + \text{ord}_\infty(\lambda f - \mu g) = 1$$

gilt. Sei $(\lambda f - \mu g)(z_0) = 0$. Dann ist $\frac{f}{g}(z_0) = (\mu : \lambda) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. □

Bemerkung 12. Wir könnten $f = 1728E_4^3$ und $g = E_3^4 - E_6^2$ nehmen.

Lemma 24. Jede Modulform ist in E_4 und E_6 polynomial.

Beweis. Für $k \leq 14$, sehe Beispiel 16. Sei $k \geq 16$, sei

$$f = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$$

und sei $a, b \geq 0$ so, dass $4a + 6b = k$ ist. Sei

$$h(z) = \frac{f(z) - a_0 E_4(z)^a E_6(z)^b}{\Delta}$$

Die Funktion h ist holomorph, weil $\Delta(z) \neq 0$ ist. Es gilt $\Delta = O(q)$ und $f(z) - a_0 E_4(z)^a E_6(z)^b = O(q)$, dann ist $h(z) = O(1) \implies h \in M_{k-12}(PSL_2(\mathbb{Z}))$. Durch die Induktionsannahme ist h in E_4 und E_6 polynomial, dann ist $f = a_0 E_4^a E_6^b + \Delta f$ auch. □

7 Ergänzende Konstruktion bestimmter Radialfunktionen

Eine der Hauptideen dieses Kurses war zu zeigen, dass das Gitter

$$\Lambda_8 = \{(x_i) \in \mathbb{Z}^8 \cup (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})^8 \mid \sum_{j=1}^8 x_j = 0 \pmod{2}\}$$

die optimale Kugelpackung in der Dimension 8 liefert. Dabei müssen wir zwei Zusatzfunktionen $a, b : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{C}$ so konstruieren, dass (unter anderem) die folgenden Eigenschaften erfüllt sein müssen:

- (a) $\hat{a} = a, \hat{b} = -b$,
- (b) Sowohl a als auch b haben doppelte Nullen bei $x \in \Lambda_8$ mit $|x| > \sqrt{2}$.

7.1 Konstruktion von a .

Wie zuvor, seien

$$\varphi_{-2} = -E_4E_6\Delta^{-1}, \quad \varphi_{-4} = E_4^2\Delta^{-1}, \quad j = E_4^3\Delta^{-1}$$

und

$$\begin{aligned} \phi_{-4} &= \varphi_{-4}, & \phi_{-2} &= \varphi_{-4}E_2 + \varphi_{-2}, \\ \phi_0 &= \varphi_{-4}E_2^2 + 2\varphi_{-2}E_2 + j - 1728. \end{aligned}$$

Alle oben genannten Objekte sind T -invariant, was die Untersuchung ihrer Fourier-Entwicklungen ermöglicht. Wir benötigen die ersten Terme in der Fourier-Entwicklung von ϕ_0 . Wir erinnern uns, dass $\Delta = (E_4^3 - E_6^2)/1728$, was es uns ermöglicht, die Fourier-Entwicklung von Δ zu erhalten, indem wir die Fourier-Entwicklung von E_4 und E_6 verwenden:

$$\Delta = q - 24q^2 + 252q^3 - 1472q^4 + 4830q^5 - 6048q^6 + \dots \quad (7.1)$$

Für diejenigen, die dies nicht mit Stift und Papier tun möchten: Es ist möglich dazu einfach, Pari/GP zu verwenden. Schreiben Sie den folgenden Code, um die ersten 40 Terme in der q -Erweiterung von Δ zu erhalten:

```
delta_expansion = Ser(mfcoefs(mfDelta()),40),q)
```

Wir erinnern uns, dass Δ in \mathbb{H} keine Nullen hat, was uns erlaubt, Δ^{-1} zu berücksichtigen. Zumindest formal erhalten wir ²²

$$\Delta^{-1} = q^{-1} + 24 + 324q + 3200q^2 + 25650q^3 + 176256q^4 + \dots \quad (7.2)$$

Noch einmal: Wenn Sie diese Umkehrung nicht von Hand durchführen möchten, können Sie Pari/GP verwenden und schreiben²³ dazu folgendes:

```
delta_inv_expansion = q^(-1)*taylor(q/(delta_expansion),q)
```

