Mengenlehre

Kurzskript der Vorlesung im WS 2010/2011
von
Jörg Flum
Universität Freiburg

1 Mächtigkeiten

Mit $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ bezeichnen wir die Menge der natürlichen, der ganzen, der rationalen, der reellen bzw. der komplexen Zahlen. Hierbei ist $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$.

Definition 1.1 Mengen A und B sind *gleichmächtig*, $A \sim B$, wenn es eine bijektive Abbildung $f : A \to B$ gibt.

Die beiden folgenden Bemerkungen ergeben sich unmittelbar aus der Definition (Übung!)

Bemerkung 1.2 *(Reflexivität) $A \sim A$.*

(Symmetrie) Wenn $A \sim B$, so $B \sim A$.

(Transitivität) Wenn $A \sim B$ und $B \sim C$, so $A \sim C$.

Bemerkung 1.3 *Wenn $A \sim A'$ umd $B \sim B'$, so $A \times B \sim A' \times B'$.*

Beispiele 1.4 (1) $\mathbb{N} \sim \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(2) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$.

(3) Für $r, s, r', s' \in \mathbb{R}$ mit $r < s$ und $r' < s'$ gilt: $]r, s[\sim]r', s'[$.

(4) $]-1, 1[\sim \mathbb{R}$.

Beweis: (1) Die Vorschrift $n \to 2n$ liefert eine Bijekktion.

(2) (Cantor's erstes Diagonalargument) Die Abbildung $p_0 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$p_0(m, k) := m + \frac{(m + k - 1) \cdot (m + k - 2)}{2} + 2(m + k) - 1$$

ist bijektiv: Gelte $p_0(m, k) = p_0(m', k')$. Wir setzen $u := m + k$ und $u' := m' + k'$. Ist $u = u'$, so ergibt sich $m = m'$ und damit $k = k'$. Wäre $u + 1 \leq u'$, so nach Definition von p_0

$$\begin{aligned} m - m' &= \frac{(u' - 1) \cdot (u' - 2)}{2} + 2u' - \frac{(u - 1) \cdot (u - 2)}{2} - 2u \\ &\geq \frac{u \cdot (u - 1)}{2} + 2u + 2 - \frac{(u - 1) \cdot (u - 2)}{2} - 2u \qquad (\text{da } u' \geq u + 1) \\ &= 2 + \frac{(u - 1)}{2} \cdot (u - (u - 2)) = u + 1 \end{aligned}$$

Also $m \geq m + k + 1$, ein Widerspruch.

(3) Die Abbildung $f :]r, s[\to]r', s'[$ mit

$$f(x) = r' + \frac{x - r}{s - r} \cdot (s' - r')$$

ist bijektiv.

(4) Die Abbildung $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} - 1, & \text{falls } x \geq 0 \\ \dfrac{1}{-(1+x)} + 1, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

ist bijektiv. $\square$

Im Sinne der folgenden Definition ist somit $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar und jedes offene Intervall $]r, s[$ mit $r, s \in \mathbb{R}$, $r < s$, hat die Mächtigkeit des Kontinuums.

Definition 1.5 Sei A eine Menge.

- A ist *endlich*, wenn es $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $A \sim \{k \in \mathbb{N} \mid k < n\}$.
- A ist *unendlich*, wenn es nicht endlich ist.
- A ist *abzählbar*, wenn $A \sim \mathbb{N}$.
- A ist *höchstens abzählbar*, wenn es endlich oder abzählbar ist.
- A ist *überabzählbar*, wenn es nicht höchstens abzählbar ist.
- A hat *die Mächtigkeit des Kontinuums*, wenn $A \sim \mathbb{R}$.

Höchstens abzählbare Mengen.

Bemerkung 1.6 *Sei B eine abzählbare Menge. Für eine nicht leere Menge A sind dann äquivalent:*

(1) A ist höchstens abzählbar.

(2) Es gibt eine injektive Abbildung $g : A \to B$.

(3) Es gibt eine surjektive Abbildung $f : B \to A$.

Beweis: OBdA können wir $B = \mathbb{N}$ annehmen.

(1) $\Rightarrow$ (2): Ist A abzählbar, also $A \sim \mathbb{N}$, so ist die Behauptung trivial. Ist A endlich, etwa $h : A \to \{k \in \mathbb{N} \mid k < n\}$ bijektiv, so ist h aufgefasst als Abbildung von A nach $\mathbb{N}$ injektiv.

(2) $\Rightarrow$ (3): Sei C eine beliebige Menge und $g : A \to C$ injektiv und $a_0 \in A$. Dann ist die Abbildung $f : C \to A$ mit

$$f(c) := \begin{cases} g^{-1}(c) & \text{falls } c \in \mathrm{bd}(g) \\ a_0 & \text{sonst} \end{cases}$$

surjektiv (dabei ist $\mathrm{bd}(g) := \{g(a) \mid a \in A\}$).

(3) $\Rightarrow$ (1): Sei $f : \mathbb{N} \to A$ surjektiv. Ist A endlich, so ist nichts zu beweisen. Sei A unendlich. Wir definieren $g : \mathbb{N} \to A$ durch Induktion

$$\begin{aligned} g(0) &:= f(0) \\ g(n+1) &:= f(i_n), \qquad \text{wobei } i_n := \min\{i \in \mathbb{N} \mid f(i) \notin \{g(0), \ldots, g(n)\}\}. \end{aligned}$$

Man beachte, dass $\mathrm{bd}(f) \setminus \{g(0), \ldots, g(n)\} = A \setminus \{g(0), \ldots, g(n)\} \neq \emptyset$, da A unendlich ist. Nach Konstruktion ist g injektiv und $\mathrm{bd}(g) = \mathrm{bd}(f) = A$. □

Im Beweis von (2) $\Rightarrow$ (3) haben wir gezeigt:

Bemerkung 1.7 *Sei A eine nicht leere Menge und B eine beliebige Menge. Wenn es eine injektive Abbildung von A nach B gibt, so auch eine surjektive Abbildung von B nach A.*

Folgerung 1.8 *(1) $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar.*

(2) Jede Teilmenge einer höchstens abzählbaren Menge ist höchstens abzählbar.

(3) Seien $g : \mathbb{N} \to I$ und $f_i : \mathbb{N} \to A_i$ (für $i \in I$) surjektiv. Dann ist $\bigcup_{i \in I} A_i$ höchstens abzählbar.

Beweis: (1) $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind nicht endlich. Die Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit

$$f(z) := \begin{cases} (0, z) & \text{falls } z \geq 0 \\ (1, -z) & \text{falls } z < 0 \end{cases}$$

ist injektiv. Da $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nach Beispiele 1.4(1) abzählbar, ergibt sich somit die Behauptung für $\mathbb{Z}$ aus Bem. 1.6. Die Abbildung $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ mit

$$g(z, n) := \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0 \\ \frac{z}{n}, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist surjektiv. Wegen Bem. 1.3 und Beispiele 1.4(1) gilt $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$. Die Behauptung ergibt sich somit aus Bem. 1.6.

(2) Ist $g : B \to \mathbb{N}$ injektiv und $A \subseteq B$, so auch $g : A \to \mathbb{N}$.

(3) Die Abbildung $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{i \in I} A_i$ mit

$$h(n, k) := f_{g(n)}(k)$$

ist surjektiv. □

Der Satz von Cantor-Bernstein.

Definition 1.9 A ist *höchstens so mächtig wie* B, $A \preceq B$, wenn es eine injektive Abbildung $f : A \to B$ gibt.

Es gilt : Wenn $A \preceq B$ und $B \preceq C$, so $A \preceq C$.
Wenn $A \sim B$, so $A \preceq B$.
Wenn $A \subseteq B$, so $A \preceq B$.

Definition 1.10 B ist *mächtiger als* A, $A \prec B$, wenn $A \preceq B$ und nicht $A \sim B$,

Satz 1.11 *Für jede Menge A ist*
$$A \prec P(A).$$
Hierbei bezeichnet $P(A) := \{X \mid X \subseteq A\}$ die Potenzmenge von A.

Beweis: $A \preceq P(A)$: Die Abbildung $f : A \to P(A)$ mit
$$f(a) := \{a\}$$
ist injektiv.

$A \not\sim P(A)$: Wir zeigen die Behauptung durch den Nachweis, dass:

Es gibt keine surjektive Abbildung von A auf $P(A)$.

Der Beweis verwendet Cantor's zweites Diagonalargument.

Angenommen $g : A \to P(A)$ ist surjektiv. Insbesondere gibt es dann für die Teilmenge
$$X_0 := \{b \in A \mid b \notin g(b)\}$$
von A ein $a_0 \in A$ mit $g(a_0) = X_0$. Somit
$$\begin{aligned} a_0 \in X_0 \quad &\iff \quad a_0 \notin g(a_0) \\ &\iff \quad a_0 \notin X_0, \end{aligned}$$
ein Widerspruch. □

Aus dem Beweis ergibt sich mit Bemerkung 1.7:

Folgerung 1.12 *Für keine Menge A gibt es eine injektive Abbildung von $P(A)$ auf A, d.h. $P(A) \not\preceq A$.*

Folgerung 1.13 *(1) $P(\mathbb{N})$ ist überabzählbar.*

(2) $A \prec P(A),\ P(A) \prec P(P(A)),\ P(P(A)) \prec P(P(P(A))), \ldots$

(3) Für eine Menge A definieren wir $P^n(A)$ durch Induktion über n:

$$P^0(A) := A \quad \textit{und} \quad P^{n+1}(A) := P(P^n(A)),$$

und setzen

$$P^\omega(A) := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P^n(A)$$

Dann gelten:

(a) Für alle $i, k \in \mathbb{N}$ mit $i < k$: $P^i(A) \prec P^k(A)$.

(b) Für alle $i \in \mathbb{N}$: $P^i(A) \prec P^\omega(A)$.

Beweis: (3)(a): Sei $i < k$. Wegen (2) und "$\preceq$ transitiv," gilt

$$P^i(A) \preceq P^{i+1}(A) \preceq \ldots \preceq P^k(A).$$

Wäre $P^k(A) \sim P^i(A)$, so

$$P^i(A) \preceq P^{i+1}(A) \preceq P^k(A) \preceq P^i(A)$$

und damit $P(P^i(A)) \preceq P^i(A)$, ein Widerspruch zur Folgerung 1.12.
(3)(b): Wegen $P^i(A) \subseteq P^\omega(A)$ ist $P^i(A) \preceq P^\omega(A)$. Wäre $f : P^\omega(A) \to P^i(A)$ injektiv, so auch $f : P^{i+1}(A) \to P^i(A)$, ein Widerspruch. □

Satz 1.14 (Satz von Cantor-Bernstein) *Für alle Mengen A und B gilt:*

$$\textit{wenn } A \preceq B \textit{ und } B \preceq A, \textit{ so } A \sim B.$$

Im Beweis benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 1.15 *Ist $H : P(A) \to P(A)$ monoton, d.h. gilt für alle $X, Y \in P(A)$*

$$\textit{wenn } X \subseteq Y, \textit{ so } H(X) \subseteq H(Y),$$

so hat H einen Fixpunkt, d.h. es gibt es ein $X_0 \in P(A)$ mit $H(X_0) = X_0$.

Beweis: Es gilt $\emptyset \subseteq H(\emptyset)$. Wir setzen

$$X_0 := \bigcup \{X \in P(A) \mid X \subseteq H(X)\}.$$

$X_0 \subseteq H(X_0)$: Nach Definition von X_0 müssen wir $X \subseteq H(X_0)$ für jedes $X \in P(A)$ mit $X \subseteq H(X)$ zeigen. Für ein solches X gilt aber $X \subseteq X_0$ und somit $H(X) \subseteq H(X_0)$ wegen der Monotonie, also $X \subseteq H(X) \subseteq H(X_0)$.

$H(X_0) \subseteq X_0$: Da $X_0 \subseteq H(X_0)$ gilt $H(X_0) \subseteq H(H(X_0))$ wegen Monotonie, also $H(X_0) \subseteq X_0$ nach Definition von X_0. $\square$

Beweis von Satz 1.14: Seien $f : A \to B$ und $g : B \to A$ injektiv. Es genügt zu zeigen, dass ein $X_0 \subseteq A$ existiert mit

$$g(B \setminus f(X_0)) = A \setminus X_0. \tag{1}$$

Dann ist nämlich $h : A \to B$ mit

$$h(a) := \begin{cases} f(a) & \text{für } a \in X_0 \\ g^{-1}(a) & \text{für } a \in A \setminus X_0 \end{cases}$$

bijektiv. Wegen (1) muß für X_0 gelten

$$A \setminus g\Big(B \setminus f(X_0)\Big) = X_0.$$

Wir suchen also einen Fixpunkt von $H : P(A) \to P(A)$, wobei

$$H(X) := A \setminus g\Big(B \setminus f(X)\Big).$$

Dieser existiert nach dem vorangehenden Lemma, da H monoton ist: Ist $X \subseteq Y$, so $f(X) \subseteq f(Y)$ und daher $B \setminus f(X) \supseteq B \setminus f(Y)$. Somit $A \setminus g\Big(B \setminus f(X)\Big) \subseteq A \setminus g\Big(B \setminus f(Y)\Big)$, d.h. $H(X) \subseteq H(Y)$. $\square$

Mengen der Mächtigkeit des Kontinuums.

Bemerkung 1.16 *Intervalle in $\mathbb{R}$ haben die Mächtigkeit des Kontinuums, genauer: für $r, s \in \mathbb{R}$ mit $r < s$ haben die Intervalle*

$$[r, s], \quad [r, s[, \quad]r, s], \quad]r, s[, \quad]-\infty, s], \quad]-\infty, s[, \quad [r, \infty), \quad]r, \infty)$$

Beweis: Für $]-\infty, s]$ etwa gilt $]s-1, s[\ \subseteq\ ]-\infty, s] \subseteq \mathbb{R}$, also

$$]s-1, s[\ \preceq\ ]-\infty, s]\ \preceq \mathbb{R},$$

so dass sich wegen $]s-1, s[\ \sim \mathbb{R}$ (vgl. Beispiele 1.4) die Behauptung aus dem Satz von Cantor-Bernstein ergibt. $\square$

Unter der *Kontinuumshypothese* versteht man die Aussage

> *Jede Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist höchstens abzählbar oder hat die Mächtigkeit des Kontinuums.*

Definition 1.17 Für Mengen A und B bezeichne ${}^{A}B$ die Menge der Funktionen von A nach B.

Bemerkung 1.18 *(1)* ${}^{A}\{0,1\} \sim P(A)$.

(2) Ist $A \sim A'$ *und* $B \sim B'$, *so* ${}^{A}B \sim^{A'} B'$.

(3) ${}^{A\times B}C \sim {}^{A}({}^{B}C)$.

Beweis: (1) Die Abbildung $H :^{A} \{0,1\} \to P(A)$ mit

$$H(f) := \{a \mid f(a) = 1\}$$

ist bijektiv.

(2) Seien $f : A \to A'$ und $g : B \to B'$ bijektiv, so ist auch die Funktion $H :^{A} B \to^{A'} B'$, die $h \in^{A} B$ auf $H(h) \in^{A'} B'$ mit

$$H(h)(a') := g(h(f^{-1}(a')))$$

abbildet, bijektiv.

Die Abbildung $H :^{A\times B} C \to {}^{A}({}^{B}C)$, die $f : A \times B \to C$ abbildet auf $H(f) : A \to^{B} C$, wobei für $a \in A$ für $H(f)(a) : B \to C$ gilt

$$H(f)(a)(b) := f(a,b)$$

ist bijektiv. □

Reelle Zahlen schreiben wir häufig als Dezimalbrüche in der Form

$$\pm n, a_1 a_2 \dots$$

mit $n, a_i \in \mathbb{N}$ und $0 \leq a_i \leq 9$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Eine Dezimaldarstellung der Form

$$\pm n, a_1 a_2 \dots a_k 000 \dots$$

endet trivial. Jede von Null verschiedene reelle Zahl hat eine eindeutige nicht trivial endende Darstellung, seine *kanonische Dezimaldarstellung.* Etwa:

$$\begin{aligned} 5 &= 4,9999\dots \\ 2,374 &= 2,3739999\dots \\ -7,02 &= -7,019999\dots \end{aligned}$$

Satz 1.19 *Die folgenden Mengen haben die Mächtigkeit des Kontinuums:*

$$P(\mathbb{N}), \quad {}^{\mathbb{N}}\{0,1\}, \quad {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}, \quad \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \quad {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}.$$

Beweis: Wir wissen bereits, dass $P(\mathbb{N}) \sim {}^{\mathbb{N}}\{0,1\}$ (vgl. Bem. 1.18).

${}^{\mathbb{N}}\{0,1\} \preceq \mathbb{R}$: Die Abbildung $H :{}^{\mathbb{N}} \{0,1\} \to \mathbb{R}$ mit

$$H(f) := 0, f(0)f(1)f(2)\dots$$

ist injektiv (die rechte Seite dieser Gleichung ist eine (möglicherweise trivial endende) Dezimaldarstellung einer reellen Zahl).

$]0,1[\preceq {}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}\{0,1\}$: Die Funktion, welche eine reelle Zahl in $]0,1[$ mit kanonischer Darstellung

$$0, a_0a_1a_2\dots$$

abbildet auf $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \{0,1\}$ mit

$$f(n,k) := \begin{cases} 1, & \text{falls } a_n = k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist injektiv.

Auf Grund des bisher Bewiesenen (und Beispiel 1.4 und Bem. 1.3) gilt

$${}^{\mathbb{N}}\{0,1\} \preceq \mathbb{R} \sim\,]0,1[\, \preceq {}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}\{0,1\} \sim {}^{\mathbb{N}}\{0,1\},$$

so dass nach dem Satz von Cantor-Bernstein alle diese Mengen die Mächtigkeit des Kontinuums haben.

$\mathbb{R} \preceq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$: Die Abbildung $r \mapsto (0,r)$ ist inkektiv.

$\mathbb{R}\times\mathbb{R} \preceq {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}$: Die Abbildung $(r,s) \mapsto f$ mit

$$f(n) := \begin{cases} r, & \text{falls } n = 0 \\ s, & \text{falls } n = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist inkektiv.

${}^{\mathbb{N}}\mathbb{R} \sim {}^{\mathbb{N}}\{0,1\}$. Da $\mathbb{R} \sim {}^{\mathbb{N}}\{0,1\}$, erhalten wir (mit Bem. 1.18(3))

$${}^{\mathbb{N}}\mathbb{R} \sim {}^{\mathbb{N}}({}^{\mathbb{N}}\{0,1\}) \sim {}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}\{0,1\} \sim {}^{\mathbb{N}}\{0,1\}.$$

${}^{\mathbb{N}}\{0,1\} \preceq {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N} \preceq {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}$: Jede Funktion $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ ist auch eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$; jede Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist auch eine Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Somit

$$\mathbb{R} \preceq \mathbb{R}\times\mathbb{R} \preceq {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R} \sim {}^{\mathbb{N}}\{0,1\} \preceq {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N} \preceq {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R} \sim {}^{\mathbb{N}}\{0,1\},$$

woraus sich die fehlenden Behauptungen mit dem Satz con Cantor-Bernstein ergeben. □

2 Wohlordnungen und Ordinalzahlen

Definition 2.1 Sei A eine Menge. Eine *Relation über* (oder *auf*) A ist eine Teilmenge R von $A \times A$. Wir nennen dann $\mathcal{A} := (A, R)$ auch eine *Struktur*. Für $R \subseteq A \times A$ sei

$$R^{-1} := \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$$

die *zu R inverse Relation* auf A.

Definition 2.2 Sei R eine Relation über A.

- *R reflexiv auf A* $:\iff$ für alle $x \in A$: $(x, x) \in R$.
- *R symmetrisch (auf A)* $:\iff$ für alle x, y $(\in A)$ (wenn $(x, y) \in R$, so $(y, x) \in R$).
- *R transitiv (auf A)* $:\iff$ für alle x, y, z $(\in A)$ (wenn $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$, so $(x, z) \in R$).
- *R Äquivalenzrelation auf A* $:\iff$ R ist reflexiv, symmetrisch und transitiv auf A.
- *R irreflexiv (auf A)* $:\iff$ für alle x $(\in A)$: $(x, x) \notin R$.
- *R antisymmetrisch (auf A)* $:\iff$ für alle x, y $(\in A)$ (wenn $(x, y) \in R$ und $(y, x) \in R$, so $x = y$).
- *R konnex auf A* $:\iff$ für alle $x, y \in A$ ($(x, y) \in R$ oder $x = y$ oder $(y, x) \in R$).
- *R Ordnung auf A* $:\iff$ R ist irreflexiv, transitiv und konnex auf A.
- *R Ordnung auf A im Sinne von kleiner-gleich*, kurz: *R kg-Ordnung auf A* $:\iff$ R ist reflexiv, antisymmetrisch, transitiv und konnex auf A.

Statt $(x, y) \in R$ schreiben wir oft Rxy oder xRy.

Beispiel 2.3 Sei A eine Menge, die mindestens zwei Elemente enthält. Dann ist $\subseteq$ auf $P(A)$ reflexiv, antisymmetrisch, transitiv und nicht konnex.

