Wintersemester 2019/20
Prof. Dr. S. Goette
Dr. Ksenia Fedosova

Seminar: Funktionentheorie

Teil 1: Elliptische Funktionen

In den folgenden Vorträgen untersuchen wir doppeltperiodische meromorphe Funktionen auf $\mathbb{C}$. Mithilfe der Liouville'schen Sätze und des Satzes von Abel sehen wir, dass diese Funktionen vielen Einschränkungen unterliegen. Anschließend geben wir ein allgemeines Konstruktionsverfahren an und zeigen danach, dass der Körper der meromorphen Funktionen zu einem vorgegebenen Gitter von einer einzigen Funktion und ihrer Ableitung erzeugt wird. Zum Schluss stellen wir den Zusammenhang mit elliptischen Integralen her.

1. Doppeltperiodische Funktionen. Elliptische Funktion sind periodische Funktionen bezüglich eines Gitters L in $\mathbb{C}$. Aus dem Satz von Liouville und dem Residuensatz ergeben sich die ersten zwei Sätze von Liouville für elliptische Funktionen [1, 1.2–1.4], [2, V.1.1–6 und Anhang zu V.1].

2. Der Satz von Abel, I. Die Ordnung einer elliptischen Funktion ist die Zahl ihrer Polstellen in einem Fundamentalbereich von L. Mithilfe des Residuensatzes erhalten wir genauere Information über die Lage der Null- und Polstellen Ordnung und Lage der Null- und Polstellen: der dritte Satz von Liouville und der Satz von Abel (nur Hinrichtung) [2, V.1.7–9, V.6.1].

3. Der Satz von Abel, II. Der Weierstraßsche Produktsatz liefert uns eine Funktion σ, mit deren Hilfe wir alle elliptischen Funktionen im Satz von Abel konstruieren können. Durch geschicktes Ableiten erhalten wir auch die Weierstraßsche $\wp$-Funktion [2, V.6.2], [5, 3 §2 3,4].

4. Eigenschaften der $\wp$-Funktion. Mithilfe der Liouville-Sätze sehen wir, dass $\wp'$ und $\wp$ elliptisch sind und machen Aussagen über die Nullstellen von $\wp'$, und die Halbwerte von $\wp$. Die Laurentreihe bei $z = 0$ lässt sich durch Eisenstein-Reihen zum Gitter L ausdrücken [2, V.2.5–11].

5. Die Differentialgleichung der $\wp$-Funktion. Jede gerade elliptische Funktion ist Polynom in $\wp$, also auch $\wp'^2$. Die Koeffizienten lassen sich durch Eisensteinreihen bestimmen. Dadurch erhält man zum einen einen Struktursatz für den Körper der elliptischen Funktionen, zum anderen eine Darstellung des Torus $\mathbb{C}/L$ als algebraische Kurve [2, V.3 und Anhang dazu].

6. Elliptische Integrale. Integrale der Form

$$\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{P(t)}}$$

bilden den historischen Ausgangspunkt der Theorie. Sie lassen sich durch die Umkehrfunktion der $\wp$-Funktion zu einem passenden Gitter $L \subset \mathbb{C}$ lösen [2, V.5].

Teil 2: Riemannsche Flächen

Manche meromorphen Funktionen lassen sich auf $\mathbb{C}$ oder Teilmengen davon beschreiben, verhalten sich aber wesentlich besser auf Definitionsbereichen, die nur lokal wie Teilmengen von $\mathbb{C}$ aussehen. Das führt auf den Begriff der Riemannschen Fläche. Einige einfache Riemannsche Flächen kennen wir bereits. Hinzu kommen die analytischen Gebilde bestimmter Funktionen sowie das „Moduldreieck“ H/Γ, das bis auf Isomorphie alle komplexen Tori der Form $\mathbb{C}/L$ aus Abschnitt 1 beschreibt.

1. Grundbegriffe und erste Beispiele. Wir definieren Riemannsche Flächen und betrachten als bekannte Beispiele die Zahlenebene $\mathbb{C}$, die Zahlenkugel $\hat{\mathbb{C}}$ und Tori $\mathbb{C}/L$ [3, I.1.1–14].