Durch Multiplikation mit E_4^2 erhalten wir

$$\phi_{-4} = E_4^2\Delta^{-1} = q^{-1} + 504 + 73764q + 2695040q^2 + 54755730q^3 + 778640256q^4 + \dots \quad (7.3)$$

Auch hier können wir Pari/GP verwenden, um die ersten Terme der q -Entwicklung von φ_{-4} zu erhalten:

```
varphi4 = Ser(mfcoefs(mfpow(mfEk(4),2),40),q)*delta_inv_expansion
```

Auf ähnliche Weise erhalten wir die ersten Terme in der q -Entwicklung von φ_{-2} ,

$$\varphi_{-2} = 720 + 203040q + 9417600q^2 + 223473600q^3 + 3566782080q^4 + 43393129920q^5 + \dots$$

mit Hilfe von

²²Dies ist lediglich eine formale Umkehrung der Reihe; Tatsächlich wollen wir die rechte Seite von (7.2) so wählen, dass das Produkt von (7.1) und (7.2) gleich 1 ist.

²³Der Trick mit der Multiplikation der Reihe mit q ist erforderlich, da wir technisch gesehen nicht mit der Taylor-Entwicklung sondern mit der Laurent-Entwicklung arbeiten.

varphim2=-Ser(mfcoefs(mfEk(4),40),q)*\
Ser(mfcoefs(mfEk(6),40),q)*delta_inv_expansion

und die ersten Terme in der q -Entwicklung von ϕ_{-2}

$$\phi_{-2} = 720 + 203040q + 9417600q^2 + 223473600q^3 + 3566782080q^4 + 43393129920q^5 + \dots \quad (7.4)$$

mit Hilfe von

phim2 = varphim4*Ser(mfcoefs(mfEk(2),40),q)+varphim2

Schließlich erhalten wir

$$\phi_0 = 518400q + 31104000q^2 + 870912000q^3 + 15697152000q^4 + 210303475200q^5 + \dots \quad (7.5)$$

mit Hilfe von

phim0 = varphim4*Ser(mfcoefs(mfpow(mfEk(2),2),40),q)+\
2*varphim2*Ser(mfcoefs(mfEk(2),40),q)+Ser(mfcoefs(mfpow(mfEk(4),3),40),q) \
*delta_inv_expansion-1728

Wir definieren für jedes $x \in \mathbb{R}^8$ die Funktion $a : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}$ durch das folgende Integral

$$a(x) := \int_{-1}^i \phi_0 \left(\frac{-1}{z+1} \right) (z+1)^2 e^{\pi i \|x\|^2 z} dz + \int_1^i \phi_0 \left(\frac{-1}{z-1} \right) (z-1)^2 e^{\pi i \|x\|^2 z} dz \quad (7.6)$$

$$- 2 \int_0^i \phi_0 \left(\frac{-1}{z} \right) z^2 e^{\pi i \|x\|^2 z} dz + 2 \int_i^\infty \phi_0(z) e^{\pi i \|x\|^2 z} dz.$$

Wenn wir oben beispielsweise \int_{-1}^i schreiben, meinen wir „einen beliebigen Pfad in $\overline{\mathbb{H}}$, der bei -1 beginnt und bei i endet.“. Wir stellen außerdem fest, dass es keine Rolle spielt, welcher Pfad genau eingeschlagen wird, da ϕ_0 konstruktionsbedingt eine holomorphe Funktion ist (weil E_2, E_4 und E_6 holomorph sind und Δ keine Nullen in \mathbb{H} hat).

Wir stellen fest, dass die Integrale absolut und gleichmäßig konvergieren. Insbesondere das vierte Integral in (7.6) konvergiert absolut und gleichmäßig, da für große y die q -Entwicklung (7.5) impliziert

$$\phi_0(z) e^{\pi i \|x\|^2 z} = O(e^{-2\pi y} e^{-\pi \|x\| y}),$$

und weil ϕ_0 keine Pole in \mathbb{H} hat. Was die ersten drei Integrale betrifft, können wir sie mithilfe der Substitution schreiben

$$\int_{-1}^i \phi_0 \left(\frac{-1}{z+1} \right) (z+1)^2 e^{\pi i \|x\|^2 z} dz \stackrel{z' = \frac{-1}{z+1}}{=} - \int_{-\frac{1}{i+1}}^{i\infty} \phi_0(z') e^{\pi i \|x\|^2 (-1/z'-1)} dz', \quad (7.7)$$