Ordnungen. Ordnungen und kg-Ordnungen entsprechen sich:

Bemerkung 2.4 *Sei R eine Relation über A.*

(1) Ist R eine Ordnung auf A, so ist $R \cup \{(x, x) \mid x \in A\}$ eine kg-Ordnung auf A.

(2) Ist R eine kg-Ordnung auf A, so ist $R \setminus \{(x, x) \mid x \in A\}$ eine Ordnung auf A.

(3) Ist R eine Ordnung auf A, so auch R^{-1}. Wir schreiben dann auch $(A, R)^*$ für (A, R^{-1}).

Beweis: Übung □

Unmittelbar klar ist:

Bemerkung 2.5 *Ist (A, R) eine Ordnung und $X \subseteq A$, so ist auch $(X, R \cap (X \times X))$ eine Ordnung, die* von R auf X induzierte Ordnung.

Ordnungen bezeichnen wir meistens mit $<$ oder $<'$, die zugehörigen kg-Ordnungen dann mit $\leq$ bzw. $\leq'$. Für $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ bezeichnen wir die zugehörigen natürlichen Ordnungen auf diesen Mengen mit $<_{\mathbb{N}}$, $<_{\mathbb{Z}}$, $<_{\mathbb{Q}}$ und $<_{\mathbb{R}}$. Häufig bezeichne wir aber etwa $(\mathbb{N}, <_{\mathbb{N}})$ auch einfach durch $\mathbb{N}$, wenn aus dem Kontext klar ist, dass wir $(\mathbb{N}, <_{\mathbb{N}})$ meinen.

Definition 2.6 Seien $\mathcal{A} = (A, <^A)$ und $\mathcal{B} = (B, <^B)$ Ordnungen.

(1) Ist $A \cap B = \emptyset$, so ist die *Summe* $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ *von* $\mathcal{A}$ *und* $\mathcal{B}$ die Struktur $(A \cup B, <)$, wobei

$$< \, := \, <^A \cup <^B \cup A \times B.$$

Sind A und B nicht disjunkt, so definieren wir $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ über "disjunkte Kopien von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$." Hierzu ersetzen wir etwa $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ durch $\mathcal{A}' = (A', <^{A'})$ bzw. $\mathcal{B}' = (B', <^{B'})$, wobei $A' := \{(a, 0) \mid a \in A\}$ bzw. $B' := \{(b, 1) \mid b \in B\}$ und $<^{A'}$ und $<^{B'}$ die 'Übersetzenungen' der Ordnungen $<^A$ bzw. $<^B$ sind und setzen $\mathcal{A} + \mathcal{B} := \mathcal{A}' + \mathcal{B}'$.

(2) Das *Produkt* $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ *von* $\mathcal{A}$ *und* $\mathcal{B}$ ist die Struktur $(A \times B, <)$, wobei für $(a, b), (a', b') \in A \times B$

$$(a, b) < (a', b') :\iff b <^B b' \text{ oder } (b = b' \text{ und } a <^A a').$$

Übung 2.7 (1) Mit $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind auch $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ und $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ Ordnungen.

(2) Man veranschauliche sich die Ordnungen $\mathbb{N} + \mathbb{N}$, $\mathbb{N}^* + \mathbb{N}$, $\mathbb{N} + \mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$.

Definition 2.8 Seien $\mathcal{A} = (A, R)$ und $\mathcal{B} = (B, S)$ Strukturen.

– Ein *Isomorphimus* zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ (oder von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ gibt) ist eine bijektive Abbildung $f : A \to B$ mit

$$\text{für alle } a, a' \in A\text{: } \Big((a, a') \in R \iff (f(a), f(a') \in S\Big).$$

Wir schreiben dann $f : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$

– $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind *isomorph*, $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, wenn es einen Isomorphimus zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gibt

Übung 2.9 Man zeige, dass für *Ordnungen* oder *kg-Ordnungen* $\mathcal{A} = (A, R)$ und $\mathcal{B} = (B, S)$ eine bijektive Abbildung $f : A \to B$ bereits dann ein Isomorphismus ist, wenn gilt:

$$\text{für alle } a, a' \in A\text{: } \Big((a, a') \in R \Rightarrow (f(a), f(a') \in S\Big).$$

Für eine natürliche Zahl k bezeichnen wir mit $\{0, 1, \ldots, k-1\}$ auch diese Menge versehen mit der üblichen $<$-Beziehung.

Beispiel 2.10 $\{0,1\} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$: Die Abbildung $f : \{0,1\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$f(i,n) := 2n + i$$

$(i \in \{0,1\},\ n \in \mathbb{N})$ ist ein Isomorphismus.

Bemerkung 2.11 *(1) Es gibt Ordnungen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{A} + \mathcal{B} \ncong \mathcal{B} + \mathcal{A}$.*

(2) Es gibt Ordnungen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \ncong \mathcal{B} \times \mathcal{A}$.

Beweis: (1) $\mathbb{N} + \mathbb{N}^*$ hat ein $<$-minimaqles Element und $\mathbb{N}^* + \mathbb{N}$ enthält kein solches.

(2) Jedes Element in $\{0,1\} \times \mathbb{N}$ hat endlich viele Vorgänger, während das element $(0,1)$ in $\mathbb{N} \times \{0,1\}$ unendlich viele besitzt. □

Übung 2.12 Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(1) $\mathbb{Q} + \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$	(2) $\mathbb{R} + \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$	(3) $\{0,1\} + \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$
(4) $\mathbb{N} + \{0,1\} \cong \mathbb{N}$	(5) $\mathbb{N} \times \{0,1\} \cong \mathbb{N}$.	

Wohlordnungen

Definition 2.13 Sei $\mathcal{A} = (A, R)$, $X \subseteq A$ und $y \in A$. Dann ist y ein *R-minimales Element von X*, wenn

$$y \in X \qquad \text{und} \qquad \text{für alle } z \in X\text{: nicht } zRy$$

Ist $\mathcal{A} = (A, <)$ eine Ordnung, $X \subseteq A$ und $y \in A$, so ist y ein *$<$-minimales Element von X* gdw ($y \in X$ und $y \leq z$ für alle $z \in X$). Insbesondere hat jede Teilmenge X einer Ordnung höchstens ein $<$-minimales Element.

Definition 2.14 $(A, <)$ ist eine *Wohlordnung*, wenn

– $(A, <)$ eine Ordnung ist;

– jede nicht leere Teilmenge von A ein $<$-minimales Element besitzt.

Übung 2.15 (1) $\mathbb{N}$ und $\{0, 1, \ldots, k-1\}$ für $k \in \mathbb{N}$ sind Wohlordnungen.

(2) $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind keine Wohlordnungen.

(3) Ist $(A, <)$ eine Wohlordnung und $X \subseteq A$, so ist die von R auf X induzierte Ordnung $(X, < \cap (X \times X))$ auch eine Wohlordnung.

(4) Ist $\mathcal{A} = (A, <^A)$ eine Wohlordnung und $b \notin A$, so ist die Struktur $\big(A \cup \{b\}, <^A \cup \{(a,b) \mid a \in A\}\big)$, die man aus $\mathcal{A}$ *durch Hinzufügen von b am Ende* erhält, auch eine Wohlordnung.

(5) Wie die nächste Bemerkung zeigt sind $\mathbb{N} + \mathbb{N}$, $\mathbb{N} + \{0, 1, \ldots, k-1\}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \times \{0, 1, \ldots, k-1\}$ Wohlordnungen.

Bemerkung 2.16 *Die Summe und das Produkt von Wohlordnungen sind Wohlordnungen.*

Beweis: Seien $\mathcal{A} = (A, <^A)$ und $\mathcal{B} = (B, <^B)$ Wohlordnungen.

Summe: Sei $\mathcal{A}+\mathcal{B} = (A \cup B, <)$ (oBdA nehmen wir $A \cap B = \emptyset$ an) und sei $X \subseteq A \cup B$ nicht leer. Falls $X \cap A \neq \emptyset$, so ist das $<^A$-minimale Element von $X \cap A$ ($\mathcal{A}$ ist Wohlordnung!) auch $<$-minimales Element von X. Falls $X \cap A = \emptyset$, so $X \subseteq B$ und das $<^B$-minimale Element von X ($\mathcal{B}$ ist Wohlordnung!) ist auch $<$-minimales Element von X.

Produkt: Sei $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = (A \times B, <)$ und sei $X \subseteq A \times B$ nicht leer. Sei b_0 das $<^B$-minimale Element von

$$\{b \in B \mid \exists a \in A: \ (a,b) \in X\}$$

und a_0 das $<^A$-minimale Element von

$$\{a \in A \mid (a, b_0) \in X\}.$$

Nach Definition des Produktes ist dann (a_0, b_0) $<$-minimales Element von X. □

Definition 2.17 Sei $\mathcal{A} = (A, <)$ eine Ordnung. Eine Teilmenge $X \subseteq A$ ist ein *Anfangsstück* von $\mathcal{A}$, wenn aus

$$y \in X, \ b \in A \text{ und } b < y \text{ folgt } b \in X.$$

Wir bezeichnen dann häufig auch die Ordnung (!) $(X, < \cap (X \times X))$ als *Anfangsstück* von $\mathcal{A}$. Ein Anfangsstück X von $\mathcal{A}$ ist *echt*, wenn $X \neq A$.

Für $y \in A$ setzen wir

$$A_y := \{x \in A \mid x < y\}, \qquad <_y := < \cap (A_y \times A_y), \qquad \mathcal{A}_y = (A_y, <_y)$$

A_y bzw. $\mathcal{A}_y$ ist ein echtes Anfangsstück von $\mathcal{A}$, das *von x bestimmte Anfangsstück von* $\mathcal{A}$.

Beispiele 2.18 (1) In $(\mathbb{N}, <_\mathbb{N})$ ist $\mathbb{N}_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ für $k \in \mathbb{N}$.

(2) Für $s \in \mathbb{R}$ ist $\mathbb{R}_s =]-\infty, s[$. Das Intervall $]-\infty, s]$ ist ein Anfangsstück von $\mathbb{R}$, das nicht die Gestalt $\mathbb{R}_t$ für ein $t \in \mathbb{R}$ hat.

(3) In $(\mathbb{Q}, <_\mathbb{Q})$ ist $\{q \in \mathbb{Q} \mid q < 0 \text{ oder } q^2 < 2\}$ ein Anfangsstück, das nicht die Gestalt $\mathbb{Q}_p$ für ein $p \in \mathbb{Q}$ hat.

Bemerkung 2.19 *Jedes echte Anfangsstück einer Wohlordnung $\mathcal{A}$ hat die Gestalt A_y für ein $y \in X$.*

Beweis: Sei X ein echtes Anfangsstück von $\mathcal{A}$. Dann ist $A \setminus X \neq \emptyset$ und somit hat $A \setminus X$ ein $<$-minimales Element y. Dann ist $X = A_y$. $\square$

Lemma 2.20 *Sei $(A, <)$ eine Wohlordnung und sei $f : A \to A$* streng monoton, *d.h.*

$$\textit{aus } x < y \textit{ folge } f(x) < f(y),$$

so $x \leq f(x)$ für alle $x \in A$.

Beweis: Sonst ist $X := \{y \in A \mid f(y) < y\}$ nicht leer und enthält somit ein $<$-minmales Element y_0. Wegen $f(y_0) < y_0$ gilt nach Voraussetzung $f(f(y_0)) < f(y_0)$. Somit $f(y_0) \in X$, was "y_0 ist $<$-minimal in X" widerspricht.

Satz 2.21 *(1) Der einzige Automorphismus einer Wohlordnung ist die Identität.*

(2) Zwischen zwei Wohlordnungen gibt es höchstens einen Isomorphismus.

(3) Keine Wohlordnung ist zu einem echten Anfangsstück isomorph.

Beweis: (1) Ist $\mathcal{A}$ eine Wohlordnung und $f : \mathcal{A} \cong \mathcal{A}$, so auch $f^{-1} : \mathcal{A} \cong \mathcal{A}$. Nach dem vorangehenden Lemma gilt somit $x \leq f(x)$ und $f(x) \leq f^{-1}(f(x))$ $(= x)$. Somit $f(x) = x$.

(2) Seien $\mathcal{A} = (A, <^A)$ und $\mathcal{B} = (B, <^B)$ Wohlordnungen und $f : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ und $g : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$. Dann ist $g^{-1} \circ f : \mathcal{B} \cong \mathcal{A}$. Nach (1) ist daher $g^{-1} \circ f$ die Identität, also $f = g$.

(3) Nach Bem. 2.19 hat jedes echte Anfangsstück von $\mathcal{A}$ die Gestalt $\mathcal{A}_x$ für ein $x \in A$. Wäre $f : \mathcal{A} \cong \mathcal{A}_x$, so wäre $f(x) \in A_x$, also $f(x) < x$. Da $f : A \to A$ (!) streng monton ist, steht dies im Widerspruch zum vorangehenden Lemma. $\square$

Satz 2.22 (Vergleichbarkeit von Wohlordnungen) *Seien $\mathcal{A} = (A, <^A)$ und $\mathcal{B} = (B, <^B)$ Wohlordnungen. Dann gilt genau eine der folgenden Aussagen:*

– *$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind isomorph.*

– *$\mathcal{A}$ ist zu einem echten Anfangsstück von $\mathcal{B}$ isomorph.*

– *$\mathcal{B}$ ist zu einem echten Anfangsstück von $\mathcal{A}$ isomorph.*

Dabei ist der zugehörige Isomorphismus stets eindeutig bestimmt.

Beweis: Dass der zugehörige Isomorphismus stets eindeutig bestimmt ist und dass sich die drei Aussagen gegenseitig ausschließen, ergibt sich aus dem vorangehenden Satz: Ist etwa $f : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ und $g : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}_y$ für ein $y \in B$, so ist $g \circ f^{-1}$ ein Isomorphismus von $\mathcal{B}$ auf das Anfangsstück $\mathcal{B}_y$.

Dass mindestens eine der drei Aussagen zutrifft ergibt sich folgendermaßen: Sei

$$f := \{(x, y) \in A \times B \mid \mathcal{A}_x \cong \mathcal{B}_y\}.$$

Behauptung 1: Seien $(x, y), (x, y') \in f$. Dann ist $y = y'$.

Beweis der Behauptung 1: Nach Voraussetzung ist $\mathcal{A}_x \cong \mathcal{B}_y$ und $\mathcal{A}_x \cong \mathcal{B}_{y'}$, also $\mathcal{B}_y \cong \mathcal{B}_{y'}$. Wäre etwa $y' < y$, so wäre $\mathcal{B}_y$ zu seinem echten Anfangsstück $(\mathcal{B}_y)_{y'}$ $(= \mathcal{B}_{y'})$ isomorph, ein Widerspruch zum vorangehenden Satz. $\dashv$

Entsprechend zeigt man die Behauptung 2:

Behauptung 2: Seien $(x, y), (x', y) \in f$. Dann ist $x = x'$.

Behauptung 3: Sei $(x, y) \in f$. Ist $x' < x$, so gibt es ein $y' < y$ mit $(x', y') \in f$. Ist $y' < y$, so gibt es ein $x' < x$ mit $(x', y') \in f$.

Beweis der Behauptung 3: Nach Definition von f gibt es g mit $g : \mathcal{A}_x \cong \mathcal{B}_y$. Sei nun $x' < x$ und $y' := g(x')$. Dann ist die Restriktion von g auf $A_{x'}$ ein Isomorphismus zwischen $\mathcal{A}_{x'}$ und $\mathcal{B}_{y'}$. Also $(x', y') \in f$. Die zweite Behauptung wird entsprechend bewiesen. $\dashv$

Wir setzen

$$D := \{x \in A \mid \exists y\ (x, y) \in f\} \quad \text{und} \quad R := \{y \in B \mid \exists x\ (x, y) \in f\}.$$

Wegen Behauptung 3 sind D und R Anfangsstücke von $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$. Wegen der Behauptungen 1–3 ist f ein Isomorphismus zwischen diesen Anfangsstücken. Wenn $A = D$ oder $B = R$, so ist damit die Behauptung des Satzes bewiesen. Wären D und R echte Anfangsstücke von A bzw. B, etwa $D = A_x$ und $R = B_y$ (vgl. Bem. 2.19), so wäre $f : \mathcal{A}_x \cong \mathcal{B}_y$ und damit $(x, y) \in f$, im Widerspruch zu $x \notin A_x = D$. $\square$

Satz 2.23 (Induktion in Wohlordnungen) *Sei $\mathcal{A}$ eine Wohlordnung und $X \subseteq A$. Wenn für alle $y \in A$*

$$\textit{aus } A_y \subseteq X \textit{ folgt } y \in X,$$

so $X = A$.

Beweis: Ansonsten wählen wir ein $<$-minimales Element $x \in A \setminus X$. Dann ist $A_x \subseteq X$ und somit nach Voraussetzung $x \in A$, ein Widerspruch. $\square$

Ordinalzahlen

Definition 2.24 Eine Menge A ist *transitiv*, wenn aus $x \in A$ folgt $x \subseteq A$ (wenn also aus $x \in A$ und $y \in x$ sich $y \in A$ ergibt).

Insbesondere ist jedes Element einer transitiven Menge selbst eine Menge.

Bemerkung 2.25 *(1) $\emptyset$ ist transitiv.*

(2) Ist x transitiv und $y \subseteq x$, so ist $x \cup \{y\}$ transitiv. Insbesondere ist $x \cup \{x\}$ transitiv.

(3) Sind x und y transitiv, so auch $x \cap y$ und $x \cup y$; allgemeiner: Ist A eine nicht leere Menge von transitiven Mengen, so sind $\bigcap A$ und $\bigcup A$ transitiv.

Beweis: Der einfache Beweis wird dem Leser als Übung überlassen. □

Definition 2.26 Eine Menge A ist eine *Ordinalzahl*, wenn A transitiv ist und $\in_A := \{(x, y) \mid x, y \in A \text{ und } x \in y\}$ eine Wohlordnung auf A ist.

In der Regel bezeichnen wir Ordinalzahlen mit kleinen Buchstaben vom Anfang des griechischen Alphabets $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. Statt $\in_\alpha$ schreiben wir häufig auch einfach $\in$.

Beispiel 2.27 $\emptyset$ is eine Ordinahlzahl, die wir auch mit $\bar{0}$ bezeichnen.

Bemerkung 2.28 *(1) Ist $\alpha \neq \emptyset$ eine Ordinahlzahl, so ist $\emptyset \in \alpha$ und $\emptyset$ ist das $\in_\alpha$-minimale Element von α.*

(2) Ist α eine Ordinahlzahl, so $\alpha \notin \alpha$.

(3) Ist α eine Ordinahlzahl, so auch $\alpha \cup \{\alpha\}$. Wir schreiben auch $\alpha + 1$ für $\alpha \cup \{\alpha\}$.

(4) Sind α und β Ordinahlzahl, so ist $\alpha \cap \beta$ eine Ordinahlzahl; allgemeiner: Ist X eine nicht leere Menge von Ordinalzahlen, so ist $\bigcap X$ eine Ordinahlzahl.

Beweis: (1) Wegen $\alpha \neq \emptyset$ besitzt α ein $\in_\alpha$-minimale Element, etwa x. Wäre $x \neq \emptyset$, etwa $y \in x$, so wäre $y \in \alpha$ (wegen der Transitivität von α) und damit $y \in_\alpha x$ im Widerspruch zur Minimalität von x.

(2) Wäre $\alpha \in \alpha$, so hätte die Teilmenge $\{\alpha\}$ von α kein $\in_\alpha$-minimales Element.

(3) Mit α ist auch $\alpha \cup \{\alpha\}$ transitiv (vgl. Bem. 2.25(2)). Es gilt $\in_{\alpha \cup \{\alpha\}} = \in_\alpha \cup \{(x, \alpha) \mid x \in \alpha\}$. Denn aus der Definition von $\in_{\alpha \cup \{\alpha\}}$ ergibt sich $\in_\alpha \cup \{(x, \alpha) \mid x \in \alpha\} \subseteq \in_{\alpha \cup \{\alpha\}}$. Falls $\in_\alpha \cup \{(x, \alpha) \mid x \in \alpha\} \subset \in_{\alpha \cup \{\alpha\}}$, so $(\alpha, x) \in \in_{\alpha \cup \{\alpha\}}$ für ein $x \in \alpha \cup \{\alpha\}$. Insbesondere $\alpha \in x$. Weiterhin ist $x \neq \alpha$, da sonst $\alpha \in \alpha$ im Widerspruch zu (2). Also ist $x \in \alpha$. Dann ergibt aber die Transitivität von α wiederum $\alpha \in \alpha$.

Somit erhalten wir $\left(\alpha \cup \{\alpha\}, \in_{\alpha \cup \{\alpha\}}\right)$ durch Hinzufügen des Elemetes α an das Ende der Wohlordnung $(\alpha, \in_\alpha)$. Nach Übung 2.15(4) ist auch $\alpha \cup \{\alpha\}$ eine Wohlordnung und damit insgesamt eine Ordinalzahl.