2. Das analytische Gebilde einer meromorphen Funktion. Meromorphe Funktionen f lassen sich unter Umständen entlang von Kurzen fortsetzen. Das analytische Gebilde von f fasst alle möglichen Fortsetzungen zu einer Riemannschen Fläche zusammen. Einfache Beispiele liefern Wurzelfunktionen und der Logarithmus [3, I.2].

3. Das Moduldreieck. Die Menge aller komplexen Tori $\mathbb{C}/L$ bis auf Isomorphie bildet selbst eine Riemannsche Fläche. Man kann sie als Quotient der oberen Halbebene H nach Möbiustransformationen zur Gruppe $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z})$ darstellen. Die Gruppenwirkung hat Fixpunkte unter anderem bei i und bei $\rho = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$ [1, Thms 1.2, 2.1–2.3].

4. Modulfunktionen. Meromorphe Funktionen $f \colon H \to \mathbb{C}$ mit $f(A\tau) = \tau$ für alle $A \in \Gamma$ und alle $\tau \in H$ heißen *Modulfunktionen.* Für Modulfunktionen gelten Analoga der Liouvilleschen Sätze, wenn man Null- und Polstellen bei i, ρ und $i\infty$ korrekt mitzählt [1, Thms 2.4–2.6].

5. Die Kleinsche Modulfunktion J. Mithilfe der Eisensteinreihen aus dem ersten Teil lassen sich Funktionen $\Delta \colon H \to \mathbb{C}$ und $J \colon H/\Gamma \to \mathbb{C}$ definieren. Die letztere Funktion liefert eine biholomorphe Abbildung $H/\Gamma \to \mathbb{C}$, und insbesondere auch ene Beschreibung aller Modulfunktionen [1, Thms 2.7, 2.8].

Teil 3: Polylogarithmen

Polylogarithmen Li_k lassen sich entweder über eine Verallgemeinerung der Logarithmus-Reihe oder induktiv als Stammfunktion von $\frac{Li_{k-1}(z)}{z}$ mit $Li_1(z) = -\operatorname{Log}(1 - z)$ definieren. Sie hängen eng mit der Riemannschen ζ-Funktion zusammen und spielen daher in verschiedenen Bereichen der Mathematik eine Rolle. Wir werden speziell den Dilogarithmus und daraus abgeleitete Funktionen betrachten.

1. Der Dilogarithmus und seine Funktionalgleichungen. Wir definieren Polylogarithmen allgemein und betrachten dann den Dilogarithmus. Aus der Fünf-Term-Relation leiten wir weitere Relationen und spezielle Werte ab [6, Sections I.1, 2].

2. Der Bloch-Wigner-Dilogarithmus. Die $\mathbb{R}$-wertige Funktion $\operatorname{Im}\operatorname{Li}_2(z) + \arg(1-z)\log|z|$ beschreibt über das Doppelverhältnis das Volumen ideeller hyperbolischer Tetraeder und erfüllt daher eine besonders einfache Fünfterm-Relation. Hieraus lässt sich eine Aussage über die möglichen Volumina hyperbolischer Manngifaltigkeiten ableiten [6, Sections I.3, 4].

3. Der Rogers-Dilogarithmus. Die Funktion $\operatorname{Li}_2(z) + \frac{1}{2}\operatorname{Log}(z)\operatorname{Log}(1-z) - \frac{\pi^2}{6}$ erfüllt ebenfalls eine besonders schöne Fünf-Term-Relation. Sie lässt sich modulo $4\pi^2$ besonders schön als Abbildung zwischen Riemannschen Flächen beschreiben.

Literatur

[1] T. M. Apostol, *Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory,* Springer, 2nd ed., 1990
[2] E. Freitag, R. Busam, *Funktionentheorie 1,* Spinger, 4. Aufl., 2006
[3] E. Freitag, *Funktionentheorie 2,* Spinger, 2009
[4] J. Kramer, A.-M. v. Pippich, *Logarithm and dilogarithm,* Elem. Math. 74 (2019), 10–23
[5] R. Remmert, *Funktionentheorie II,* Springer, 1999
[6] D.Zagier, The Dilogarithm Function, in *Frontiers in number theory, physics, and geometry II,* 3–65, Springer, 2007