$$\int_1^i \phi_0 \left(\frac{-1}{z-1} \right) (z-1)^2 e^{\pi i \|x\|^2 z} dz \stackrel{z' = \frac{-1}{z-1}}{=} - \int_{-\frac{1}{i-1}}^{i\infty} \phi_0(z') e^{\pi i \|x\|^2 (-1/z'+1)} dz',$$

$$\int_0^i \phi_0 \left(\frac{-1}{z} \right) z^2 e^{\pi i \|x\|^2 z} dz \stackrel{z' = -1/z}{=} - \int_i^{i\infty} \phi_0(z') e^{-\pi i \|x\|^2 / z'} dz'.$$

Alle drei konvergieren absolut und gleichmäßig, da für $\text{Im}(z') \rightarrow \infty$ die Integranden exponentiell zerfallen (was durch die q -Entwicklung von ϕ_0 impliziert wird).

Lemma 25. Die Funktion a gehört zum Schwartz-Raum²⁴.

Beweis. Wir gehen davon aus,²⁵ die Fourier-Koeffizienten, $c_{\phi_0}(n)$, von ϕ_0 erfüllen

$$|c_{\phi_0}(n)| \leq 2e^{4\pi\sqrt{n}}, \quad n \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Somit erhalten wir für $y \geq 3$

$$\begin{aligned} |\phi_0(z)| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} c_{\phi_0}(n) e^{2\pi i n(x+iy)} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2e^{4\pi\sqrt{n}} e^{-2\pi n y} = 2e^{4\pi-2\pi y} + \sum_{n=2}^{\infty} 2e^{4\pi\sqrt{n}} e^{-2\pi n y} \\ &= O(e^{-2\pi y}) + 2 \sum_{n=2}^{\infty} e^{2\pi n(2-y)} = O(e^{-2\pi y}) - \frac{e^{4\pi(2-y)}}{e^{2\pi(2-y)} - 1} = O(e^{-2\pi y}). \end{aligned}$$

Wir stellen außerdem fest, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 2e^{4\pi\sqrt{n}} e^{-2\pi n y}$ zu einem endlichen Wert für $y \in [1/2, 3]$ konvergiert. Dann gilt

$$|\phi_0(z)| \leq C e^{-2\pi y}, \quad y > 1/2.$$

Jetzt können wir den ersten Summanden in a schätzen. Dazu verwenden wir eine bequemere Form, nämlich (7.7). Da z' von $-\frac{1}{i+1} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ bis $i\infty$ geht, können wir den Pfad

$$z' \in \left\{ -\frac{1}{2} + it, \quad t \in [1/2, \infty) \right\}$$

wählen um den absoluten Wert der rechten Seite von (7.7) als

$$\left| \int_{-\frac{1}{i+1}}^{i\infty} \phi_0(z') e^{\pi i \|x\|^2 (-1/z' - 1)} dz \right| = \left| \int_{1/2}^{\infty} \phi\left(\frac{1}{2} + it\right) e^{\pi i \|x\|^2 \left(-\frac{1}{-1/2+it} - 1\right)} dt \right| \quad (7.8)$$

zu schreiben. Andererseits, für $t \geq 1/2$,

$$\left| e^{i\left(-\frac{1}{-1/2+it} - 1\right)} \right| = e^{-2\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2t+i}\right)} = e^{-2\left(\frac{2t}{4t^2-1}\right)} \leq e^{-2\left(\frac{2t}{4t^2}\right)} = e^{-1/2t},$$

und

$$|\phi_0(-\frac{1}{2} + it)| \leq C e^{-2\pi t}.$$

Dies ermöglicht die Beurteilung der rechten Seite von (7.8) als

$$C \int_{1/2}^{\infty} e^{-2\pi t - \pi \|x\|^2 / 2t} dt \leq C \int_0^{\infty} e^{-2\pi t - \pi \|x\|^2 / 2t} dt \leq \frac{C}{2} \int_0^{\infty} e^{-2\pi t - \pi \|x\|^2 / 2t} (t^{1/2} + t^{-1/2}) dt.$$