(4) Sei X eine nicht leere Menge von Ordinalzahlen, etwa $\alpha \in X$. Wegen Bem. 2.25(3) ist $\bigcap X$ transitiv. Da $\bigcap X \subseteq \alpha$, gilt $\in_{\bigcap X} = \in_\alpha \cap (\bigcap X \times \bigcap X)$ und daher ist $\in_{\bigcap X}$ eine Wohlordnung auf $\bigcap X$ (vgl. Übung 2.15(3)). $\square$

Beispiel 2.29 Wir haben $\emptyset + 1 = \{\emptyset\}$, $(\emptyset + 1) + 1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots$ Wir bezeichnen diese Ordinahlzahl auch durch $\bar{1}$, $\bar{2}, \ldots$ Allgemein definieren wir für $n \in \mathbb{N}$ die Ordinahlzahl $\bar{n}$ durch

$$\bar{0} := \emptyset \qquad \text{und} \qquad \overline{n+1} := \bar{n} + 1.$$

Somit ist

$$\bar{n} = \{\bar{0}, \ldots, \overline{n-1}\,\}.$$

Bemerkung 2.30 *(1) Ist α eine Ordinahlzahl und $x \in \alpha$, so ist x eine Ordinahlzahl. Somit $\alpha = \{\beta \text{ Ordinahlzahl } \mid \beta \in \alpha\}$.*

(2) Sind α und β Ordinahlzahlen, so

$$\alpha \subset \beta \iff \alpha \in \beta.$$

Beweis: (1) Sei α eine Ordinahlzahl und $x \in \alpha$ und somit (α ist transitiv!) $x \subseteq \alpha$. Dann ist $\in_x = \in_\alpha \cap (x \times x)$ und daher ist $\in_x$ eine Wohlordnung auf x (vgl. Übung 2.15(3)).

x transitiv: Ist $y \in x$ und $z \in y$, so ist $y \in \alpha$ und damt $y \subseteq \alpha$, insbesondere $z \in \alpha$. Da $\in_\alpha$ eine Ordnung auf α ist, gilt $z \in x$.

(2) Die Richtung $\Leftarrow$ gilt wegen der Transitivität von α und Teil(2) der vorangehenden Bemerkung. Sei nun $\alpha \subset \beta$ und γ das $\in_\beta$-minimale Element von $\beta \setminus \alpha$, insbesondere $\gamma \in \beta$. Wir zeigen $\alpha = \gamma$ und damit die Behauptung. Ist $\delta \in \gamma$, so $\delta \in \beta$ (Transitivität von β!) und somit $\delta \in \alpha$ (da γ das $\in_\beta$-minimale Element von $\beta \setminus \alpha$ ist). Somit $\gamma \subseteq \alpha$. Wäre $\delta \in \alpha \setminus \gamma$, so wäre $\delta = \gamma$ oder $\gamma \in \delta$ (da $\in_\beta$ eine Ordnung ist, $\delta, \gamma \in \beta$, und $\delta \notin \gamma$). In beiden Fällen ergibt sich (mit der Transitivität von α im zweiten Fall), dass $\gamma \in \alpha$, ein Widerspruch. $\square$

Definition 2.31 Für Ordinahlzahl α und β schreiben wir $\alpha < \beta$, wenn $\alpha \in \beta$. Weiterhin bedeute $\alpha \leq \beta$, dass $\alpha < \beta$ oder $\alpha = \beta$.

Somit sind nach der vorangehenden Bemerkung die folgenden Aussagen für Ordinahlzahl α und β äquivalent:

- $\alpha < \beta$
- $\alpha \in \beta$
- $\alpha \subset \beta$

Insbesondere gilt

$$\alpha = \{\beta \mid \beta < \alpha\}$$

Weiterhin ergibt die vorangehende Bemerkung:

Bemerkung 2.32 *Ist $\beta < \alpha$, so ist β das durch β bestimmte Anfangsstück von α, also $\beta = \{\gamma \in \alpha \mid \gamma < \beta\}$.*

Lemma 2.33 *Sind α und β Ordinahlzahl mit $\alpha \cong \beta$ (genauer: $(\alpha, \in_\alpha) \cong (\beta, \in_\beta)$), so $\alpha = \beta$.*

Beweis: Sei $f : (\alpha, \in_\alpha) \cong (\beta, \in_\beta)$. Wir zeigen

$$\text{für alle } \gamma \in \alpha\text{: } f(\gamma) = \gamma. \tag{2}$$

Dann ist $\beta = \{f(\gamma) \mid \gamma \in \alpha\} = \{\gamma \mid \gamma \in \alpha\} = \alpha$. Wir nehmen an, dass (2) nicht gilt. Dann enthält die Menge $\{\gamma \in \alpha \mid f(\gamma) \neq \gamma\}$ ein $<$-minimales Element γ_0. Daher gilt für $\delta < \beta$

$$\begin{aligned} \delta < f(\gamma_0) \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{es gibt } \gamma < \gamma_0 \text{ mit } f(\gamma) = \delta \\ &\Longleftrightarrow \quad \text{es gibt } \gamma < \gamma_0 \text{ mit } \gamma = \delta. \end{aligned}$$

Somit $f(\gamma_0) = \{\delta \in \beta \mid \delta < f(\gamma_0)\} = \{\gamma \mid \gamma < \gamma_0\} = \gamma_0$, ein Widerspruch. □

Satz 2.34 *(1) Für Ordinahlzahl α, β und γ gilt:*

(a) Irreflexivität) $\alpha \not< \alpha$.

(b) Transivität) Wenn $\alpha < \beta$ und $\beta < \gamma$, so $\alpha < \gamma$

(c) Konnexität) $\alpha < \beta$ oder $\alpha = \beta$ oder $\beta < \alpha$.

(2) Eine nicht leere Menge von Ordinalzahlen enthält ein $<$-minimales Element.
Wegen (1) und (2) ist jede transitive Menge von Ordinlzahlen eine Ordinalzhl.

Beweis: (1)(a) haben wir bereits in Bem. 2.28(2) gezeigt.

(1)(b) Wenn $\alpha \in \beta$ und $\beta \in \gamma$, so $\alpha \in \gamma$ wegen der Transivität von γ.

(1)(c) Wir wenden Satz 2.22 an: Ist $\alpha \cong \beta$, so $\alpha = \beta$ nach dem vorangehenden Lemma. Ist $\alpha \cong \beta_\gamma$ mit $\gamma \in \beta$, so $\beta_\gamma = \gamma$ (nach Bemerkung 2.32) und damit $\alpha = \gamma < \beta$. Entsprechend schließen wir, wenn β zu einem echten Anfangsstüch von α isomorph ist.

(2) Sei X eine nicht leere Menge von Ordinalzahlen und $\alpha \in X$. Ist $X \cap \alpha = \emptyset$, so ist α das $<$-minimale Element von X. Falls $X \cap \alpha \neq \emptyset$, so enthält $X \cap \alpha$ als Teilmenge von α ein $<$-minimales Element β. Dieses ist auch $<$-minimales Element von X: Wäre $\gamma \in X$ und $\gamma < \beta$, so $\gamma \in \alpha$ (wegen der Transitivität von α und $\beta \in \alpha$). Somit wäre $\gamma \in X \cap \alpha$ im Widerspruch zur $<$-Minimalität von β in $X \cap \alpha$. □

Satz 2.35 *Jede Wohlordnung ist zu genau einer Ordinalzahl isomorph.*

Beweis: Sei $\mathcal{A} = (A, <^A)$ eine Wohlordnung. Wäre $\mathcal{A}$ zu verschiedenen Ordinalzahlen α und β isomorph, so $\alpha \cong \beta$ und damit $\alpha = \beta$ (vgl. Lemma 2.33).

Es bleibt die Existenz einer zu $\mathcal{A}$ isomorphen Ordinalzahl zu zeigen. Sei hierzu

$$B := \{b \in A \mid \text{das Anfangsstück } \mathcal{A}_b \text{ ist zu einer Ordinahlzahl isomorph}\}.$$

Man sieht leicht ein, dass B ein Anfangsabschnitt von A ist. Zu jedem $b \in B$ gibt es nach dem bereits Bewiesenen eine eindeutig bestimmte zu $\mathcal{A}_b$ isomorphe Ordinahlzahl $\alpha(b)$. Wir setzen

$$X := \{\alpha(b) \mid b \in B\}.$$

Somit ist X eine Menge von Ordinahlzahlen, ja X ist sogar eine Ordinahlzahl. Hierzu müssen wir (wegen Satz 2.34) nur zeigen, dass X transitiv ist: Sei $\alpha(b) \in X$ und $\beta \in \alpha(b)$. Gelte $f : \mathcal{A}_b \cong \alpha(b)$ und sei $c := f^{-1}(\beta)$. Dann ist $f : (\mathcal{A}_b)_c \cong (\alpha(b))_\beta$. Wegen $(\mathcal{A}_b)_c = \mathcal{A}_c$ und $(\alpha(b))_\beta = \beta$ ist $f : \mathcal{A}_c \cong \beta$.

Insgesamt zeigt dies, dass die Zuordnung $g : b \mapsto \alpha_b$ ein Isomorphismus von B auf die Ordinalzahl X ist. Ist also $B = A$, so sind wir fertig. Wäre nun $B \neq A$, so wäre $B = A_d$ für ein geeignetes $d \in A$ und da B nach dem gerade Bewiesenen zur Ordinalzahl X isomorph ist, wäre $d \in B = A_d$, ein Widerspruch. □

Satz 2.36 *Die Klasse der Ordinahlzahlen ist keine Menge.*

Beweis: Sei X die Klasse der Ordinalzahlen. Wäre X eine Menge, so wäre X nach Satz 2.34 eine Ordinahlzahl. Somit $X \in X$, im Widerspruch zu Satz 2.34(1)(a). □

Definition 2.37 Sei X eine Menge von Ordinahlzahln und β eine Ordinahlzahl.

- β ist *untere Schranke von* X, wenn $\beta \leq \alpha$ für alle $\alpha \in X$.
- β ist *obere Schranke von* X, wenn $\alpha \leq \beta$ für alle $\alpha \in X$.

Bemerkung 2.38 *Sei X eine nicht leere Menge von Ordinahlzahlen. Dann:*

(1) $\bigcap X$ und $\bigcup X$ sind Ordinalzahlen.

(2) $\bigcup X$ ist obere Schranke von X; ist β eine obere Schranke von X, so ist $\bigcup X \leq \beta$. Somit ist $\bigcup X$ die kleinste obere Schranke von X; wir sprechen vom Supremum *von X und bezeichnen $\bigcup X$ auch mit* $\sup X$.

(3) $\bigcap X$ ist untere Schranke von X; ist β eine untere Schranke von X, so ist $\beta \leq \bigcap X$. Somit ist $\bigcap X$ die größte untere Schranke von X; wir sprechen vom Infimum *von X und bezeichnen $\bigcap X$ auch mit* $\inf X$.

(4) $\inf X \ (= \bigcap X) \ \in X$.

Beweis: (1) Wir wissen bereits, dass $\bigcap X$ eine Ordinahlzahl ist (vgl. Bem. 2.28(3)) und dass $\bigcup X$ transitiv ist (vgl. Bem. 2.25(3)). Als Menge von Ordinahlzahlen wird $\bigcup X$ durch $\in_{\bigcup X}$ wohlgeordnet (vgl. Satz 2.34). Somit ist $\bigcup X$ eine Ordinahlzahl.

(2) Sei β eine untere Schranke von X. Für jedes $\alpha \in X$ gilt somit $\alpha \subseteq \beta$ und daher $\bigcup X \subseteq \beta$. Daher $\bigcup X \leq \beta$.

(3) und (4) Sei β eine untere Schranke von X und sei α das $<$-minimale Element von X. Wir zeigen $\alpha = \bigcap X$, woraus sich die Behauptungen ergeben. Wegen $\alpha \in X$ gilt $\bigcap X \subseteq \alpha$. Für alle $\gamma \in X$ gilt $\alpha \leq \gamma$, daher $\alpha \subseteq \gamma$ und somit $\alpha \subseteq \bigcap X$.

$\square$

3 Das Axiomensystem NBG

Mit dem *Allgemeinen Komprehensionsprinzip*

> Zu jeder Eigenschaft E von Mengen ist
>
> $$\{x \mid x \text{ Menge und } E \text{ trifft auf } x \text{ zu}\}$$
>
> eine Menge.

bilden wir die Menge

$$y := \{x \mid x \text{ Menge und } x \notin x\}$$

und erhalten den Widerspruch

$$y \in y \iff y \notin y.$$

Gesamtheiten wie

$$\{x \mid x \text{ Menge und } E \text{ trifft auf } x \text{ zu}\}$$

nennen wir *Klassen*. Wir führen ein Axiomensystem für Klassen ein.

Die Axiome von NBG. Wir beschäftigen uns mit einem Universum von Objekten, die wir als *Klassen* bezeichnen. Im folgenden stehen $A, B, C, \ldots$ für Klassen. Die Klassen stehen zueinander über die (zweistellige) *Enthaltenseinsrelation* $\in$ in Beziehung. Gilt $A \in B$, so sagen wir, dass A *ein Element von* B *ist.* Wir definieren:

Definition 3.1 Eine Klasse A ist eine *Menge*, wenn eine Klasse B mit $A \in B$ existiert.

Somit:

Bemerkung 3.2 *(1) Jede Menge ist eine Klasse.*

(2) Jede Klasse enthält nur Mengen als Elemente.

Im folgenden stehen $a, b, c, \ldots, x, y, z$ für Mengen.

(Ext) Extensionalitätsaxiom: Zwei Klassen sind genau dann gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten.

Da wegen der vorangehenden Definition die Elemente von Klassen stets Mengen sind, können wir das Extensionalitätsaxiom auch so formulieren:

> Zwei Klassen sind genau dann gleich, wenn sie die gleichen Mengen als Elemente enthalten.

und formaler:

$$\forall A \forall B (A = B \leftrightarrow \forall z (z \in A \leftrightarrow z \in B))$$

(Komp) Komprehensionsaxiom: Für jede Eigenschaft E von Mengen gibt es eine Klasse, die genau diejenigen Mengen als Elemente enthält, auf die Eigenschaft E zutrifft.

Eine solche Klasse ist wegen (Ext) eindeutig bestimmt und wird durch

$$\{x \mid E \text{ trifft auf } x \text{ zu}\}$$

oder kurz durch

$$\{x \mid Ex\}$$

bezeichnet.

Bemerkung 3.3 *Die Klasse* $\{x \mid x \notin x\}$ *ist keine Menge (sie ist eine* echte Klasse*).*

Beweis: Wäre nämlich $\{x \mid x \notin x\}$ eine Menge, so hätten wir für $y := \{x \mid x \notin x\}$

$$y \in y \iff y \notin y,$$

ein Widerspruch □

Aus (Komp) (und (Ext)) folgt die Existenz der (eindeutig bestimmten) *Allklasse*

$$V := \{x \mid x = x\}.$$

Bemerkung 3.4 *A ist eine Menge gdw $A \in V$.*

Aus (Komp) folgt auch die Existenz der *leeren Klasse*

$$\emptyset := \{x \mid x \neq x\}.$$

Definition 3.5 Seien A, B Klassen. Dann ist A *Teilklasse* von B, wenn

$$\forall x(x \in A \to x \in B).$$

Wir schreiben dann $A \subseteq B$.

Bemerkung 3.6 *Seien A und B Klassen. Mit (Komp) erhalten wir die Klassen*

$$\begin{array}{rcll} A \cap B & := & \{x \mid x \in A \textit{ und } x \in B\} & \textit{den} \text{ Durchschnitt von } A \text{ und } B \\ A \cup B & := & \{x \mid x \in A \textit{ oder } x \in B\} & \textit{die} \text{ Vereinigung von } A \text{ und } B \\ \bigcap A & := & \{x \mid \forall y \in A: \ x \in y\} & \textit{den} \text{ Durchschnitt von } A \\ \bigcup A & := & \{x \mid \exists y \in A: \ x \in y\} & \textit{die} \text{ Vereinigung von } A. \end{array}$$

Unmittelbar aus der Definition erhält man:

Bemerkung 3.7 *(1) Ist $z \in A$, so $\bigcap A \subseteq z \subseteq \bigcup A$.*

(2) $\bigcap \emptyset = V$ und $\bigcup \emptyset = \emptyset$.

Klassen und Eigenschaften entsprechen sich:

– Zu jeder Eigenschaft E gibt es nach (Komp) die Klasse $\{x \mid E$ trifft auf x zu$\}$.

– Zu jeder Klasse A gilt für die Eigenschaft "$x \in A$", dass $A = \{x \mid x \in A\}$.

(Null) NULLMENGENAXIOM: $\emptyset \in V$ (d.h. die leere Klasse ist eine Menge).

(Paar) PAARMENGENAXIOM: Für alle Mengen a und b gilt $\{x \mid x = a$ oder $x = b\} \in V$.

Wir bezeichnen diese Klasse mit $\{a, b\}$. Für $\{a, a\}$ schreiben wir auch $\{a\}$.

(Ver) VEREINIGUNGSMENGENAXIOM: Für alle Mengen a gilt $\bigcup a \in V$.

(Pot) POTENZMENGENAXIOM: Für alle Mengen a gilt $P(a) := \{x \mid x \subseteq a\} \in V$.

(Aus) AUSSONDERUNGSAXIOM: Für jede Menge a und jede Klasse B gilt $a \cap B \in V$.

Bemerkung 3.8 *Für jede Menge a und jede Eigenschaft E gilt*

$$\{y \in a \mid E \textit{ trifft auf } y \textit{ zu}\} \in V.$$

Für eine Menge a die Menge

$$z := \{y \in a \mid y \notin y\}$$

kein Element von a. Sonst würde ($z \in z \iff z \notin z$) gelten.

Bemerkung 3.9 *(1) Wenn $B \subseteq a$, so $B \in V$.*

(2) $V \notin V$.

Beweis: (1) Wenn $B \subseteq a$, so nach (Aus) $B = a \cap B \in V$.

(2) Wäre $V \in V$, so wegen $\{x \mid x \notin x\} \subseteq V$ nach (1): $\{x \mid x \notin x\} \in V$, im Widerspruch zu Bem. 3.3.

Definition 3.10 Eine Klasse A ist *induktiv*, wenn

– $\emptyset \in A$;

– für alle $z \in A$: $z \cup \{z\} \in A$.

Beispiel 3.11 V ist induktiv.

(Inf) UNENDLICHKEITSAXIOM: Es gibt eine induktive Menge.

Bemerkung 3.12 *Ist A eine nicht leere Klasse von induktiven Mengen, so ist $\bigcap A$ eine induktive Menge.*

Beweis: Sei $b \in A$. Dann ist $\bigcap A = b \cap \bigcap A \in V$ nach (Aus). Da jedes Element von A induktiv ist, ist auch $\bigcap A$ induktiv. $\square$

Definition 3.13 Wir setzen

$$\omega := \bigcap \{x \mid x \text{ induktiv}\}.$$

Somit $\omega \in V$.

(AC) Auswahlaxiom: Für jede Menge x paarweiser disjunkter nicht leerer Mengen gibt es eine Teilmenge u von $\bigcup x$ mit:

$$\text{für alle } y \in x\text{:} \quad u \cap y \text{ enthält genau ein Element.}$$

4 Geordnete Paare, Relationen und Funktionen

Definition 4.1 Für Mengen a, b setzen wir

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\},$$

das *geordnete Paar von a und b.*

Bemerkung 4.2 *(1) $(a, b) \in V$.*

(2) Wenn $(a, b) = (c, d)$, so $a = c$ und $b = d$.

Beweis: Sei $x = \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$. Ist $a = b$, so ist $x = \{\{a\}\}$, woraus sich mit (Ext) $\{c, d\} = \{a\}$ und weiter $a = c$ und $a = d$ ergeben.

Ist $a \neq b$, so ist $\{a, b\} = \{c, d\}$ und $\{a\} = \{c\}$, woraus sich $a = c$ und damit $b = d$ ergeben.

Definition 4.3
$$\begin{array}{rcl} (a, b, c) & := & ((a, b), c) \\ (a, b, c, d) & := & ((a, b, c), d) \\ & \vdots & \end{array}$$

Lemma 4.4 *(1) Wenn $a, b \in C$, so $(a, b) \in P(P(C))$.*

(2) Wenn $(a, b) \in C$, so $a, b \in \bigcup\bigcup C$.

Beweis: (1) Seien $a, b \in C$. Dann $\{a\}, \{a, b\} \in P(C)$ und damit $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\} \in P(P(C))$.

(2) Sei $(a, b) \in C$. Dann ist $(a, b) \subseteq C$ nach Bem. 3.7(1) und damit $\{a, b\} \in \bigcup C$ und somit (wiederum wegen Bem. 3.7(1)) $a, b \in \bigcup\bigcup C$.

Definition 4.5 Für Klassen A, B ist

$$A \times B := \{x \mid \exists a \in A \exists b \in B : \ x = (a, b)\} = \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$$

das *(direkte) Produkt* von A und B.

Bemerkung 4.6 *Für Mengen c, d gilt $c \times d \in V$.*

Beweis: Wenn $(a, b) \in c \times d$, so $a, b \in c \cup d$. Daher $(a, b) \in P(P(c \cup d))$ (nach Lemma 4.4(1)), also $c \times d \subseteq P(P(c \cup d)) \in V$ und somit $c \times d \in V$ nach (Aus). $\square$

Beispiel 4.7 Für eine Menge x gilt $\in_x := \{(y, z) \mid y, z \in x \text{ und } y \in z\} \in V$ (da $\in_x \subseteq x \times x$) und somit $(x, \in_x) \in V$. Daher können wir die Klasse

$$\begin{aligned} \mathrm{Ord} :&= \{x \mid x \text{ transitiv und } (x, \in_x) \text{ ist Wohlordnung}\} \\ &= \{x \mid x \text{ ist Ordinalzahl}\} \end{aligned}$$

der Ordinalzahlen bilden.

Relationen

Definition 4.8 (1) Eine Klasse R ist eine (zweistellige) *Relation*, wenn $R \subseteq V \times V$. Statt $(x, y) \in R$ schreiben wir dann gelegentlich auch xRy.

(2) Eine Klasse F ist eine *Funktion*, wenn

– F eine Relation ist und

– aus $(x, y_1) \in F$ und $(x, y_2) \in F$ folgt $y_1 = y_2$.

Statt $(x, y) \in F$ schreiben wir dann auch $F(x) = y$.

Ist R eine Klasse, so sei

$$\begin{array}{rcll} D(R) & := & \{x \mid \exists y : \ (x,y) \in R\} & \text{der } \textit{Definitionsbereich} \text{ von } R \\ W(R) & := & \{y \mid \exists x : \ (x,y) \in R\} & \text{der } \textit{Wertebereich} \text{ von } R \\ \mathrm{Fld}(R) & := & D(R) \cup W(R) & \text{das } \textit{Feld} \text{ von } R \\ R^{-1} & := & \{(y,x) \mid (x,y) \in R\} & \text{das } \textit{Inverse} \text{ von } R \end{array}$$

Isr S eine zusätzliche Klasse, so ist

$$R \circ S := \{(x, z) \mid \exists y((x, y) \in S \text{ und } (y, z) \in R\} \quad \text{die } \textit{Verkettung} \text{ von } R \text{ und } S.$$

Sind F, A, B Klassen, so steht

$$F : A \to B \qquad \text{für} \qquad F \text{ Funktion, } D(F) = A \text{ und } W(F) \subseteq B.$$

“$F : A \to B$ injektiv,” “$F : A \to B$ surjektiv” und “$F : A \to B$ bijektiv” haben die naheliegenden Bedeutungen.

Bemerkung 4.9 *Für eine Relation R sind äquivalent:*

(i) $R \in V$.

(ii) $D(R), W(R) \in V$.

(iii) *Fld*$(R) \in V$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $R \in V$. Dann ist

$$D(R) = \{x \mid \exists y : \ (x, y) \in R\} \overset{\text{Lem 4.4}}{=} \{x \in \bigcup\bigcup R \mid \exists y : \ (x, y) \in R\} \overset{\text{(Aus)}}{\in} V.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): $\mathrm{Fld}(R) = D(R) \cup W(R) \overset{\text{nach (ii)}}{\in} V$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): $R \subseteq \mathrm{Fld}(R) \times \mathrm{Fld}(R) \overset{\text{nach (iii)}}{\in} V$. Mit (Aus) erhallten wir $R \in V$. $\square$

Folgerung 4.10 *Für Relationen r, s: $r \circ s,\ r^{-1} \in V$.*

Beweis: $r \circ s \in D(s) \times W(r) \in V$ und $r^{-1} \in W(r) \times D(r) \in V$. □

Eine Relation R ist eine *Äquivalenzrelation*, wenn R reflexiv auf Fld(R), symmetrisch und transitiv ist.

Beispiele 4.11 (1) $\sim := \{(x, y) \mid \exists f\ f : x \to y$ bijektiv $\}$ ist eine Äquivalenzrelation mit $\mathrm{Fld}(\sim) = V$.

(2) $\cong_{\mathrm{WO}} := \{((x, r), (y, s)) \mid (x, r), (y, s)$ Wohlordungen und $(x, r) \cong (y, s)\}$ ist eine Äquivalenzrelation. Es sind $\mathrm{Fld}(\cong_{\mathrm{WO}})$ und damit $\cong_{\mathrm{WO}}$ echte Klassen. Wäre nämlich $\mathrm{Fld}(\cong_{\mathrm{WO}}) \in V$, so wäre (da $(\alpha, \in_\alpha) \in \mathrm{Fld}(\cong_{\mathrm{WO}})$ für jede Ordinahlzahl α) Ord $= \{x \in \bigcup\bigcup \mathrm{Fld}(\cong_{\mathrm{WO}}) \mid x$ Ordinahlzahl$\} \in V$, ein Widerspruch zu Satz 2.36.

Definition 4.12 Sei R eine Äquivalenzrelation. Dann bezeichne für $w \in \mathrm{Fld}(R)$

$$\bar{w}^R := \{x \mid wRx\}$$

die *Äquivalenzklasse* von w (bei R).

Eine Klasse T ist eine *Repräsentantensystem* (von R), wenn

– $T \subseteq \mathrm{Fld}(R)$

– $\forall w \in \mathrm{Fld}(R)$: $\bar{w}^R \cap T$ ist einelementig.

Beispiel 4.13 Sei $w \neq \emptyset$ und $\sim$ wie in Beispiel 4.11. Dann ist $\bar{w}^\sim$ eine echte Klasse.

Beweis: Sei etwa $a \in w$. Für jede Menge y ist $w \sim w \times \{y\}$ (via $z \mapsto (z, y)$). Somit $w \times \{y\} \in \bar{w}^\sim$ und daher $(a, y) \in \bigcup \bar{w}^\sim$ und $y \in \bigcup\bigcup\bigcup \bar{w}^\sim$. Also $\bigcup\bigcup\bigcup \bar{w}^\sim = V$, somit $\bar{w}^\sim \notin V$.

Bemerkung 4.14 *Sei R eine Äquivalenzrelation auf a. Dann:*

(1) Für alle $w \in a$: $\bar{w}^R \in V$.

(2) $a/R \in V$, wobei $a/R := \{\bar{w}^R \mid w \in a\}$, die Menge der Äquivalenzklassen *oder die* Faktormenge *von a nach R ist.*

(3) Es gibt ein Repräsentantensystem und jedes Repräsentantensystem ist eine Menge.

Beweis: (1),(2): Nach (Aus) da $\bar{w}^R \subseteq a$ und $a/R \subseteq P(a)$.

(3) Ist T ein Repräsentantensystem, so $T \subseteq a$ und somit $T \in V$. Da $w \in \bar{w}^R$ für jedes $w \in a$, ist a/R eine Menge paarweise disjunkter nicht leerer Mengen; nach (AC) gibt es eine "Auswahlmenge;" jede solche Auswahlmenge ist ein Repräsentantensystem. □

Beispiel 4.15 Ord genauer $\{(\alpha, \in_\alpha) \mid \alpha \in \mathrm{Ord}\}$ ist ein Repräsentantensystem für $\cong_{\mathrm{WO}}$ (wegen Satz 2.35).

Funktionen

Beispiele 4.16 Die folgenden Klassen sind Funktionen; für F_+ und $F_\cdot$ ergibt sich dies aus Satz 2.35.

$$
\begin{array}{rll}
S & := \{(\alpha, \alpha \cup \{\alpha\} \mid \alpha \in \text{ Ord}\}. & \\
F_+ & := \{((\alpha,\beta),\gamma) \mid \alpha,\beta,\gamma \in \text{ Ord}, (\alpha,\in_\alpha)+(\beta,\in_\beta) \cong (\gamma,\in_\gamma)\} & \text{die Addition von OZ.} \\
F_\cdot & := \{((\alpha,\beta),\gamma) \mid \alpha,\beta,\gamma \in \text{ Ord}, (\alpha,\in_\alpha)\cdot(\beta,\in_\beta) \cong (\gamma,\in_\gamma)\} & \text{die Mult. von OZ.}
\end{array}
$$

Somit $S(\alpha) = \alpha + 1$. Statt $((\alpha,\beta),\gamma) \in F_+$ und $((\alpha,\beta),\gamma) \in F_\cdot$ schreiben wir auch

$$\alpha + \beta = \gamma \qquad \text{bzw.} \qquad \alpha \cdot \beta = \gamma.$$

Übung 4.17 Man zeige:

(1) S, F_+ und $F_\cdot$ sind echte Klassen.

(2) Für alle Ordinalzahlen α: $\alpha + 1 = \alpha + \bar{1}$

Definition 4.18 Ist R eine Relation und A eine Klasse, so sind die Klassen

$$R \restriction A := \{(x,y) \mid (x,y) \in R \text{ und } x \in A\}$$
$$R[A] := \{y \mid \exists x \in A : \ (x,y) \in R\}$$

die *Restriktion von R auf A* bzw. die *Bildklasse von A unter R*.

Das Axiomensystem NBG umfasst noch ein weiteres Axiom.

(Ers) Ersetzungsaxiom. Für jede Funktion F und Menge a ist $F[a]$ eine Menge.

Bemerkung 4.19 *(1) Ist F eine Funktion und $a \in V$, so ist $F \restriction a \in V$.*

(2) Ist F eine Funktion und $D(F) \in V$, so ist $F \in V$.

Beweis: (1) Wegen $F \restriction a \subseteq a \times F[a]$ und $a \times F[a] \in V$ nach (Ers).
(2) Da $F = F \restriction D(F)$ und (1). □

Definition 4.20 Für Klassen A, B bezeichnet

$${}^A B := \{f \mid f : A \to B\}$$

die Klasse aller Funktionen von A nach B.

Bemerkung 4.21 *(1) Ist $A \notin V$, so ${}^A B = \emptyset$.*

(2) ${}^a b \in V$.

Beweis: (1) Wäre $f \in^A B$, so $A = D(f) \in V$ nach der vorangehenden Bemerkung.

(2) Ist $f \in^a b$, so $f \subseteq a \times b$, somit $f \in P(a \times b)$. Daher ${}^a b \subseteq P(a \times b)$ und damit ${}^a b \in V$ nach (Aus). $\square$

Wir beschließen diesen Abschnitt mit einer Anwendung des Auswahlaxioms.

Bemerkung 4.22 *Sei a eine Menge nicht leerer Mengen. Dann gibt es eine* Auswahlfunktion für a*, d.h. es gibt ein $f : a \to \bigcup a$ mit*

$$\forall y \in a : \ f(y) \in y.$$

Beweis: Sei

$$b := \{y \times \{y\} \mid y \in a\}.$$

Dann ist $\emptyset \notin b$ (da $\emptyset \notin a$) und die Elemente in b sind paarweise disjunkt. Nach (AC) gibt es daher ein Menge c mit

$$\text{für alle } z \in b\text{:} \quad c \cap z \text{ ist einelementig.}$$

Somit gibt es zu jedem $y \in a$ genau ein $u \in y$ mit $(u, y) \in c$. Daher ist

$$f := \{(y, u) \mid y \in a \text{ und } (u, y) \in c\}$$

eine Funktion; f ist eine Auswahlfunktion für a. $\square$

Definition 4.23 Sei a eine Menge und f eine Funktion mit $D(f) = a$. Dann ist

$$\Pi_{w \in a} f(w) := \{g \mid g \text{ Funktion, } D(g) = a \text{ und } \forall w \in a : \ g(w) \in f(w)\}$$

das Produkt der Mengen in $f[a]$.

Bemerkung 4.24 *(1)* $\Pi_{w \in a} f(w) \in V$.

(2) Wenn $f(w) = \emptyset$ für mindestens ein $w \in a$, so $\Pi_{w \in a} f(w) = \emptyset$. Sonst $\Pi_{w \in a} f(w) \neq \emptyset$.

Beweis: (1) Ist $g \in \Pi_{w \in a} f(w)$, so $D(g) = a$ und $W(g) \subseteq \bigcup\{f(w) \mid w \in a\} = \bigcup f[a] \in V$. Somit $g \subseteq a \times \bigcup f[a]$, also $g \in P(a \times \bigcup f[a])$ und daher $\Pi_{w \in a} f(w) \subseteq P(a \times \bigcup f[a])$, woraus sich mit (Aus) die Behauptung ergibt.

(2) Für jedes $g \in \Pi_{w \in a} f(w)$ gilt $g(w) \in f(w)$ für alle $w \in a$. Ist $w_0 \in a$ und $f(w_0) = \emptyset$, so ist somit $\Pi_{w \in a} f(w) = \emptyset$. Ist dagegen $f[a]$ eine Menge nicht leerer Mengen, so gibt es nach der vorangehenden Bemerkung eine Auswahlfunktion h für $f[a]$. Dann ist $h \circ f \in \Pi_{w \in a} f(w)$, da $h(f(w)) \in f(w)$ für $w \in a$. $\square$

Präzisierung des Komprehensionsaxioms. Man kann die Eigenschaften, die im Komprehensionsaxiom zugelassen werden, präzisieren bzw. beschränken auf die, die in der Sprache der ersten Stufe ausdückbar sind. Wir geben die wesentlichen Schritte an.

Das Alphabet der Sprache der ersten Stufe. Das Alphabet der Sprache L der ersten Stufe besteht aus den Zeichen:

(a) KLASSENVARIABLE. V_1, V_2,...

Die BuchstabeX, Y, Z stehen im Folgenden für Klassenvariablen.

(b) MENGENVARIABLE. v_1, v_2,...

Die Buchstabex, y, z stehen im Folgenden für Klassenvariablen.

(c) GLEICHHEITSZEICHEN. $=$

(d) ENTHALTENSEINSZEICHEN. $\in$

(e) JUNKTOREN. $\neg$ "nicht", $\wedge$ "und", $\vee$ "oder",
$\rightarrow$ "wenn – so", $\leftrightarrow$ "genau dann, wenn"

(f) QUANTOREN. $\forall$ "für alle", $\exists$ "es gibt"

(g) HILFSSYMBOLE.), (

Die Ausdrücke der Sprache der ersten Stufe. Die *Ausdrücke* (oder *Formeln*) von L sind die Zeichenreihen, die man durch endlichmalige Anwendung der folgenden Regeln erhalten kann:

(A1) Für Klassen- oder Mengenvariablen t_1, t_2 ist $t_1 = t_2$ ein Ausdruck.

(A2) Für Klassen- oder Mengenvariablen t_1, t_2 ist $t_1 \in t_2$ ein Ausdruck.

(A3) Ist φ ein Ausdruck, so auch $\neg\varphi$.

(A4) Sind φ und ψ Ausdrücke, so auch $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ und $(\varphi \leftrightarrow \psi)$.

(A5) Ist φ ein Ausdruck und x eine *Mengenvariable*, so sind $\forall x\varphi$ und $\exists x\varphi$ Ausdrücke.

Eine Mengenvariable x kommt in einem Ausdruck φ *frei* vor, wenn sie in φ an mindestens einer Stelle vorkommt, wo sie nicht im Wirkungsbereich eines Quantors $\forall x$ oder $\exists x$ steht.

Für einen Ausdruck φ schreiben wir auch $\varphi(x_1, \dots, x_s, Y_1, \dots, Y_r)$ um anzudeuten, dass in φ höchstens die Mengenvariablen $x_1, \dots, x_s$ frei vorkommen und höchstens die Klassenvariablen $Y_1, \dots, Y_r$ vorkommen.

Nun läßt sich das Komprehensionsaxiom wie folgt präzisieren:

(Komp) KOMPREHENSIONSAXIOM: Für jeden Ausdruck $\varphi(x, Y_1, \ldots, Y_s)$ und Klassen $A_1, \ldots, A_s$ gibt es *die* Klasse

$$\{a \mid \varphi(a, A_1, \ldots, A_s)\}.$$

Die folgende Tabelle zeigt, welche Formeln wir wählen können, um etwa die Klassen V, $\emptyset$, $\bigcap C$, $\bigcup C$, $P(C)$ und $b \cap C$ zu rehalten; dabei sei C eine Klasse und b eine Menge.

$$\begin{array}{rclcrl}
V & := & \{a \mid \varphi_1(a)\} & \text{für} & \varphi_1(x): & x = x \\
\emptyset & := & \{a \mid \varphi_2(a)\} & \text{für} & \varphi_2(x): & \neg x = x \\
\bigcap C & := & \{a \mid \varphi_3(a, C)\} & \text{für} & \varphi_3(x, Z): & \forall y(y \in Z \to x \in y) \\
\bigcup C & := & \{a \mid \varphi_4(a, C)\} & \text{für} & \varphi_4(x, Z): & \exists y(y \in Z \wedge x \in y) \\
P(C) & := & \{a \mid \varphi_5(a, C)\} & \text{für} & \varphi_5(x, Z): & \forall y(y \in x \to y \in Z) \\
b \cap C & := & \{a \mid \varphi_6(a, b, C)\} & \text{für} & \varphi_6(x, Y, Z): & (x \in Y \wedge x \in Z).
\end{array}$$

5 Die (mengentheoretischen) natürlichen, ganzen, rationalen, reellen und komplexen Zahlen.

Wir wissen bereits (vgl. Bem. 3.12):

Satz und Definition 5.1 $\omega := \bigcap\{x \mid x \text{ induktiv}\}$ *ist eine induktive Menge, die Menge der (mengentheoretischen)* natürlichen Zahlen*.*

Bemerkung 5.2 ω *ist eine Ordinalzahl.*

Beweis: Wir setzen
$$y := \{x \in \omega \mid x \subseteq \omega \text{ und } x \in \mathrm{Ord}\}.$$
Somit ist $y \subseteq \omega$ und y ist transitiv: Ist nämlich $x \in y$ und $z \in x$, so $z \subseteq x$ $(\subseteq \omega)$ und $z \in \mathrm{Ord}$ (beides da $x \in \mathrm{Ord}$). Somit $z \in y$. Als transitive Menge von Ordinalzahlen ist y selbst eine Ordinalzahl (vgl. Satz 2.34). Es genügt daher $\omega \subseteq y$ (und damit $\omega = y$) zu zeigen. Man weist aber leicht nach, dass y induktiv ist, woraus sich die Behauptung ergibt. □

Wegen der Induktivität von ω gilt $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots \in \omega$. Wir bezeichnen im Folgenden $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots$ durch $0, 1, 2 \ldots$ und die Buchstaben i, j, k stehen für natürliche Zahlen. So bezeichnet für eine Eigenschaft E
$$\{i \mid E(i)\}$$
die Menge
$$\{i \in \omega \mid E(i)\}$$
Wir setzen
$$' := \{(i, i \cup \{i\} \mid i \in \omega\}.$$
Da ω induktiv ist, gilt daher $' : \omega \to \omega$.

Bemerkung 5.3 $(\omega,', 0)$ *erfüllt die* Peanoaxiome*:*

(P1) Für alle i: $i' \neq 0$.

(P2) Für alle i, j: wenn $i' = j'$, so $i = j$.

(P3) (Prinzip der vollständigen Induktion) Für alle $a \subseteq \omega$ mit
$$0 \in a \text{ und für alle } k \in a\text{: } k' \in a$$
gilt $a = \omega$.

Beweis: Wegen $i \in i'$ ist (P1) klar.

(P2) Wir wissen bereits, dass für beliebige Ordinalzahlen α und β sich $\alpha = \beta$ aus $\alpha \cup \{\alpha\} = \beta \cup \{\beta\}$ ergibt.

(P3) Wenn $a \subseteq \omega$ die angegebene Eigenschaft hat, so ist a induktiv und somit $\omega \subseteq a$ (nach Definition von ω); somit ist $a = \omega$. □

(P3) (oder genauer die Definition von ω) rechtfertigt Beweise durch vollständige Induktion:

> Will man zeigen, dass alle natürliche Zahlen eine Eigenschaft E haben, so genügt der Nachweis
> $$E(0)$$
> und
> $$\text{für alle } k \text{ (wenn } E(k) \text{ so E(k'))}.$$
> Dann ist nämlich $a := \{k \mid E(k)\}$ induktiv und somit $a = \omega$.

Summe und Produkt von Ordinalzahlen hatten wir in Beisp. 4.16 definiert.

Bemerkung 5.4 *Für alle i und j gilt: $i + j \in \omega$ und $i \cdot j \in \omega$.*

Beweis: Sei $i \in \omega$. Wir zeigen zunächst durch Induktion über j, dass $i + j \in \omega$.

Für $j = 0$ ist nach Definition der Summe von Ordnungen $i + 0 = i$, also $i + 0 \in \omega$. Sei $i + j \in \omega$. Wiederum nach der Definition der Summe von Ordnungen erhalten wir

$$i + j' = (i + j)',$$

woraus sich $i + j' \in \omega$ aus der Induktionsvoraussetzung ergibt.

Wir zeigen nun durch Induktion über j, dass $i \cdot j \in \omega$.

Für $j = 0$ ist nach Definition des Produktes von Ordnungen $i \cdot 0 = 0$, also $i \cdot 0 \in \omega$. Sei $i \cdot j \in \omega$. Wiederum nach der Definition des Produktes von Ordnungen erhalten wir

$$i \cdot j' = (i \cdot j) + i,$$

woraus sich $i \cdot j' \in \omega$ aus der Induktionsvoraussetzung und der für die Summe bereits bewiesene Beahuptung ergibt. □

Wir wissen, dass $<_\omega = \in_\omega$ eine Wohlordnung auf ω ist. Somit:

Bemerkung 5.5 *Jede nicht leere Menge natürlicher Zahlen enthält ein kleinstes Element.*

Wir haben somit in unserem Rahmen die Menge der natürlichen Zahlen mit ihrer Addition, Multiplikation und Ordnung definiert. Nun lassen sich die Menge der ganzen, rationalen, reellen und komplexen Zahlen zusammen mit ihren Operationen in der üblichen mengentheoretischen Weise definieren. So können wir für die ganzen Zahlen etwa

$$\mathbb{Z} := \omega \cup (\{\omega\} \times (\omega \setminus \{0\})$$

setzen. Dabei übernimmt $(\omega, 7)$ die Rolle von -7 (man weist leicht nach, dass $\omega \cap (\{\omega\} \times (\omega \setminus \{0\} = \emptyset)$. Die Funktionen $+$ und $\cdot$ und die Ordnung $\leq_\omega$ lassen sich leicht auf $\mathbb{Z}$ erweitern.