Der letzte Schritt wird durch eine Ungleichung $1/2 \leq t^{1/2} + t^{-1/2}$ gerechtfertigt. Wir können das Integral der rechten Seite des vorherigen Ausdrucks als

$$\frac{e^{-2\pi \|x\|} (2\pi (\|x\| + 2) + 1)}{4\sqrt{2}\pi}$$

²⁴das heißt, a und alle seine Ableitungen zerfallen schneller als jede Potenz von x wenn $x \rightarrow \infty$

²⁵Die Aussage lässt sich mit Hilfe der Kreismethode zeigen; Weitere Einzelheiten finden Sie im Originalartikel.

auswerten. Man kann leicht erkennen, dass das Integral abnimmt schneller als jede Umkehrpotenz von $\|x\|$ wenn $\|x\| \rightarrow \infty$. Analoge Schätzungen lassen sich für jede Ableitung sowie für den zweiten und dritten Summanden in a finden. Was den vierten Summanden in a betrifft, bemerken wir

$$\left| \int_i^{i\infty} \phi_0(z) e^{\pi i \|x\|^2 z} dz \right| \leq C \int_1^\infty e^{-2\pi t - \pi \|x\|^2 t} dt = C \frac{e^{-\pi(\|x\|^2 + 2)}}{\pi(\|x\|^2 + 2)},$$

was ebenfalls schneller als jede Umkehrpotenz von $\|x\|$ abnimmt. \square

Im Folgenden verwenden wir die folgende Definition der Fourier-Transformation: für $y \in \mathbb{R}^d$, sei

$$\mathcal{F}(f)(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot y} dx.$$

Für $j = 1, \dots, 8$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\pi i x_j^2 z - 2\pi i x_j y_j} dx_j = (\sqrt{-iz})^{-1} e^{-i\pi y_j^2 / z},$$

und deshalb für $d = 8$,

$$\mathcal{F}(e^{\pi i \|x\|^2 z})(y) = z^{-4} e^{-\pi i \|y\|^2 / z}.$$

Lemma 26. $\mathcal{F}(a) = a$.

Beweis.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(a)(y) &:= \int_{-1}^i \phi_0\left(\frac{-1}{z+1}\right) (z+1)^2 z^{-4} e^{-\pi i \|y\|^2 / z} dz \\ &+ \int_1^i \phi_0\left(\frac{-1}{z-1}\right) (z-1)^2 z^{-4} e^{-\pi i \|y\|^2 / y} dz \\ &- 2 \int_0^i \phi_0\left(\frac{-1}{z}\right) z^{-2} e^{-\pi i \|y\|^2 / y} dz \\ &+ 2 \int_i^\infty \phi_0(z) z^{-4} e^{-\pi i \|y\|^2 / z} dz. \end{aligned}$$

Wir ersetzen die Änderung der Variablen $w = -1/z$, dann $dw = -dz/z^2$ und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(a)(y) &:= \int_1^i \phi_0 \left(-1 + \frac{1}{1-w}\right) \left(-\frac{1}{w} + 1\right)^2 w^2 e^{\pi i \|y\|^2 w} dw \\
&\quad + \int_{-1}^i \phi_0 \left(1 - \frac{1}{w+1}\right) \left(-\frac{1}{w} - 1\right)^2 w^2 e^{\pi i \|y\|^2 w} dw \\
&\quad - 2 \int_{i\infty}^i \phi_0(w) e^{\pi i \|y\|^2 w} dw \\
&\quad + 2 \int_i^0 \phi_0\left(-\frac{1}{w}\right) w^2 e^{\pi i \|y\|^2 w} dw \\
&= \int_1^i \phi_0 \left(-\frac{1}{w-1}\right) (w-1)^2 e^{\pi i \|y\|^2 w} dw \\
&\quad + \int_{-1}^i \phi_0 \left(-\frac{1}{w+1}\right) (w+1)^2 e^{\pi i \|y\|^2 w} dw \\
&\quad + 2 \int_i^{i\infty} \phi_0(w) e^{\pi i \|y\|^2 w} dw \\
&\quad - 2 \int_0^i \phi_0\left(-\frac{1}{w}\right) w^2 e^{\pi i \|y\|^2 w} dw = a(y).
\end{aligned}$$