6 Der allgemeine Rekursionssatz.

Lemma 6.1 *Ist $F : A \to b$ injektiv, so sind $F, A \in V$.*

Beweis: Für den Wertebereich $W(F)$ gilt $W(F) \subseteq b$; daher $W(F) \in V$ (nach (Aus)). Da F injektiv ist, ist $F^{-1} : W(F) \to A$ bijektiv. Nach (Ers) somit $A = F^{-1}[W(F)] \in V$ und damit auch $F \in V$. □

Definition 6.2 Sei R eine Relation.

– R ist *fundiert*, wenn jede nichtleere Teilklasse des Feldes ein minimales Element enthält, d.h.

$$\forall B (\emptyset \neq B \subseteq \mathrm{Fld}(R) \Rightarrow \exists b \in B \, \forall c \in B : \quad \text{nicht } cRb.$$

– R ist *lokal*, wenn

$$\forall b \in \mathrm{Fld}(R) : \ \{c \mid cRb\} \in V.$$

Beispiele 6.3 (1) $\in_{\mathrm{Ord}}$ ist fundiert und lokal.

(2) Für jede Ordinalzahl α ist $\in_\alpha$ fundiert und lokal.

(3) $R := \{\big((a,\alpha),(a,\beta)\big) \mid a \in V, \ \alpha, \beta \in \mathrm{Ord}, \ \alpha < \beta\}$ ist fundiert und lokal.

(4) $R := \{\big((a,\alpha),(b,\beta)\big) \mid a, b \in V, \ \alpha, \beta \in \mathrm{Ord}, \ \alpha < \beta\}$ ist fundiert, jedoch nicht lokal.

(5) $\{((i,j),0) \mid i,j \in \omega, \ 1 \leq j \leq i\} \cup \{((i,j),(i,k) \mid i,j,k \in \omega, \ 1 \leq j < k \leq i\}$ ist fundiert und lokal.

Der folgende Begriff wurde für Ordnungen in Def. 2.17 eingeführt.

Definition 6.4 Sei R eine Relation. Dann ist eine Teilklasse C von $\mathrm{Fld}(R)$ ein *Anfangsabschnitt* oder *Anfangsstück* von R, wenn

$$\forall c \in C \, \forall b \in \mathrm{Fld}(R) \ (bRc \to b \in C).$$

Satz 6.5 (Allgemeiner Rekursionssatz) *Sei R eine fundierte, lokale und transitive Relation und $G : \mathrm{Fld}(R) \times V \to V$. Dann gibt es genau eine Funktion $F : Fld(R) \to V$ mit*

$$F(b) = G(b, F \restriction \{c \mid cRb\}) \tag{3}$$

für alle $b \in \mathrm{Fld}(R)$.

Bevor wir den Satz beweisen, geben wir zunächst eine Anwendung.

Satz 6.6 *Zu jedem $a \in V$ gibt es eine Ordinahlzahl α mit $\alpha \sim a$.*

Auch hiervon geben wir zunächst einige Folgerungen.

Folgerung 6.7 (Wohlordnungssatz) *Jede Menge ist wohlordenbar.*

Beweis: Sei $a \in V$. Nach dem vorangehenden Satz gibt es α mit $\alpha \sim a$. Sei etwa $f : \alpha \to a$ bijektiv. Wir setzen
$$<_a := \{(f(\beta), f(\gamma)) \mid \beta, \gamma \in \alpha,\ \beta < \gamma\}.$$
Dann ist $f : (\alpha, \in_\alpha) \cong (a, <_a)$ und daher ist $(a, <_a)$ eine Wohlordnung. □

Folgerung 6.8 *Für $a, b \in V$ gilt*
$$a \preceq b \quad \textit{oder} \quad b \preceq a.$$

Beweis: Wir wählen Ordinalzahlen α und β mit
$$\alpha \sim a \quad \text{und} \quad \beta \sim b$$
(vgl. Satz 6.6). Wegen Satz 2.34 ist $\alpha \leq \beta$ oder $\beta \leq \alpha$ und somit $a \preceq b$ oder $b \preceq a$. □

Beweis von Satz 6.6. Sei g eine Auswahlfunktion für $P(a) \setminus \{\emptyset\}$. Somit
$$\forall b \subseteq a \text{ mit } b \neq \emptyset :\ g(b) \in b.$$
Wir wählen $x_0 \in V$ mit $x_0 \notin a$. Wir wenden den Allgemeinen Rekursionssatz an mit $R = \in_{\mathrm{Ord}}$ und $G : \mathrm{Ord} \times V \to V$, wobei für $\gamma \in \mathrm{Ord}$ und $h \in V$
$$G(\gamma, h) = \begin{cases} g(a \setminus W(h)) & \text{wenn } W(h) \subset a \\ x_0 & \text{sonst.} \end{cases}$$
Dann gilt für alle $\alpha \in \mathrm{Ord}$
$$F(\alpha) = G(\alpha, F \restriction \alpha). \tag{4}$$
Unmittelbar aus der Definition ergibt sich:

Behauptung 1. Für alle $\alpha \in \mathrm{Ord}$: $\quad F(\alpha) \in a$ oder $F(\alpha) = x_0$.

Behauptung 2. Wenn $\alpha \leq \beta$ und $F(\alpha) = x_0$, so $F(\beta) = x_0$.

Beweis: Ist $F(\alpha) = x_0$, so ist $W(F \restriction \alpha) \not\subset a$ und somit $W(F \restriction \beta) \not\subset a$ für $\alpha \leq \beta$ und damit $F(\beta) = x_0$. ⊣

Behauptung 3. Wenn $\alpha < \beta$, $F(\alpha) \in a$ und $F(\beta) \in a$, so $F(\alpha) \neq F(\beta)$.

Beweis: Da $F(\beta) = g(a \setminus W(F \restriction \beta))$ und somit $F(\beta) \in b \setminus \{F(\gamma) \mid \gamma < \beta\} \subseteq b \setminus \{F(\alpha)\}$. ⊣

Behauptung 4. Es gibt ein α mit $F(\alpha) = x_0$.

Beweis: Sonst wäre $F : \mathrm{Ord} \to a$ nach Behauptungen 1 und 3 injektiv, im Widerspruch zu Lemma 6.1. $\dashv$

Sei α_0 die kleinste Ordinalzahl α mit $F(\alpha) = x_0$, Die folgende Behauptung beendet den Beweis des Satzes.

Behauptung 5. $F \upharpoonright \alpha_0 : \alpha_0 \to a$ ist bijektiv.

Beweis: Nach Behauptung 3 ist die Funktion injektiv. Wäre $W(F \upharpoonright \alpha_0) \subset a$, so wäre $F(\alpha_0) = g(a \setminus W(F \upharpoonright \alpha_0) \in a$ und damit ungleich x_0, ein Widerspruch. $\square$

Beweis von Satz 6.5. Sei R eine fundierte und transitive Relation und $G : \mathrm{Fld}(R) \times V \to V$. Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit von F, d.h. wir nehmen an, dass für $F_1, F_2 : \mathrm{Fld}(R) \to V$, die beide der Gleichung (3) für alle $b \in \mathrm{Fld}(R)$ genügen, $F_1 = F_2$ gilt. Ansonsten sei b R-minimal in $\{d \in \mathrm{Fld}(R) \mid F_1(d) \neq F_2(d)\}$. Dann gilt $F_1 \upharpoonright \{c \mid cRb\} = F_1 \upharpoonright \{c \mid cRb\}$. Dann ist nach (3) jedoch $F_1(b) \neq F_2(b)$.

Existenz. Wir setzen

$$H := \{h \mid h \text{ Funktion, } D(h) \text{ Anfangsabschnitt von } R \text{ und } h \text{ erfüllt (3) auf } D(h)\}.$$

Wie die Eindeutigkeit zeigt man

(+) Sind $h_1, h_2 \in H$ und $b \in D(h_1) \cap D(h_2)$, so $h_1(b) = h_2(b)$.

Wir setzen $F = \bigcup H$. Aus der Definition von H und F und aus (+) ergeben sich

> F ist eine Funktion, $D(F)$ ist ein Anfangsabschnitt von R, F erfüllt (3) auf $D(F)$ und $\forall h \in H : \quad h \subseteq F$.

Somit ist nur noch $D(F) = \mathrm{Fld}(R)$ zu zeigen. Wir nehmen an $\mathrm{Fld}(R) \setminus D(F)$ sei nichtleer und b ein R-minimales Element von $\mathrm{Fld}(R) \setminus D(F)$. Dann ist $\{c \mid cRb\} \subseteq D(F)$ und somit gilt für die Funktion

$$F_0 := F \cup \{(b, G(b, F \upharpoonright \{c \mid cRb\})\},$$

dass sie (3) auf $D(F_0)$ erfüllt und dass $\{c \mid cRb\} \cup \{b\} \subseteq D(F_0)$. Somit erfüllt auch

$$h_0 := F_0 \upharpoonright \{c \mid cRb\} \cup \{b\}$$

(3) auf $D(h_0)$. Da R transitiv ist, ist $D(h_0)$ ein Anfangsstück von R, somit ist $h_0 \in H$ und damit $h_0 \subseteq F$, ein Widerspruch zu $b \notin D(F)$. $\square$

Beispiel 6.9 Sei R eine fundierte, lokale und transitive Relation. Mit dem Allgemeinen Rekursionssatz definieren wir die *Höhenfunktion* $H : \mathrm{Fld}(R) \to V$ durch: Für alle $b \in \mathrm{Fld}(R)$

$$H(b) = \bigcup \{H(c) \cup \{H(c)\} \mid cRb\}. \tag{5}$$

Hierbei verwenden wir als $G : \mathrm{Fld}(R) \times V \to V$ im Allgemeinen Rekurionssatz die Funktion

$$G(b,h) := \begin{cases} \bigcup\{h(c) \cup \{h(c)\} \mid cRb\}, & \text{wenn } h \text{ Funktion und } D(h) = \{c \mid cRb\} \\ \emptyset, & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist $H(b) \in \mathrm{Ord}$; ansonsten wählen wir ein R-minimales Element b_0 in der dann nicht leeren Klasse $\{d \in \mathrm{Fld}(R) \mid H(d) \notin \mathrm{Ord}\}$. Wegen (5) ist $H(b_0)$ die Vereinigung einer Menge von Ordinalzahlen und somit (nach Bemerkung 2.38) selbst eine Ordinalzahl, ein Widerspruch. Somit ist $H : \mathrm{Fld}(R) \to \mathrm{Ord}$ und wegen Bemerkung 2.38 und (5) gilt für alle $b \in \mathrm{Fld}(R)$

$$H(b) = \sup\{H(c) + 1 \mid cRb\}.$$

Man nennt $H(b)$ die *Höhe von b in R*. Ist $R \in V$, so ist $\sup\{H(b) + 1 \mid b \in \mathrm{Fld}(R)\}$ die *Höhe von R*.

Man überlegt sich leicht, dass $H(\in_\alpha) = \alpha$ für jede Ordinalzahl α und $H(R) = \omega + 1$ für die Relation R in Beispiel 6.3 (5).

Varianten des Rekursionssatzes.

Definition 6.10 Sei α eine Ordinahlzahl.

- α ist eine *Nachfolgerzahl*, wenn existiert β mit $\alpha = \beta' := \beta \cup \{\beta\}$.
- α ist eine *Limeszahl*, kurz: $\mathrm{Lim}\ \alpha$, wenn $\alpha \neq 0$ und α ist keine Nachfolgerzahl.

Für jede Ordinalzahl α gilt also

entweder $\alpha = 0$ *oder* α ist Nachfolgerzahl *oder* $\mathrm{Lim}\ \alpha$.

Daraus erhalten wir unmittelbar:

Satz 6.11 (Prinzip der transfiniten Induktion) *Will man zeigen, dass alle Ordinahlzahl eine Eigenschaft E haben, so genügt es (i), (ii) und (iii) nachzuweiesen:*

(i) $E(0)$

(ii) für jede Ordinahlzahl α: (wenn $E(\alpha)$, so $E(\alpha')$)

(iii) für jede Limeszahl γ: (wenn $E(\alpha)$ für alle $\alpha < \gamma$, so $E(\gamma)$).

Beweis: Würde E nicht auf alle Ordinalzahlen zutreffen, so gäbe es eine kleinste β mit nicht $E(\beta)$. Nach (i) wäre $\beta \neq 0$, nach (ii) wäre β keine Nachfolgerzahl und nach (iii) auch keine Limeszahl, ein Widerspruch. $\square$

Bemerkung 6.12 *Sei α eine Ordinahlzahl.*

(1) α ist eine Limeszahl gdw α ist induktiv.

(2) Jede natürliche Zahl $\neq 0$ ist eine Nachfolgerzahl.

(3) ω ist die kleinste Limeszahl.

(4) Ist α ist eine Nachfolgerzahl, etwa $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$, dann ist $\bigcup \alpha = \beta$.

(5) α ist eine Limeszahl gdw ($\alpha \neq 0$ und $\bigcup \alpha = \alpha$).

Beweis: (1) ergibt sich unmittelbar aus den Definitionen von Limeszahl und induktiver Menge.

(2) Wäre $i \in \omega$ induktiv, so $\omega \subseteq i$ (nach Definition von ω und daher $i \in i$, ein Widerspruch. Die Behauptung ergibt sich somit aus (1).

(3) gilt wegen (1) und (2).

(4) Sei $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$. Es gilt somit $\gamma \leq \beta$ für alle $\gamma \in \alpha$. Da $\bigcup \alpha$ nach Bem. 2.38 das Supremum der Ordinalzahlen in α ist, gilt daher $\bigcup \alpha \leq \beta$, wegen $\beta \in \alpha$ somit $\bigcup \alpha = \beta$.

(5) Wegen (4) ergibt sich aus der rechten Seite die linke. Sei nun α eine Limeszahl. Da $\gamma \subseteq \alpha$ für $\gamma \in \alpha$, ergibt sich $\bigcup \alpha \leq \alpha$. Wäre $\bigcup \alpha = \beta < \alpha$, so nach Voraussetzung $\beta' \in \alpha$ und somit $\beta \in \bigcup \alpha = \beta$, ein Widerspruch. $\square$

Beispiel 6.13 (*Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.*) Sei v ein Vektorraum und v_0 seine Menge von Vektoren. Für $x \subseteq v_0$ bezeichne $\langle x \rangle^v$ die Menge der Linearkombination von Vektoren aus x. Somit ist x eine *Basis*, wenn x linear unabhängig ist und $\langle x \rangle^v = v_0$.

Enthält v_0 nur den Nullvektor 0, so ist $\emptyset$ eine Basis von v. Sei nun $v_0 \supset \{0\}$. Wir wählen eine Ordinalzahl α und eine Bijektion $h : \alpha \to v_0$ (mit Satz 6.6). Für $\beta < \alpha$ setzen wir $a_\beta := h(\beta)$. O.B.d. A. sei $a_0 \neq 0$. Nach dem Allgemeinen Rekursionssatz gibt es eine Funktion $f : \alpha \to V$ mit: Für alle $\beta < \alpha$

$$f(\beta) := \begin{cases} a_\beta, & \text{falls } \{a_\beta\} \cup f[\beta] \text{ linear unabhängig ist;} \\ a_0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man beachte, dass $f(0) = a_0$. Durch transfinite Induktion über β zeigt man weiterhin

$$\text{wenn } \beta \leq \alpha, \text{ so ist } f[\beta] \text{ linear unabhängig}$$

Für $\beta \leq \alpha$ mit Lim β kann man wie folgt argumentieren: Sei nach Induktionsvoraussetzung $f[\delta]$ linear unabhängig für alle $\delta < \beta$. Ist $f[\beta]$ linear abhängig, so gibt es wegen $f[\beta] = \{f(\delta) \mid \delta < \beta\}$ endlich viele paarweise verschiedene $\delta_1, \ldots, \delta_i < \beta$ und Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_i$ mit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_i) \neq (0, \ldots, 0)$ mit $\lambda_1 f(\delta_1) + \cdots + \lambda_i f(\delta_i) = 0$. Wir setzen $\delta := \sup\{\delta_1, \ldots, \delta_i\}$. Dann ist $\delta + 1 < \beta$ und $f[\delta + 1]$ linear abhängig, ein Widerspruch.

Wäre nun $x = f[\alpha]$ keine Basis, so gäbe es ein $\beta < \alpha$ mit $a_\beta \notin \langle x \rangle^v$. Dann wäre aber $\{a_\beta\} \cup f[\alpha]$ und somit $\{a_\beta\} \cup f[\beta]$ linear unabhängig. Nach Definition von f wäre aber dann $a_\beta = f(\beta) \in f[\alpha] = x$, ein Widerspruch.

Satz 6.14 *Sei $A = \mathrm{Ord}$ oder $A \in \mathrm{Ord}$, $A \neq 0$. Sei $a_0 \in V$ und seien $G_1, G_2 : A \times V \to V$. Dann gibt es genau eine Funktion $F : A \to V$ mit*

$$\begin{array}{rrcl} & F(0) & = & a_0 \\ \textit{für alle } \alpha \textit{ mit } \alpha' \in A: & F(\alpha') & = & G_1(\alpha, F(\alpha)) \\ \textit{für alle } \gamma \in A \textit{ mit } \mathrm{Lim}\ \gamma\textit{:} & F(\gamma) & = & G_2(\gamma, F \restriction \gamma) \end{array}$$

Für $A = \omega$ erhalten wir die "gewöhnliche" induktive Definition von Funktionen mit der Menge der natürlichen Zahlen als Definitionsbereich: Sei $a_0 \in V$ und sei $G : \omega \times V \to V$. Dann gibt es genau eine Funktion $F : \omega \to V$ mit

$$\begin{array}{rrcl} & F(0) & = & a_0 \\ \forall i \in \omega: & F(i+1) & = & G(i, F(i)) \end{array}$$

Beweis: Wir definieren $G : A \times V \to V$ durch

$$G(\beta, f) := \begin{cases} a_0 & \text{falls } \beta = 0 \\ G_1(\bigcup \beta, f(\bigcup \beta)) & \text{falls } \beta \text{ Nachfolgerzahl, } f \text{ Funktion und } \bigcup \beta \in D(f) \\ G_2(\bigcup \beta, f \restriction \beta)) & \text{falls } \mathrm{Lim}\ \beta, f \text{ Funktion und } \beta \subseteq D(f) \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

genauer, $G = \{(x, y) \mid (x = 0 \text{ und } y = a_0) \text{ oder } \dots\}$. Da $\in_A$ eine Wohlordnung auf $A := \mathrm{Fld}(\in_A)$ ist, gibt es nach dem Allgemeinen Rekursionssatz genau eine Funktion $F : A \to V$ mit

$$F(\beta) = G(\beta, F \restriction \beta)$$

für alle $\beta \in A$. Jetzt ergibt sich die Behauptung aus der Definition von G. □

Beispiel 6.15 Sei r eine Ordnung. Dann sind äquivalent:

(1) r ist keine Wohlordnung;

(2) Es gibt eine absteigende r-Folge, d.h. es gibt eine Funktion $f : \omega \to \mathrm{Fld}(r)$ mit $f(i+1) r f(i)$ für alle $i \in \omega$.

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2): Sei f wie in (2). Dann besitzt $W(f)$ kein r-minimales Element.

(2) $\Rightarrow$ (1): Da r keine Wohlordnung ist, gibt es eine nichtleere Teilmenge a ohne r-minimales Element. Sei g eine Auswahlfunktion für $P(a) \setminus \{\emptyset\}$. Wir definieren $f : \omega \to \mathrm{Fld}(r)$ durch Induktion:

$$\begin{array}{rcl} f(0) & := & g(a) \\ f(i+1) & := & g(\{x \mid x \in a,\ x r f(i)\}). \end{array}$$

Beispiel 6.16 (von Neumannsche Hierarchie) Man definiere VH als die eindeutige bestimmte Funktion $\mathrm{VH} : \mathrm{Ord} \to V$ (wir schreiben V_α statt $\mathrm{VH}(\alpha)$) durch:

$$\begin{array}{rrcl} & V_0 & := & \emptyset \\ & V_{\alpha+1} & := & P(V_\alpha) \\ \text{wenn } \mathrm{Lim}\ \gamma, \text{ so} & V_\gamma & := & \bigcup\{V_\alpha \mid \alpha < \gamma\}. \end{array}$$

V_α, ist die *α-te Stufe der von Neumannschen Hierarchie.*

Für festes α zeigt man mit Satz 1.11 leicht durch transfinite Induktion über β

$$\text{wenn } \alpha < \beta, \text{ so } V_\alpha \prec V_\beta\ .$$

Weiterhin gilt:

Lemma. (a) $\forall \alpha :\ V_\alpha$ ist transitiv.

(b) $\forall \alpha, \beta :$ (wenn $\alpha \leq \beta$, so $V_\alpha \subseteq V_\beta$).