Die zweite Gleichheit folgt aus der Periodizität von ϕ_0 . □

Lemma 27. Für $r > \sqrt{2}$,

$$a(r) = -4 \sin^2(\pi r^2/2)^2 \int_0^{i\infty} \phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 e^{\pi i r^2 z} dz. \quad (7.9)$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass die rechte Seite von (7.12) wohldefiniert ist. Aus (7.5) folgt

$$\phi_0(-1/it) = O(e^{-2\pi/t}), \quad t \rightarrow 0,$$

und (7.4), (7.3) und (7.5) zusammen mit (6.4) implizieren (wir brauchen nur die ersten beiden Terme in ϕ_{-4} und den ersten Term in ϕ_{-2}), dass

$$\phi_0(-1/it) = \frac{36}{\pi^2} e^{2\pi t} t^{-2} - \frac{8640}{\pi} t^{-1} + \frac{18144t^{-2}}{\pi^2} + O(e^{-2\pi t}) = O(t^{-2} e^{2\pi t}), \quad t \rightarrow \infty. \quad (7.10)$$

Dies impliziert

$$\phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 e^{\pi i r^2 z} \Big|_{z=it} = O(e^{2\pi t}), \quad t \rightarrow \infty$$

und

$$\phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 e^{\pi i r^2 z} \Big|_{z=it} = O(t^2 e^{-2\pi/t - \pi r^2 t}), \quad t \rightarrow 0.$$

Somit konvergiert das Integral in (7.12) für $r^2 > 2$. Es gilt

$$-4 \sin^2(\pi r^2/2) = e^{-\pi i r^2} + e^{\pi i r^2} - 2,$$

die rechte Seite von (7.12) wird

$$\begin{aligned}
& (e^{-\pi ir^2} + e^{\pi ir^2} - 2) \int_0^{i\infty} \phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 e^{\pi ir^2 z} dz \\
&= \int_0^{i\infty} \phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 e^{\pi ir^2(z-1)} dz + \int_0^{i\infty} \phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 e^{\pi ir^2(z+1)} dz - 2 \int_0^{i\infty} \phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 e^{\pi ir^2 z} dz \\
&= \int_{-1}^{i\infty} \phi_0\left(-\frac{1}{z+1}\right) z^2 e^{\pi ir^2 z} dz + \int_1^{i\infty} \phi_0\left(-\frac{1}{z-1}\right) z^2 e^{\pi ir^2 z} dz - 2 \int_0^{i\infty} \phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 e^{\pi ir^2 z} dz \\
&= \left(\int_{-1}^i + \int_i^{i\infty} \right) \phi_0\left(-\frac{1}{z+1}\right) z^2 e^{\pi ir^2 z} dz \\
&\quad + \left(\int_1^i + \int_i^{i\infty} \right) \phi_0\left(-\frac{1}{z-1}\right) z^2 e^{\pi ir^2 z} dz \\
&\quad - 2 \left(\int_0^i + \int_i^{i\infty} \right) \phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 e^{\pi ir^2 z} dz \\
&\stackrel{(6.5)}{=} \int_{-1}^i \phi_0\left(-\frac{1}{z+1}\right) z^2 e^{\pi ir^2 z} dz + \int_1^i \phi_0\left(-\frac{1}{z-1}\right) z^2 e^{\pi ir^2 z} dz - 2 \int_0^i \phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 e^{\pi ir^2 z} dz \\
&\quad + 2 \int_i^{i\infty} \phi_0(z) e^{\pi ir^2 z} dz \\
&= a(r).
\end{aligned}$$

□

Lemma (27) ermöglicht es, eine etwas andere Darstellung für $a(r)$ zu geben, dieses Mal – für den Fall, dass $r \geq 0$.

Lemma 28. Für $r \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned}
a(r) &= 4i \sin(\pi r^2/2)^2 \left[\frac{36}{\pi^3(r^2-2)} - \frac{8640}{\pi^3 r^4} + \frac{18144}{\pi^3 r^2} \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\infty \left(t^2 \phi_0(i/t) - \frac{36}{\pi^2} e^{2\pi t} + \frac{8640}{\pi} t - \frac{18144}{\pi^2} \right) e^{-\pi r^2 t} dt \right].
\end{aligned}$$

Beweis. Für $r > \sqrt{2}$ gilt

$$a(r) = 4i \sin(\pi r^2/2)^2 \int_0^\infty \phi_0(i/t) t^2 e^{-\pi r^2 t} dt.$$

Die Idee besteht darin, den sich schlecht verhaltenden Teil von $a(r)$ als $r \rightarrow \infty$ abzuschneiden, um das Integral in etwas zu ändern, das für $r \geq 0$ konvergiert. Dazu verwenden wir (7.10), um zu notieren, dass das Integral

$$\int_0^\infty \left(\frac{36}{\pi^2} e^{2\pi t} - \frac{8640}{\pi} t + \frac{18144}{\pi^2} \right) e^{-\pi r^2 t} dt = \frac{36}{\pi^3(r^2-2)} - \frac{8640}{\pi^3 r^4} + \frac{18144}{\pi^3 r^2},$$

analytisch bis $r \geq 0$ fortgeführt werden kann. □

Das Lemma impliziert das folgende Lemma:

Lemma 29.

$$a(0) = -i\frac{8640}{\pi}, \quad a(\sqrt{2}) = 0, \quad a'(\sqrt{2}) = i\frac{72\sqrt{2}}{\pi}.$$

Beweis. Der Beweis beruht auf der Tatsache, dass $\int_0^\infty (t^2\phi_0(i/t) - \frac{36}{\pi^2}e^{2\pi t} + \frac{8640}{\pi}t - \frac{18144}{\pi^2}) e^{-\pi r^2 t} dt$ keine Pole bei $r = 0, \sqrt{2}$ hat und, dass

$$\begin{aligned} a(0) &= \lim_{r \rightarrow 0} \left[4i \sin(\pi r^2/2)^2 \cdot \left(-\frac{8640}{\pi^3 r^4} \right) \right] = -\frac{8640i}{\pi}, \\ a(\sqrt{2}) &= \lim_{r \rightarrow \sqrt{2}} \left[4i \sin(\pi r^2/2)^2 \frac{36}{\pi^3 (r^2 - 2)} \right] = 0, \\ a'(\sqrt{2}) &= \lim_{r \rightarrow \sqrt{2}} \left[4i \sin(\pi r^2/2)^2 \frac{36}{\pi^3 (r^2 - 2) (r - \sqrt{2})} \right] = \frac{72i\sqrt{2}}{\pi} \end{aligned}$$

gilt. □

7.2 Konstruktion von b .

Jetzt konstruieren wir eine weitere Zwischenfunktion, die ein art Zwilling von a sein wird. Der einzige Unterschied besteht darin, dass wir jetzt anstelle von ϕ_0 eine andere Funktion verwenden werden,

$$\psi_I = 128 \frac{\theta_{00}^4 + \theta_{01}^4}{\theta_{10}^4} + 128 \frac{\theta_{00}^4 - \theta_{01}^4}{\theta_{00}^4},$$

wobei

$$\theta_{00}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 z}, \quad \theta_{01}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n e^{\pi i n^2 z}, \quad \theta_{10}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i (n+1/2)^2 z}$$

sind. Wir beachten, dass die Definitionen die q -Erweiterungen implizieren (jedoch jetzt in halben Potenzen von q), und wir erhalten

$$\psi_I(z) = q^{-1} + 144 - 5120q^{1/2} + 70524q - 626688q^{3/2} + 4265600q^2 + O(q^{5/2}). \quad (7.11)$$

Wir definieren $b : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}$ ähnlich wie a ; Dieses Mal wollen wir jedoch anstelle von Lemma 27, dass für $r > \sqrt{2}$ die Funktion b

$$b(r) = -4 \sin(\pi r^2/2)^2 \int_0^{i\infty} \psi_I(z) e^{\pi i r^2 z} dz \quad (7.12)$$

erfüllt. Unter Verwendung von (7.11) und „Abschneiden“ der ersten beiden Terme erhalten wir aus (7.12), dass für $r \geq 0$

$$b(r) = 4i \sin(\pi r^2/2)^2 \left(\frac{144}{\pi r^2} + \frac{1}{\pi (r^2 - 2)} + \int_0^\infty (\psi_I(it) - 144 - e^{2\pi t}) e^{-\pi r^2 t} dt \right)$$

gilt. Der obige Ausdruck impliziert

$$b(0) = 0, \quad b(\sqrt{2}) = 0, \quad b'(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}\pi i.$$

Darüber hinaus implizieren die Transformationseigenschaften von ψ_I dies

$$\mathcal{F}(b) = -b.$$