Beweis. (a) Transfinite Induktion über α:

$\alpha = 0$: V_0 ist transitiv.

$\alpha = \beta{+}1$: Sei $x \in V_{\beta+1} = P(V_\beta)$ und $y \in x$. Dann erhalten wir nacheinander $x \subseteq V_\beta$, $y \in V_\beta$, $y \subseteq V_\beta$, $y \in V_{\beta+1}$, wobei wir bei der vorletzten Behauptung die Induktionsvoraussetzung verwenden.

Lim α: Dann ist nach Induktionsvoraussetzung $\forall \beta < \alpha : V_\beta$ transitiv und somit $V_\alpha = \bigcup\{V_\beta \mid \beta < \alpha\}$ transitiv (vgl. Bem. 2.25).

(b) Für festes α zeigen wir

$$\forall \beta :\ (\text{wenn } \alpha \leq \beta, \text{ so } V_\alpha \subseteq V_\beta)$$

durch Induktion über β.

Für $\beta = 0$ ist die Behauptung klar. Sei $\beta = \delta + 1$ und $\alpha \leq \delta + 1$. Ist $\alpha = \delta + 1$, so ist die Behauptung wiederum klar. Ist $\alpha \leq \delta$, so ist $V_\alpha \subseteq V_\delta$. Wegen $V_\delta \in V_{\delta+1} = P(V_\delta)$. Nach (a) somit $V_\alpha \subseteq V_\delta \subseteq V_{\delta+1}$. Ist Lim β und $\alpha \leq \beta$, so folgt die Behauptung wegen $V_\beta = \bigcup\{V_\delta \mid \delta < \beta\}$ unmittelbar aus der Induktionsvoraussetzung. $\dashv$

Satz. $V = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{Ord}} V_\alpha$ gdw $\in$ ist fundiert.

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass $\in$ fundiert ist. Wenn $A := V \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathrm{Ord}} V_\alpha \neq \emptyset$, so gibt es ein $\in$-minimales Element a in A. Dann ist also $a \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathrm{Ord}} V_\alpha$. Für die Funktion

$$F := \{(x, \alpha) \mid x \in a,\ x \in V_\alpha \text{ und } \forall \beta < \alpha :\ x \notin V_\beta\}$$

gilt daher $D(F) = a$. Somit ist $W(F)$ eine Menge. Daher und wegen (b) im vorangehenden Lemma gilt $a \subseteq V_\beta$ für $\beta := \bigcup W(F)$, also $a \in V_{\beta+1}$, ein Widerspruch.

Häufig wird die Aussage "$\in$ ist fundiert" als Axiom zu dem Axiomensystem NBG hinzugenommen; man spricht dann von dem Fundierungsaxiom.

Beispiel 6.17 (Zornsches Lemma) Sei r eine Relation mit $\mathrm{Fld}(r) = a$. Weiterhin sei (a, r) eine partielle Ordnung, d.h. r ist transitiv und irreflexiv. Ein Element $x \in a$ ist eine obere Schranke von $b \subseteq a$, wenn für alle $y \in b$ gilt: (yrx oder $y = x$). Ein Element $x \in a$ ist ein maximales Element, wenn für kein $y \in a$ gilt xry. Eine Teilmenge $b \subseteq a$ ist eine *Kette* (in (a, r)), wenn für $x, y \in b$ mit $x \neq y$ gilt xry oder yrx.

Die folgende Aussage wird als Zornsches Lemma bezeichnet:

> *Jede partielle Ordnung, in der jede Kette eine obere Schranke besitzt, hat mindestens ein maximales Element.*

Beweis: Sei g eine Auswahlfunktion für $P(a)\setminus\{\emptyset\}$ und sei $x_0 \in V$ mit $x_0 \notin a$. Wir definieren $F : Ord \to V$ durch transfinte Induktion

$$F(\alpha) := \begin{cases} g(b) & \text{falls } F[\alpha] \subseteq a \text{ und } b = \{y \in a \setminus F[\alpha] \mid \forall x \in F[\alpha] : \ xry\} \neq \emptyset \\ x_0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wie in Behauptung 4 von Folgerung 6.8 zeigt man, dass es eine kleinste Ordinahlzahl α_0 gibt mit $F(\alpha_0) = x_0$ und dass für sie gilt:

– für alle $\beta, \gamma < \alpha_0$ mit $\beta < \gamma$: $F(\beta)rF(\gamma)$.

Somit ist $F[\alpha_0]$ eine Kette. Sei u eine obere Schranke von $F[\alpha_0]$. Wir zeigen, dass u ein maximales Element ist. Sonst würde urz für ein $z \in a$ und damit $F(\beta)rz$ für alle $\beta < \alpha_0$ gelten. Dann wäre $z \in \{y \in a \mid \forall x \in F[\alpha] : \ xry\}$ und nach Definition von F daher $F(\alpha_0) \neq x_0$. $\dashv$

7 Endliche Mengen

Wir erinnern an die Begriffe “endlich,” “unendlich” und “abzählbar” (vgl. Definition 7.1), deren Definition sich nun wie folgt formulieren läßt:

Definition 7.1 Sei a eine Menge.

- a ist *endlich*, wenn es $i \in \omega$ gibt mit $a \sim i$.
- a ist *unendlich*, wenn es nicht endlich ist.
- a ist *abzählbar*, wenn $a \sim \omega$.

Lemma 7.2 *Ist a eine endliche Menge, so ist jede injektive Funktion von a nach a auch surjektiv.*

Beweis: Sei a endlich. Da $a \sim j$ für ein geeignetes $j \in \omega$, genügt es, für alle $i \in \omega$ die Behauptung zu zeigen. Wir zeigen dies durch Indduktion. Für $i = 0$ ist die Behauptung trivial.

Sei die Behauptung für i richtig und sei $f : i{+}1 \to i{+}1$ injektiv. Wenn $i \notin \{f(j) \mid j < i\}$, so ist $f \upharpoonright i : i \to i$ injektiv und somit nach Induktionsvoraussetung surjektiv. Dann muss aber $f(i) = i$ und somit ist auch f surjektiv. Ist $i \in \{f(j) \mid j < i\}$, etwa $f(k) = i$ mit $k < i$, so ist $f(i) < i$ wegen der Injektivität von f. Wir “Vertauschen die Werte” an den Stellen k und i und erhalten somit eine injektive Funktion $g : i + 1 \to i + 1$

$$g := \Big(f \setminus \{(k, i), (i, f(i))\}\Big) \cup \{(k, f(i)), (i, \underbrace{f(k)}_{=i})\}$$

mit $i \notin \{g(j) \mid j < i\}$. Nach dem bereits Bewiesenen ist g surjektiv und damit auch f wegen $W(f) = W(g)$. $\square$

Satz 7.3 *Eine Menge a ist unendlich gdw $\omega \preceq a$.*

Beweis: Wir wissen, dass es eine Ordinahlzahl α mit $a \sim \alpha$ gibt. Ist a nicht endlich ist, so gilt $\omega \leq \alpha$ und somit $\omega \preceq a$.

Sei umgekehrt $\omega \preceq a$, etwa sei $f : \omega \to a$ injektiv. Angenommen a sei endlich, etwa $g : a \to i$ bijektiv für ein $i \in \omega$, so wäre $g \circ f : \omega \to i$ injektiv. Insbesondere wäre deren Restriktion auf i injektiv und damit (nach dem vorangehenden Lemma) surjektiv. Dann wäre $g(f(i)) = g(f(j))$ für ein $j < i$, ein Widerspruch zur Injektivität von f und g. $\square$

Satz 7.4 *Eine Menge a ist endlich gdw jede injektive Funktion von a nach a auch surjektiv.*

Beweis: Wegen Lemma 7.2 ist nur die Implikation von "rechts nach links" zu zeigen: Sei a nicht endlich. Dann gibt es nach dem vorangehenden Satz ein injektves $f : \omega \to a$. Dann ist die Funktion $g : a \to a$ mit

$$g(x) := \begin{cases} f(i+1), & \text{falls } i \in \omega \text{ und } x = f(i) \\ x, & \text{falls } x \notin W(f) \end{cases}$$

Dann ist g injektiv und wegen $f(0) \notin W(g)$ nicht surjektiv. $\square$

8 Kardinalzahlen

Lemma 8.1 *Seien a und b Mengen und $a \neq \emptyset$. Dann*

$$\begin{aligned} a \preceq b \quad &\iff \quad \exists f \ (f : a \to b \ \ \textit{injektiv}) \\ &\iff \quad \exists g \ (g : b \to a \ \ \textit{surjektiv}). \end{aligned}$$

Insbesondere ist $W(h) \preceq D(h)$ für jede Funktion h.

Beweis: Die Äquivallenz in der ersten Zeile gilt per definitionem von $\preceq$. Sei nun $x_0 \in a$ und $f : a \to b$ injektiv, Dann ist $g : b \to a$ mit

$$g(y) := \begin{cases} f^{-1}(y), & \text{für } y \in W(f) \\ x_0 & \text{sonst} \end{cases}$$

surjektiv. Sei nun eine surjektive Funktion $g : b \to a$ gegeben. Wir wählen eine Wohlordnung r auf b und definieren $f : a \to b$ durch

$$f(x) = \text{ das } r\text{-minimale Element in } \{y \mid g(y) = x\}.$$

Dann ist f injektiv. □

Definition 8.2 – Eine Ordinahlzahl α ist eine *Kardinalzahl*, wenn $\alpha \not\sim \beta$ für alle Ordinahlzahl $\beta < \alpha$. Mit *Card* bezeichnen wir die Klasse der Kardinalzahlen.

– Sei x eine Menge. Wir setzen

$$|x| := \min\{\alpha \mid x \sim \alpha\}$$

und nennen $|x|$ die *Kardinalität* oder *Mächtigkeit* von x. Man beachte, dass $\{\alpha \mid x \sim \alpha\} \neq \emptyset$, da es auf x eine Wohlordnung r gibt und (x, r) zu einer Ordinalzahl isomorph ist.

In der Regel bezeichnen $\kappa, \lambda, \ldots$ Kardinalzahlen.

Bemerkung 8.3 *(1) Für $\alpha \in \mathrm{Ord}$: $|\alpha| \leq \alpha$; für $\kappa \in \mathrm{Card}$: $|\kappa| \leq \kappa$.*

(2) Für alle x: $|x| \in \mathrm{Card}$.

(3) Für alle x, y: $(|x| = |y| \iff x \sim y)$.

(4) Für alle x, y: $(|x| \leq |y| \iff x \preceq y)$.

(5) Für alle $i \in \omega$: $i \in \mathrm{Card}$.

(6) $\omega \in \mathrm{Card}$.

(7) Ist α unendlich, so ist $\alpha+1$ keine Kardinalzahl. Somit: Jede unendliche Kardinalzahl ist eine Limeszahl.

(8) $\mathrm{Lim}\ \omega+\omega$ *und* $\omega+\omega \notin \mathrm{Card}$.

Beweis: (1)–(3) ergeben sich unmittelbar aus den Definitionen.

(4) $\Rightarrow$: Wegen $|x| \leq |y|$ ist die Identität auf $|x|$ eine Injektion von $|x|$ nach $|y|$. Nun folgt die Behauptung wegen $x \sim |x|$ und $y \sim |y|$.
$\Leftarrow$: Gelte $x \preceq y$. Wäre $|y| < |x|$, so $y \preceq x$ nach dem bereits Bewiesenen und damit $x \sim y$, also $|x| = |y|$ nach (2), ein Widerspruch.

(5) Ist $j < i$ und $f : i \to j$ bijektiv, so wäre $f : i \to i$ injektiv, aber nicht surjektiv im Widerspruch zu Satz 7.4.

(6) Sei $i \in \omega$. Mit $\omega \sim i$ wäre $\omega \preceq i$, im Widerspruch zu Satz 7.3.

(7) Die Funktion $f : \alpha+1 \to \alpha$ ist bijektiv, wobei

$$f(\beta) := \begin{cases} 0, & \text{für } \beta = \alpha \\ i+1, & \text{für } \beta = i \text{ mit } i \in \omega \\ \beta, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(8) Als Vereinigung von zwei abzählbaren Ordnungen ist $\omega+\omega$ abzählbar, also $\omega+\omega \sim \omega$. $\square$

Bemerkung 8.4 *Zu jeder Ordinalzahl gibt es eine größere Kardinalzahl:*

$$\forall \alpha \in \mathrm{Ord}\ \exists \kappa \in \mathrm{Card} :\ \alpha < \kappa.$$

Beweis: Für gegebenes α gilt $\alpha < \kappa$ für $\kappa := |P(\alpha)|$ (wegen Satz 1.11). $\square$

Dieses Ergebnis rechtfertigt die folgende Bezeichnung.

Definition 8.5 Für eine Ordinalzahl α bezeichne α^+ die kleinste Kardinalzahl, die größer als α ist.

Folgerung 8.6 Card *ist eine echte Klasse.*

Beweis: Nach der vorangehenden Bemerkung gilt $\bigcup \mathrm{Card} = \mathrm{Ord}$. Wäre Card eine Menge, so auch Ord. $\square$

Bemerkung 8.7 *Ist* $x \subseteq \mathrm{Card}$, *so ist* $\bigcup x \in \mathrm{Card}$.

Beweis: Ist $x = \emptyset$, so ist $\bigcup x = \emptyset = 0$ und die Behauptung ist richtig. Ist $x \neq \emptyset$, so ist $\bigcup x = \sup x$ (vgl. Bem. 2.38). Angenommen $\bigcup x \sim \alpha$ mit $\alpha < \bigcup x$. Dann gibt es ein $\kappa \in x$ mit $\alpha < \kappa \leq \bigcup x$. Dann wäre $\kappa \preceq \alpha$, ein Widerspruch $\square$

Definition 8.8 Wir definieren die $\aleph$-Funktion, $\aleph : \mathrm{Ord} \to V$, durch transfinite Induktion (statt $\aleph(\alpha)$ schreibt man $\aleph_\alpha$):

$$\begin{array}{rll} & \aleph_0 & := \omega \\ & \aleph_{\alpha+1} & := (\aleph_\alpha)^+ \\ \text{Ist } \mathrm{Lim}\,\gamma, \text{ so} & \aleph_\gamma & := \bigcup_{\alpha<\gamma} \aleph_\alpha. \end{array}$$

Somit ist $\aleph_1$ die erste überabzählbare Ordinalzahl. Hieraus ergibt sich:

Bemerkung 8.9 *Ist $x \subseteq \aleph_1$ höchstens abzählbar, so* $\sup x < \aleph_1$.

Beweis: Wir wissen (nach Bem. 2.38), dass $\sup x = \bigcup x$. Als höchstens abzählbare Vereinigung von höchstens abzählbaren Mengen ist daher $\sup x$ höchstens abzählbar, also $\sup x < \aleph_1$. $\square$

Bemerkung 8.10 *(1) Für alle α: $\alpha \leq \aleph_\alpha$.*

(2) Wenn $\alpha < \beta$, so $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$.

(3) Die Klasse der unendlichen Kardinalzahlen ist der Wertebereich der Alephfunktion:

$$W(\aleph) = \mathrm{Card}_\infty := \{\kappa \mid \kappa \in \mathrm{Card} \textit{ und } \kappa \textit{ unendlich}\}.$$

Beweis: (1) und (2) beweist man leicht durch transfinite Induktion, (1) über α und (2) bei festem α über β.

Es ist klar, dass $W(\aleph) \subseteq \mathrm{Card}_\infty$ (dass $\aleph_\gamma \in \mathrm{Card}$ für jede Limeszahl γ folgt aus Bem. 8.7). Wir nehmen an, dass $\kappa \in \mathrm{Card}_\infty \setminus W(\aleph)$. Da Ord ene echte Klasse ist, die Funktion $\aleph$ injektiv ist, ist $W(\aleph) \not\subseteq \kappa$ (vgl. Lemma 6.1) ist die Menge

$$\{\alpha \in \mathrm{Ord} \mid \kappa < \aleph_\alpha\}$$

nicht leer. Sei β ihr minimales Element. Dann ist $\beta \neq 0$. Wäre $\beta = \alpha + 1$ für ein α, so

$$\aleph_\alpha < \kappa < \aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+,$$

ein Widerspruch zur Deffinition von $(\aleph_\alpha)^+$. Die Ordinahlzahl β kann aber auch keine Limeszahl sein, da sonst $\aleph_\alpha < \kappa$ für alle $\alpha < \beta$ und damit $\kappa < \aleph_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} \aleph_\alpha \leq \kappa$. $\square$

Definition 8.11 Ist (a, r) eine Wohlordnung, so bezeichnen wir mit

$$\mathrm{wo}(a, r)$$

die nach Satz 2.35 eindeutig bestimmte Ordinahlzahl α mit $(a, r) \cong (\alpha, \in_\alpha)$.

Bemerkung 8.12 *Sei $\kappa \in \mathrm{Card}$ und sei (a, r) eine Wohlordnung. Dann sin äquivalent:*

(1) $\mathrm{wo}(a, r) = \kappa$*;*

(2) $|a| \geq \kappa$ *und jedes echte Anfangsstück von* (a, r) *hat eine Mächtigkeit* $< \kappa$ *(d.h. (wegen Bem. 2.19)* $\forall b \in a \; |\{c \in a \mid (c, b) \in r\}| < \kappa$*).*

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2) ist klar, da $(\kappa, \in_\kappa)$ die (2) entsprechenden Eigenschaften hat.

(2) $\Rightarrow$ (1): Wir setzen $\alpha := \mathrm{wo}(a, r)$ und zeigen $\alpha = \kappa$. Da $\alpha \geq |\alpha| = |a| \geq \kappa$, ist $\alpha \geq \kappa$. Wäre $\kappa < \alpha$, so $\kappa + 1 = \kappa \cup \{\kappa\} \leq \alpha$. Das Anfangsstück des $\kappa \in \alpha$ entsprechenden Elementes in a hätte die Mächtigkeit κ, im Widerspruch zu (2). $\square$

Zunächst beweisen wir den

Satz 8.13 (Satz von Hessenberg) *Für alle $\alpha \in \mathrm{Ord}$:*

$$\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha \sim \aleph_\alpha.$$

Und damit gilt für jede unendliche Menge x

$$x \times x \sim x.$$

Beweis: Die Funktion $\{(\beta, (\beta, 0)) \mid \beta < \aleph_\alpha\}$ bezeugt, dass $\aleph_\alpha \preceq \aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$. Wir beweisen noch

$$\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha \preceq \aleph_\alpha. \tag{6}$$

Ansonsten gibt es ein kleinstes α, für das (6) nicht erfüllt ist. Wir definieren die Relation r auf $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$ durch:

$$\begin{aligned}(\beta, \gamma) r (\beta', \gamma') \iff & \max\{\beta, \gamma\} < \max\{\beta', \gamma'\} \qquad \text{oder} \\ & \max\{\beta, \gamma\} = \max\{\beta', \gamma'\} \text{ und } (\beta < \beta' \text{ oder } (\beta = \beta' \text{ und } \gamma < \gamma')).\end{aligned}$$

Behauptung 1. $(\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha, r)$ ist eine Wohlordnung
Beweis. Man weist leicht nach, dass r eine Ordnung ist. Sei nun $x \subseteq \aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$ nicht leer. Wir setzen

$$\delta := \min\{\max\{\beta, \gamma\} \mid (\beta, \gamma) \in x\}.$$

Dann

- $\delta \in \aleph_\alpha$;

– $\forall(\beta,\gamma) \in x: \ \delta \leq \max\{\beta,\gamma\}$;

– $y := \{(\beta,\gamma) \in x \mid \delta = \max\{\beta,\gamma\}\} \neq \emptyset$.

Wir setzen

$$\beta_0 = \min\{\beta \in \aleph_\alpha \mid \exists\gamma: \ (\beta,\gamma) \in y\} \quad \text{und} \quad \gamma_0 = \min\{\gamma \in \aleph_\alpha \mid (\beta_0,\gamma) \in y\}.$$

Dann ist (β_0,γ_0) r-minimales Element von x. $\dashv$

Wegen Bem. 8.12 müssen wir nur noch zeigen, dass für jedes $(\beta,\gamma) \in \aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$, dass durch (β,γ) bestimmte Anfangsstück $a(\beta,\gamma)$ eine Mächtigkeit $< \aleph_\alpha$ besitzt. Sei $\delta = \max\{\beta,\gamma\}$. Unmittelbar aus der Definition von r ergibt sich

$$a(\beta,\gamma) \subseteq (\delta+1) \times (\delta+1)$$

Ist $\delta \in \omega$, so ist $|a(\beta,\gamma)| < \aleph_0 \leq \aleph_\alpha$. Sei δ unendlich. Wegen $\delta < \aleph_\alpha$, gilt $\delta \sim \aleph_{\alpha'}$ für ein $\alpha' < \alpha$. Somit gilt (6) für $\aleph_{\alpha'}$ und daher ist

$$a(\beta,\gamma) \preceq (\delta+1) \times (\delta+1) \sim \aleph_{\alpha'} \times \aleph_{\alpha'} \sim \aleph_{\alpha'} \prec \aleph_\alpha.$$

$\square$

Kardinalzahlarithmetik

Definition 8.14 Für $\kappa, \lambda \in \mathrm{Card}$, setzen wir:

(kardinale Addition)	$\kappa + \lambda$	$:=$	$\lvert(\kappa \times \{0\}) \cup (\lambda \times \{1\})\rvert$
(kardinale Multiplikation)	$\kappa \cdot \lambda$	$:=$	$\lvert\kappa \times \lambda\rvert$
(kardinale Exponentiation)	κ^λ	$:=$	$\lvert{}^\lambda\kappa\rvert$.

Beispiel 8.15 Somit ist $2^{\aleph_\alpha} = |{}^{\aleph_\alpha}2| = |{}^{\aleph_\alpha}\{0,1\}| = |P(\aleph_\alpha)| \geq \aleph_{\alpha+1}$. Insbesondere $2^{\aleph_0} = |P(\aleph_0)| = |\mathbb{R}| \geq \aleph_1$. Daher lässt sich die Kontinuumshypothese(CH) wie folgt formulieren:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

Die *Allgemeine Kontinuumshypothese* (GCH) ist die Aussage

$$\forall\alpha \in \mathrm{Ord}: \quad 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}.$$

Kardinale Addition.

Bemerkung 8.16 *Für alle Mengen x, y gilt:*

(1) $|x \cup y| \leq |x| + |y|$.

(2) Wenn $x \cap y = \emptyset$, so $|x \cup y| = |x| + |y|$.

(3) Ist x unendlich, so $|x \cup y| = \max\{|x|, |y|\}$.

Beweis: (1) und (2) überlassen wir dem Leser als Übung.
(3) OBdA gelte $|y| \leq |x|$. Dann gilt

$$x \preceq x \cup y \preceq (\{0\} \times x) \cup (\{1\} \times y) \preceq (\{0\} \times x) \cup (\{1\} \times x) \preceq x \times x \preceq x,$$

wobei wir bei der letzte Ungleihung den Satz von Hessenberg anwenden.

Satz 8.17 (Satz über die kardinale Addition) *(1) Die kardinale Addition ist kommutativ und assoziativ.*

(2) Für alle $\kappa, \lambda, \mu \in \mathrm{Card}$: wenn $\lambda \leq \mu$, so $\kappa + \lambda \leq \kappa + \mu$.

(3) Auf ω stimmt die kardinale Addition mit der üblichen überein.

(4) Für alle κ, λ mit $\kappa \geq \aleph_0$

$$\kappa + \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}.$$

Kardinale Multiplikation.

Satz 8.18 (Satz über die kardinale Multiplikation) *(1) Die kardinale Multiplikation ist kommutativ und assoziativ.*

(2) Für alle $\kappa, \lambda, \mu \in \mathrm{Card}$: $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$

(3) Für alle $\kappa, \lambda, \mu \in \mathrm{Card}$: wenn $\lambda \leq \mu$, so $\kappa \cdot \lambda \leq \kappa \cdot \mu$.

(4) Für alle $\kappa \in \mathrm{Card}$: $\kappa \cdot 0 = 0$.

(5) Auf ω stimmt die kardinale Multiplikation mit der üblichen überein.

(6) Für alle $\kappa, \lambda \in \mathrm{Card}$ mit $\kappa \geq \aleph_0$ und $\lambda \neq 0$

$$\kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}.$$

Beweis: (2) gilt, da $a \times (b \cup c) = (a \times b) \cup (a \times c)$ für Mengen a, b, c gilt und für disjunkte b und c auch $a \times b$ und $a \times c$ disjunkt sind.
(6) Sei $\mu = \max\{\kappa, \lambda\}$. Nach Voraussetzung ist $1 \leq \min\{\kappa, \lambda\}$. Somit

$$\mu \preceq 1 \times \mu \preceq \min\{\kappa, \lambda\} \times \max\{\kappa, \lambda\} \preceq \mu \times \mu = \mu.$$

Die restlichen Behauptungen sind unmittelbar klar. □

Kardinale Exponentiation.

Satz 8.19 (Satz über die kardinale Exponentiation)

(1) Für alle $\kappa, \lambda, \mu \in \mathrm{Card}$: $\kappa^{(\lambda+\mu)} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$.

(2) Für alle $\kappa, \lambda, \mu \in \mathrm{Card}$: $\kappa^{(\lambda\cdot\mu)} = (\kappa^\lambda)^\mu$.

(3) Für alle $\kappa, \lambda, \mu \in \mathrm{Card}$: $(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$

(4) Für alle $\kappa, \lambda, \mu \in \mathrm{Card}$: wenn $\lambda \leq \mu$, so $\kappa^\lambda \leq \kappa^\mu$ und $\lambda^\kappa \leq \mu^\kappa$.

(5) Auf ω stimmt die kardinale Exponentiation mit der üblichen überein.

(6) Für alle $\kappa \in \mathrm{Card}$: $\kappa^0 = 1$ und falls $\kappa \neq 0$: $0^\kappa = 0$.

(7) Für alle $\kappa \in \mathrm{Card}$: $1^\kappa = 1$.

(8) Für alle $\kappa \in \mathrm{Card}$: $2^\kappa = |P(\kappa)|$.

(9) Für alle $\kappa, \mu \in \mathrm{Card}$: wenn ($\kappa \geq \aleph_0$ und $2 \leq \mu \leq \aleph_0$), so $\mu^\kappa = 2^\kappa$.

(10) Für alle $\kappa \in \mathrm{Card}$: $\kappa^0 = 1$.

(11) Für alle $\kappa \in \mathrm{Card}$: $\kappa^1 = \kappa$.

(12) Für alle $\kappa, \lambda \in \mathrm{Card}$: wenn ($\kappa \geq \aleph_0$ und $1 \leq \lambda < \aleph_0$), so $\kappa^\lambda = \kappa$.

Beweis: (1) Die Abbildung $f : {}^{(\lambda\times\{0\})\cup(\mu\times\{1\})}\kappa \to {}^{\lambda}\kappa \times {}^{\mu}\kappa$, die einem $g : \lambda\times\{0\}\cup\mu\times\{1\} \to \kappa$ das Paar (h, h') mit $h(\alpha) = g(\alpha, 0)$ (für $\alpha \in \lambda$) und $h'(\alpha) = g(\alpha, 1)$ (für $\alpha \in \mu$) zuordnet, ist bijektiv.

(2) wurde in Bem. 1.18 (3) bereits bewiesen.

(3)–(8) und (10)–(12) werden dem Leser überlassen.

(9) Wegen $2 \leq \mu$ gilt $2^\kappa \leq \mu^\kappa$. Anderseits gilt $2^\kappa = 2^{\kappa\cdot\kappa} = (2^\kappa)^\kappa \geq \aleph_0^\kappa \geq \mu^\kappa$. □

Lemma 8.20 *Ist $|x| \leq \lambda$ und $\forall y \in x : |y| \leq \kappa$, so ist $|\bigcup x| \leq \lambda \cdot \kappa$.*

Beweis: Wir können annehmen, dass $x \neq \emptyset$ und $y \neq \emptyset$ für alle $y \in x$. Wir wählen (AC) ein surjektives $f_y : \kappa \to y$ für $y \in x$ und ein surjektives $g : \lambda \to x$. Dann ist $h : \lambda \times \kappa \to \bigcup x$ surjektiv, wobei für alle $\alpha \in \lambda$ und $\beta \in \kappa$

$$h(\alpha, \beta) := f_{g(\beta)}(\alpha).$$

Das ergibt mit Lemma 8.1 die Behauptung. □

Lemma 8.21 (Lemma von König und Zermelo) *Sei I eine nicht leere Menge (!) und $(\kappa_i)_{i\in I}$ und $(\lambda_i)_{i\in I}$ Familien von Kardinalzahlen mit $\kappa_i < \lambda_i$ für alle $i \in I$ (!). Dann*

$$\bigcup_{i\in I}\{i\} \times \kappa_i \prec \Pi_{i\in I}\lambda_i.$$

Beweis: $\sum_{i\in I}\kappa_i \preceq \Pi_{i\in I}\lambda_i$: Sei

$$f : \bigcup_{i\in I}\{i\} \times \kappa_i \to \Pi_{i\in I}\lambda_i$$

wie folgt definiert: Für $i \in I$ und $\alpha \in \kappa_i$ sei $f(i,\alpha) : I \to \bigcup_{i\in I}\lambda_i$ mit

$$f(i,\alpha)(j) := \begin{cases} \alpha, & \text{wenn } j = i \\ \kappa_j & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt $f(i,\alpha) \in \Pi_{i\in I}\lambda_i$, da $\kappa_j \in \lambda_j$ für alle $j \in I$ und da $\alpha \in \kappa_i \subseteq \lambda_i$. Ferner ist f injektiv: Sei $(i,\alpha) \neq (j,\beta)$ mit $i,j \in I$, $\alpha \in \kappa_i$ und $\beta \in \kappa_j$. Ist $i = j$ und somit $\alpha \neq \beta$, so

$$f(i,\alpha)(i) = \alpha \neq \beta = f(j,\beta)(i),$$

also $f(i,\alpha) \neq f(j,\beta)$. Ist $i \neq j$ und etwa $\kappa_i = \min\{\kappa_,\kappa_j\}$, so $f(i,\alpha)(i) = \alpha$ mit $\alpha \in \kappa_i$. Somit

$$f(i,\alpha)(i) = \alpha \neq \kappa_i = f(j,\beta)(i),$$

also wieder $f(i,\alpha) \neq f(j,\beta)$.

$\bigcup_{i\in I}\{i\} \times \kappa_i \not\sim \Pi_{i\in I}\lambda_i$: Sei

$$f : \bigcup_{i\in I}\{i\} \times \kappa_i \to \Pi_{i\in I}\lambda_i.$$

Wir zeigen, dass f nicht surjektive ist. Für $i \in I$ sei

$$a_i := \{h(i) \mid h \in W(f \restriction (\{i\} \times \kappa_i)\}.$$

Es gilt $a_i \subseteq \lambda_i$ und

$$\lambda_i > \kappa_i \geq |W(f \restriction (\{i\} \times \kappa_i)| \geq |a_i|,$$

wobei die erste Ungleichung nach Voraussetzung gilt und die weiteren sich jeweils durch Anwendung des Lemmas 8.1 ergeben. Sei $g \in \Pi_{i\in I}\lambda_i$ definiert durch

$$g(i) := \min \lambda_i \setminus a_i.$$

Dann ist $g \notin W(f)$. Wäre nämlich $g = f(i,\alpha)$ mit $i \in I$ und $\alpha \in \kappa_i$, so wäre $g(i) \in a_i$, ein Widerspruch. $\square$

9 Kofinalität und das Kontinuum

Definition 9.1 Sei $\kappa \in \mathrm{Card}_\infty$.

- κ ist *regulär*, wenn

$$\forall x\Big((|x| < \kappa \text{ und } \forall y \in x:\ |y| < \kappa) \to |\bigcup x| < \kappa\Big).$$

- κ ist *singulär*, wenn κ nicht regulär ist.

- κ ist *Limeskardinalzahl*, wenn $\kappa = \aleph_\lambda$ mit Limes λ.

Bemerkung 9.2 *(1) $\aleph_0$, $\aleph_1$ sind regulär.*

(2) Für alle α: $\aleph_{\alpha+1}$ ist regulär.

(3) Ist κ singulär, so ist κ eine Limeskardinalzahl. Insbesondere ist mit $\alpha < \kappa$ auch $\alpha^+ < \kappa$.

(4) $\aleph_\omega$ ist singulär.

Beweis: (2) Ist $|x| < \aleph_{\alpha+1}$ und $\forall y \in x:\ |y| < \aleph_{\alpha+1}$, also $|x| \leq \aleph_\alpha$ und $\forall y \in x:\ |y| \leq \aleph_\alpha$ so ist (wegen Lemma 8.20) $|\bigcup x| \leq \aleph_\alpha \times \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$.

(3) ergibt sich aus (1) und (2).

(4) Für $x := \{\aleph_i \mid i \in \omega\}$ gilt $|x| = \aleph_0 < \aleph_\omega$ und $\forall y \in x:\ |y| < \aleph_\omega$, aber $|\bigcup x| = |\aleph_\omega| = \aleph_\omega$. □

Definition 9.3 Sei $\alpha \in \mathrm{Ord}$.

(1) Eine Menge $x \subseteq \alpha$ ist *kofinal in* α, wenn zu jedem $\beta \in \alpha$ ein $\delta \in x$ mit $\beta \leq \delta$ existiert, wenn also $\bigcup x = \bigcup \alpha$.

(2) Wir setzen

$$\mathrm{cf}(\alpha) := \min\{|x| \mid x \text{ kofinal in } \alpha)\}$$

$\mathrm{cf}(\alpha)$ ist die *Kofinalität von* α.

Bemerkung 9.4 *(1) α ist kofinal in α, somit* $\mathrm{cf}(\alpha) \leq |\alpha|$.

(2) $\emptyset$ ist kofinal in 0; somit $\mathrm{cf}(0) = 0$.

(3) $\{\alpha\}$ ist kofinal in $\alpha + 1$, somit $\mathrm{cf}(\alpha + 1) = 1$.

(4) Ist $\mathrm{Lim}\ \gamma$ *und $x \subseteq \gamma$ kofinal in γ, so ist $\bigcup x = \gamma$. Somit ist x unendlich, also* $\mathrm{cf}(\gamma) \in \mathrm{Card}_\infty$.

(5) $\mathrm{cf} : \mathrm{Ord} \to \{0,1\} \cup \mathrm{Card}_\infty$ *(Achtung:* cf *ist eine echte Klasse).*

(6) $\mathrm{cf}(\alpha) = \min\{\beta \mid \exists f(f : \beta \to \alpha \text{ mit } W(f) \text{ ist kofinal in } \alpha)\}$.

Beweis: (6) Sei x kofinal in α und $\mathrm{cf}(\alpha) = |x|$. Dann gibt es eine Bijektion $g : \mathrm{cf}(\alpha) \to x$. Da $W(g)$ $(= x)$ kofinal in α ist, ist $\mathrm{cf}(\alpha) \geq \min\{\ldots\}$. Sei $f : \beta \to \alpha$ und $W(f)$ kofinal in α. Dann ist $\mathrm{cf}(\alpha) \leq |W(f)| \leq |\beta| \leq \beta$. Somit $\mathrm{cf}(\alpha) \leq \min\{\ldots\}$.

Bemerkung 9.5 *Sei α eine unendliche Ordinalzahl. Dann*

$$\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha \iff \alpha \text{ ist eine reguläre Kardinalzahl.}$$

Beweis: Gelte $\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$. Nach der vorangehenden Bemerkung ist dann $\alpha \in \mathrm{Card}_\infty$. Ist $\lambda := |x| < \alpha$ und $|y| < \alpha$ für alle $y \in x$. Dann ist $\{|y| \mid y \in x\}$ nicht kofinal in α (da $|\{|y| \mid y \in x\}| \leq \lambda \leq \alpha$). Sei $\mu := \sup\{|y| \mid y \in x\}$; somit $\mu < \alpha$ und daher $|\bigcup x| \leq \lambda \cdot \mu < \alpha$.

Sei nun κ eine reguläre Kardinalzahl und $x \subseteq \kappa$ kofinal in κ mit $\mathrm{cf}(\kappa) = |x|$. Da $|y| \leq \kappa$ für alle $y \in x$, ist $|x| \geq \kappa$. □

Bemerkung 9.6 *Ist κ singulär, so gibt es ein $f : \mathrm{cf}(\kappa) \to \kappa$ mit in κ kofinalem $W(f)$, das streng monoton ist und für das $W(f) \subseteq \mathrm{Card}_\infty$ gilt.*

Beweis: Da κ singulär ist, ist $\aleph_0 < \kappa$ und $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$. Nach Bemerkung 9.4 (6) gibt es ein $g : \mathrm{cf}(\kappa) \to \kappa$ mit in κ kofinalem $W(g)$. Wir definiere $f : \mathrm{cf}(\kappa) \to \mathrm{Ord}$ durch transfinite Induktion:

$$\begin{array}{rrcl} & f(0) & := & \aleph_0 \\ \text{für } \alpha < \mathrm{cf}(\kappa) & f(\alpha+1) & := & \max\{f(\alpha)^+, g(\alpha)^+\} \\ \text{für } \gamma < \mathrm{cf}(\kappa) \text{ mit } \mathrm{Lim}\ \gamma & f(\gamma) & := & \sup\{f(\alpha) \mid \alpha < \gamma\}. \end{array}$$

Durch transfinite Induktion zeigt man mit Bemerkung 8.7, dass $W(f) \subseteq \mathrm{Card}_\infty$ und mit Hilfe der Singularität von κ und Bemerkung 9.2 (6), dass $W(f) \subseteq \kappa$. Aus der Definition von $f(\alpha+1)$ ergibt sich $\kappa \geq \sup W(f) \geq \sup W(g) = \kappa$. □

Satz 9.7 *Für alle $\gamma \in \mathrm{Ord}$ mit $\mathrm{Lim}\ \gamma$ ist $\mathrm{cf}(\gamma)$ eine reguläre Kardinalzahl.*

Beweis: Wegen Bemerkung 9.4 (4) ist $\mathrm{cf}(\gamma) \in \mathrm{Card}_\infty$. Wäre $\mathrm{cf}(\gamma)$ singulär, so $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\gamma)) < \mathrm{cf}(\gamma)$ (wegen Bemerkung 9.5). Mit Bemerkung 9.6 wählen wir ein streng monotones $f : \mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\gamma)) \to \mathrm{cf}(\gamma)$ mit $\sup W(f) = \mathrm{cf}(\gamma)$ und mit Bemerkung 9.4 (6) ein $g : \mathrm{cf}(\gamma) \to \gamma$ mit $\sup W(g) = \gamma$. Wir definieren h auf $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\gamma))$ durch

$$h(\beta) := \sup\{g(\delta) \mid \delta < f(\beta)\}.$$

Wegen Bemerkung 9.4 (6) gillt $W(h) \subseteq \gamma$. Somit

$$\gamma \geq \sup W(h) \geq \sup W(g) = \gamma$$

und daher ist $\mathrm{cf}(\kappa) \leq \mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\kappa))$, ein Widerspruch. □

Satz 9.8 *Für alle* $\kappa \in \mathrm{Card}_\infty$*:*

(1) $\kappa < \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$

(2) $\kappa < \mathrm{cf}(2^\kappa)$*. Insbesondere* $\aleph_0 < \mathrm{cf}(2^{\aleph_0})$*, also etwa* $2^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega$*.*

Beweis: (1) Ist κ regulär, so $\kappa < 2^\kappa \leq \kappa^\kappa = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$. Ist κ singulär, so wählen wir $f : \mathrm{cf}(\kappa) \to \kappa$ mit in κ kofinalem $W(f) \subseteq \mathrm{Card}_\infty$. Nun ist (wir verwenden bei $<$ das Lemma von König unnd Zermelo)

$$\kappa = \bigcup W(f) = |\bigcup W(f)| \leq |\bigcup_{\beta \in \mathrm{cf}(\kappa)} \{\beta\} \times f(\beta)| < |\Pi_{\beta \in \mathrm{cf}(\kappa)} \kappa| = |{}^{\mathrm{cf}(\kappa)}\kappa| = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}.$$

(2) Wäre $\mathrm{cf}(2^\kappa) \leq \kappa$, so wegen (1) angewendet auf 2^κ

$$2^\kappa < (2^\kappa)^{\mathrm{cf}(2^\kappa)} \leq (2^\kappa)^\kappa = 2^{\kappa \cdot \kappa} = 2^\kappa.$$

$\square$

Teilmengen von $\mathbb{R}$

Definition 9.9 Für $a \subseteq \mathbb{R}$ sei

$$a' := \{r \in \mathbb{R} \mid r \text{ Häufungspunkt von } a\}$$

die *(Cantorsche) Ableitung von* x. Ist $a' = a$, so ist a *perfekt*.

Somit ist a abgeschlossen gdw $a' \subseteq a$ und daher ist jede perfekte Menge abgeschlossen. Darüberhinaus ist stets a' abgeschlossen. Die leere Menge, $\mathbb{R}$, jedes abgeschlossene Intervall $[r, s]$ (mit $r, s \in \mathbb{R}$) und das Cantorsche Diskontinuum sind perfekt.

Satz 9.10 *Ist* a *mit* $\emptyset \neq a \subseteq \mathbb{R}$ *perfekt, so* $|a| = 2^{\aleph_0}$*.*

Beweis: Sei a mit $\emptyset \neq a \subseteq \mathbb{R}$ perfekt. I (ggf. mit Indizes) stehe in diesem Beweis für Intervalle der Gestalt $]r, s[$ mit $r, s \in \mathbb{R}$ und $r < s$.. Aus der Analysis wissen wir:

(1) Ist $I_0 \supseteq I_1 \supseteq \ldots$ und $a \cap I_j \neq \emptyset$ für alle $j \in \omega$, so $a \cap \bigcap_{j \in \omega} \bar{I}_j = \bigcap_{j \in \omega}(a \cap \bar{I}_j) \neq \emptyset$.

Weiterhin gilt

$$\text{Wenn } a \cap I \neq \emptyset, \text{ so existieren } I_0, I_1 \subseteq I \text{ mit } \bar{I}_0 \cap \bar{I}_1 = \emptyset,\ a \cap I_0 \neq \emptyset \text{ und } a \cap I_1 \neq \emptyset. \quad (7)$$

Ist nämlich $x \in a \cap I$, so gibt es, da a perfekt ist, ein $y \in a \cap I$ mit $y \neq x$. Hinreichend kleine Intervalle I_0, I_1 mit $x \in I_0$ und $y \in I_1$ erfülllen dann die Bedingungen.

Durch sukzessive Anwendung von (7) erhalten wir (mit Hilfe einer Auswahlfunktion auf der Menge aller Intervalle) für jedes $f \in^\omega 2$ und jedes $j \in \omega$ ein Intervall $I_{f(0)\dots f(j)}$ mit

$$a \cap I_{f(0)\dots f(j)} \neq \emptyset, \qquad \overline{I_{f(0)\dots f(j)}} \cap \overline{I_{f(0)\dots f(j-1)(1-f(j))}} = \emptyset$$
$$\text{und für } j > 0 : I_{f(0)\dots f(j)} \subseteq I_{f(0)\dots f(j-1)}$$

Daher ist für $f \in^\omega 2$ der Durchschnitt $a \cap \bigcap_{j\in\omega} \overline{I_{f(0)\dots f(j)}} \neq \emptyset$ und wir können (mit (AC)) $x_f \in \bigcap_{j\in\omega} \overline{I_{f(0)\dots f(j)}}$ wählen. Die Abbildung $f \mapsto x_f$ von ${}^\omega 2 \to a$ ist nach Wahl der Intervalle injektiv, woraus sich die Behauptung ergibt. $\square$

Für eine abgeschlossene Menge $a \subseteq \mathbb{R}$ definieren wir die *α-te (Cantorsche) Ableitung a^α von a* durch transfinite Induktion:

$$\begin{aligned} a^0 &= a \\ a^{\alpha+1} &= (a^\alpha)' \\ \text{wenn Lim } \gamma, \text{ so} \qquad a^\gamma &= \bigcap\{a^\alpha \mid \alpha < \gamma\}. \end{aligned}$$

Lemma 9.11 *Sei $a \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen. Dann gelten*

(1) Für alle α, β : (wenn $\alpha < \beta$, so $a^\alpha \supseteq a^\beta$).

(2) Wenn $a^\alpha = a^{\alpha+1}$, so $a^\alpha = a^\beta$ für alle α, β mit $\alpha < \beta$.

(3) Ist $x \in a \setminus \bigcap\{a^\alpha \mid \alpha \in \mathrm{Ord}\}$, so gibt eine eindeutig bestimmte Ordinalzahl $\alpha(x)$ mit

$$x \in a^{\alpha(x)} \setminus a^{\alpha(x)+1}.$$

(4) $a \setminus \bigcap\{a^\alpha \mid \alpha \in \mathrm{Ord}\}$ ist höchstens abzählbar.

(5) Es gibt eine kleinste Ordinalzahl, die wir mit $d(a)$ bezeichnen, mit

$$a^{d(a)} = \bigcap\{a^\alpha \mid \alpha \in \mathrm{Ord}\}.$$

Somit ist $a^{d(a)}$ perfekt.

(6) $d(a) < \aleph_1$.

Beweis: (1) und (2) folgen unmittelbar aus der Definition der Cantorschen Ableitung.

(3) Sei $x \in a \setminus \bigcap\{a^\alpha \mid \alpha \in \mathrm{Ord}\}$. Wir wählen das kleinste β mit $x \notin a^\beta$. Dann ist $\beta \neq 0$ und β kann auch keine Limeszahl sein. Somit gibt es $\beta = \alpha + 1$ für ein α. Nun ist $\alpha(x) = \alpha$.

(4) Sei $(I_j)_{j\in\omega}$ eine Aufzählung der *offenen Intervalle mit rationalen Koeffizienten.* Ist $x \in a \setminus \bigcap\{a^\alpha \mid \alpha \in \mathrm{Ord}\}$, also $x \in a^{\alpha(x)} \setminus a^{\alpha(x)+1}$, so ist x kein Häufungspunkt von $a^{\alpha(x)}$. Es gibt also ein $j(x) \in \omega$, so dass

$$a^{\alpha(x)} \cap I_{j(x)} = \{x\} \qquad \text{und für alle } \beta > \alpha(x) : \; a^\beta \cap I_{j(x)} = \emptyset.$$

Es genügt zu zeigen, dass $x \mapsto j(x)$ eine injektive Abbildung von $a \setminus \bigcap\{a^\alpha \mid \alpha \in \mathrm{Ord}\}$ nach ω ist.

Seien also $x, y \in a \setminus \bigcap\{a^\alpha \mid \alpha \in \mathrm{Ord}\}$ und $x \neq y$. Ist $\alpha(x) \neq \alpha(y)$, etwa $\alpha(x) < \alpha(y)$, so ist $j(x) \neq j(y)$ wegen $a^{\alpha(y)} \cap I_{j(x)} = \emptyset$ und $a^{\alpha(x)} \cap I_{j(x)} = \{x\}$. Ist $\alpha(x) = \alpha(y)$, so ist $j(x) \neq j(y)$ wegen $a^{\alpha(x)} \cap I_{j(x)} = \{x\}$ und $a^{\alpha(x)} \cap I_{j(y)} = \{y\}$.

(5) und (6) Durch $x \mapsto \alpha(x)$ wird eine Abbildung $f : a \setminus \bigcap\{a^\alpha \mid \alpha \in \mathrm{Ord}\} \to \mathrm{Ord}$ definiert. Nach (4) ist der Wertebereich $W(f)$ höchstens abzählbar und wegen (2) ist mit $\beta \in W(f)$ auch jedes α mit $\alpha < \beta$ in $W(f)$. Somit ist $W(f)$ eine höchstens abzählbare Ordinalzahl. Da $\bigcap_{\alpha \in \mathrm{Ord}}\{a^\alpha \mid \alpha \in \mathrm{Ord}\} = \bigcap_{\alpha \leq W(f)+1} a^\alpha$ ergeben sich daher die Behauptungen. □

Satz 9.12 *Ist $a \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen, so ist $|a| \leq \aleph_0$ oder $|a| = 2^{\aleph_0}$.*

Beweis: Es gilt $a = (a \setminus a^{d(a)}) \cup a^{d(a)}$. Ist $a^{d(a)} = \emptyset$, so ist $|a| \leq \aleph_0$ nach (4) und (5) des vorangehenden Lemmas. Ist $a^{d(a)} \neq \emptyset$, so ist bereits $|a^{d(a)}| = 2^{\aleph_0}$. □

10 Ordinalzahlarithmetik

Wir erinnern an die Definition der Addition und Multiplikation von Ordinalzahlen

$$\begin{aligned}\alpha+\beta &= \mathrm{wo}\big((\alpha,\in_\alpha)+(\beta,\in_\beta)\big)\\ \alpha\cdot\beta &= \mathrm{wo}\big((\alpha,\in_\alpha)\times(\beta,\in_\beta)\big).\end{aligned}$$

Satz 10.1 (Satz über die ordinale Addition) *(1) Die ordinale Addition ist assoziativ (jedoch nicht kommutativ, da etwa $1+\omega\neq\omega+1$).*

(2) $\forall\alpha:\quad \alpha+0=\alpha=0+\alpha.$

(3) $\forall\alpha,\beta,\gamma\in\mathrm{Ord}$*:* $(\beta<\gamma\iff\alpha+\beta<\alpha+\gamma)$.

(4) $\forall\alpha,\beta,\gamma\in\mathrm{Ord}$*: (wenn* $\alpha+\beta=\alpha+\gamma$*, so* $\beta=\gamma$*) (jedoch* $1+\omega=0+\omega$*).*

(5) Für alle α, β mit $\alpha\leq\beta$ gibt es genau ein γ mit $\alpha+\gamma=\beta$ (jedoch ist die Gleichung $x+\omega=\aleph_1$ nicht lösbar).

(6) Für jedes α und jede Menge a von Ordinalzahlen gilt:

$$\alpha+\sup a=\sup\{\alpha+\beta\mid\beta\in a\}$$

(jedoch $\sup\omega+\omega\neq\sup\{i+\omega\mid i\in\omega\}$*).*

Beweis: (3) Wenn $\beta<\gamma$, so gibt es einen Isomorphismus von $\big((\alpha,\in_\alpha)+(\beta,\in_\beta)\big)$ auf ein echtes Anfangsstück von $\big((\alpha,\in_\alpha)+(\gamma,\in_\beta)\big)$. Hieraus folgt die Behauptung mitSatz 2.21.

Sei nun $\alpha+\beta<\alpha+\gamma$. Wiederum nach Satz 2.21 muss der eindeutig bestimmte Isomorphismus von $\big((\alpha,\in_\alpha)+(\beta,\in_\beta)\big)$ auf ein echtes Anfangsstück von $\big((\alpha,\in_\alpha)+(\gamma,\in_\beta)\big)$ die jeweiligen α-Teile aufeinander abbilden und damit ist er ein Isomorphismus von $(\beta,\in_\beta)$ auf ein echtes Anfangsstück von$(\gamma,\in_\gamma)$. Somit $\beta<\gamma$.

(4) folgt unmittelbar aus (3).

(5) Sei $\alpha\leq\beta$. Dann ist $\mathrm{wo}(\{\delta\mid\alpha\leq\delta<\beta\}$ das gesuchte γ.

(6) Da $\alpha+\beta\leq\alpha+\sup a$ für alle $\beta\in a$, gilt $\sup\{\alpha+\beta\mid\beta\in a\}\leq\alpha+\sup a$. Wir nehmen an $\sup\{\alpha+\beta\mid\beta\in a\}<\alpha+\sup a$ und wählen mit (5) ein γ mit $\sup\{\alpha+\beta\mid\beta\in a\}=\alpha+\gamma$. Dann $\gamma<\sup a$ und somit gibt es $\beta\in a$ mit $\gamma<\beta$. Dann ist $\alpha+\gamma<\alpha+\beta\leq\alpha+\sup a$, ein Widerspruch. □

Folgerung 10.2 *Die Ordinalzahladdition kann induktiv wie folgt definiert werden.*

$$\begin{aligned}\alpha+0 &:= \alpha\\ \alpha+(\beta+1) &:= (\alpha+\beta)+1\\ \textit{wenn } \mathrm{Lim}\,\gamma\textit{, so}\qquad \alpha+\gamma &:= \sup\{\alpha+\beta\mid\beta<\gamma\}.\end{aligned}$$

Satz 10.3 (Satz über die ordinale Multiplikation) *(1)* $\forall \alpha \in \mathrm{Ord}$*: (*$1 \cdot \alpha = \alpha = \alpha \cdot 1$ *und* $0 \cdot \alpha = 0 = \alpha \cdot 0$*).*

(2) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Ord},\ \alpha > 0$*: (*$\beta < \gamma \iff \alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma$*).*

Insbesondere ist für $\alpha > 0$ *und* $1 < \gamma$*:* $\alpha < \alpha \cdot \gamma$.

(3) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Ord},\ \alpha > 0$*: (wenn* $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma$*, so* $\beta = \gamma$*)* *(jedoch* $1 \cdot \omega = 2 \cdot \omega$*).*

(4) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Ord}$*: (wenn* $\alpha \leq \beta$*, so* $\alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$*.)*

(5) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Ord}$*:* $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

(6) (Division mit Rest) $\forall \alpha, \beta \in \mathrm{Ord},\ \beta > 0$*, gibt es ein eindeutig bestimmtes Paar* $(\delta, \rho) \in \mathrm{Ord} \times \mathrm{Ord}$ *mit*

$$\alpha = \beta \cdot \delta + \rho \quad \textit{und} \quad \rho < \beta.$$

(7) Für jedes α *und jede Menge* a *von Ordinalzahlen gilt:*

$$\alpha \cdot \sup a = \sup\{\alpha \cdot \beta \mid \beta \in a\}$$

(jedoch $(\sup \omega) \cdot = \omega \cdot \omega \neq \omega = \sup\{i \cdot \omega \mid i \in \omega\}$*).*

Beweis: (1) und (4) folgen unmittelbar aus den Definitionen.

(2) Wenn $\beta < \gamma$, so wird durch $(\xi, \eta) \mapsto (\xi, \eta)$ ein Isomorphismus von $(\alpha, \in_\alpha) \times (\beta, \in_\beta)$ auf ein echtes Anfangsstück von $(\alpha, \in_\alpha) \times (\gamma, \in_\gamma)$ definiert. Hieraus folgt die Behauptung mit Satz 2.21.

Sei nun $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma$. Wiederum nach Satz 2.21 gibt es einen eindeutig bestimmten Isomorphismus f von $(\alpha, \in_\alpha) \times (\beta, \in_\beta)$ auf ein echtes Anfangsstück von $(\alpha, \in_\alpha) \times (\gamma, \in_\gamma)$. Durch transfinite Induktion über ξ und bei festem ξ durch transfinite Induktion über η zeigt man

$$f((\xi, \eta)) = (\xi, \eta).$$

Somit ist $g : \beta \to \gamma$ mit $g(\delta) = \delta$ wohldefiniert. Wäre g surjektiv, so auch f. Somit $\beta < \gamma$.

(3) ergibt sich unmittelbar aus (2).

(5) Allgemein gilt für Ordnungen (a, r), (b, s) und (c, t)

$$(a, r) \cdot \big((b, s) + (c, t))\big) \cong \big((a, r) \cdot (b, s)\big) + \big((a, r) \cdot (c, t)\big).$$

(6) *Eindeutigkeit:* Wir nehmen an, dass

$$\big(\alpha = \beta \cdot \delta + \rho \ \text{ mit } \ \rho < \beta\big) \ \text{ und } \ \big(\alpha = \beta \cdot \delta' + \rho' \ \text{ mit } \ \rho' < \beta\big)$$

Wäre $\delta < \delta'$, so $\beta \cdot \delta + \beta = \beta \cdot (\delta + 1) \leq \beta \cdot \delta'$, also $\beta \cdot \delta + \rho < \beta \cdot \delta + \beta \leq \beta \cdot \delta' + \rho'$, Widerspruch. Aus $\delta = \delta'$ ergibt sich $\rho = \rho'$ aus Teil (4) des vorangehenden Satzes.

Existenz: Wegen (1) und (4) gilt $\alpha \leq \beta \cdot \alpha$. Gilt $\alpha = \beta \cdot \alpha$, so sind wir fertig. Sonst gibt es ein $(\rho, \delta) \in \beta \times \alpha$, so dass das $(\alpha, \in_\alpha)$ zu dem durch (ρ, δ) in $(\beta, \in_\beta) \times (\alpha, \in_\alpha)$ bestimmten Anfangsstück $a(\rho, \delta)$ isomorph ist. Es gilt

$$a(\rho, \delta) = \{(\xi, \eta) \in \beta \times \alpha \mid \big(\eta < \delta \text{ oder } (\eta = \delta \text{ und } \xi < \rho)\big)\}.$$

Dieses Anfangsstück ist zur Ordinalzahl $\beta \cdot \delta + \rho$ isomorph.

(7) Da $\alpha \cdot \beta \leq \alpha \cdot \sup a$ für alle $\beta \in a$, gilt $\sup\{\alpha \cdot \beta \mid \beta \in a\} \leq \alpha \cdot \sup a$. Sei δ eine obere Schranke von $\sup\{\alpha \cdot \beta \mid \beta \in a\}$. Es genügt zu zeigen: $\alpha \cdot \sup a \leq \delta$. Nach (6) gibt es ξ und $\rho < \alpha$ mit $\delta = \alpha \cdot \xi + \rho$. Wäre $\xi < \sup a$, dann gäbe es $\beta \in a$ mit $\xi < \beta$, also $\xi + 1 \leq \beta$ und damit

$$\alpha \cdot \beta \geq \alpha \cdot (\xi + 1) = \alpha \cdot \xi + \alpha > \alpha \cdot \xi + \rho = \delta,$$

ein Widerspruch. Somit $\sup a \leq \xi$ und daher $\alpha \cdot \sup a \leq \alpha \cdot \xi + \rho = \delta$. □

Folgerung 10.4 *Die Ordinalzahlmultiplikation kann induktiv wie folgt definiert werden.*

$$\begin{array}{rrcl} & \alpha \cdot 0 & := & 0 \\ & \alpha \cdot (\beta + 1) & := & (\alpha \cdot \beta) + 1 \\ \textit{wenn } \mathrm{Lim}\ \gamma, \textit{ so} & \alpha \cdot \gamma & := & \sup\{\alpha \cdot \beta \mid \beta < \gamma\}. \end{array}$$

Definition 10.5 Die Ordinalzahlexponentiation wird induktiv wie folgt definiert:

$$\begin{array}{rrcl} & \beta^0 & := & 1 \\ & \beta^{\alpha+1} & := & \beta^\alpha \cdot \beta \\ \text{wenn Lim } \gamma, \text{ so} & \beta^\gamma & := & \sup\{\beta^\alpha \mid 0 < \alpha < \gamma\}. \end{array}$$

Aus dieser Definition und den Folgerungen 10.2 und 10.4 ergibt sich:

Bemerkung 10.6 *Die Ordinalzahladdition, die Ordinalzahlmultiplikation und die Ordinalzahlexponentiation stimmen auf ω mit der üblichen Addition, Multiplikation bzw. Exponentiation überein.*

Bemerkung 10.7 *(1) Ist $\alpha \neq 0$, so $0^\alpha = 0$.*

(2) $\forall \alpha \in \mathrm{Ord}$: $1^\alpha = 1$.

(3) $\forall \beta > 1, \forall \alpha, \alpha' \in \mathrm{Ord}$: wenn $\alpha < \alpha'$, so $\beta^\alpha < \beta^{\alpha'}$.

(4) Ist $\beta > 0$ und $\mathrm{Lim}\ \gamma$, so $\beta^\gamma = \sup\{\beta^\alpha \mid \alpha < \gamma\}$.

(5) Ist $\beta > 1$, so für alle $\alpha \in \mathrm{Ord}$: $\alpha \leq \beta^\alpha$.

(6) Sei $\beta > 0$, $i \in \omega$, $i \geq 1$, $\alpha_1, \dots, \alpha_i, \xi_1, \dots, \xi_i \in \mathrm{Ord}$ mit

$$\alpha_1 > \cdots > \alpha_i \qquad \textit{und} \qquad \xi_1, \dots, \xi_i < \beta,$$

so ist

$$\beta^{\alpha_1} \cdot \xi_1 + \cdots + \beta^{\alpha_i} \cdot \xi_i < \beta^{\alpha_1 + 1}.$$

(7) Sei $\beta > 1$. Für jede Ordinalzahl $\epsilon > 0$ gibt es ein eindeutig bestimmtes Tripel (α, ξ, δ) mit

$$\epsilon = \beta^\alpha \cdot \xi + \delta \quad \textit{und} \quad 0 < \xi < \beta \textit{ und } \delta < \beta^\alpha.$$

Beweis: (3) Wir führen den Beweis für festes α durch transfinite Induktion über α'. Ist $\alpha' = \alpha + 1$, so $\beta^{\alpha'} = \beta^{\alpha+1} = \beta^\alpha \cdot \beta > \beta^\alpha \cdot 1 = \beta$, wobei die Ungleichung wegen Satz 10.3 (2) gilt. Die anderen Fälle ergeben sich unmittelbar aus der Induktionsvoraussetzung.

(4) ergibt sich aus der Definition der Exponentiation mit (2), falls $\beta = 1$, und mit (3), falls $\beta > 1$.

(5) Wir führen eine Induktion über α. Für $\alpha = 0$ gilt $0 \leq \beta^0 = 1$. Für $\alpha + 1$ haben wir wegen der Induktionsvoraussetzung $\alpha \leq \beta^\alpha < \beta^{\alpha+1}$ (wegen (3)) und somit $\alpha + 1 \leq \beta^{\alpha+1}$. Der Limesschritt ist klar.

(6) Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion über $i \in \omega$: Für $i = 1$ gilt nach (2) im Satz 10.3 mit $\xi_1 < \beta$ auch $\beta^{\alpha_1} \cdot \xi_1 < \beta^{\alpha_1} \cdot \beta = \beta^{\alpha_1+1}$. Sei $i > 1$ und die Behauptung für $i - 1$ Summanden richtig, so ist daher

$$\begin{aligned}\beta^{\alpha_1} \cdot \xi_1 + \beta^{\alpha_2} \cdot \xi_2 + \cdots + \beta^{\alpha_i} \cdot \xi_i &< \beta^{\alpha_1} \cdot \xi_1 + \beta^{\alpha_2+1} \\ &\leq \beta^{\alpha_1} \cdot \xi_1 + \beta^{\alpha_1} = \beta^{\alpha_1} \cdot (\xi_1 + 1) \leq \beta^{\alpha_1} \cdot \beta = \beta^{\alpha_1+1}.\end{aligned}$$

(7) Wegen (5) ist $\epsilon \leq \beta^\epsilon$; somit existiert $\alpha := \sup\{\alpha' \mid \beta^{\alpha'} \leq \epsilon\}$. Aus der Definition der Exponentiation ergibt sich $\beta^\alpha \leq \epsilon$. Nach der Division mit Rest erhalten wir ξ und δ mit $\epsilon = \beta^\alpha \cdot \xi + \delta$ und $\delta < \beta^\alpha$. Da $\beta^\alpha \cdot \beta > \epsilon$, ergibt sich $0 < \xi < \beta$.

Angenommen es gelte auch $\epsilon = \beta^{\alpha_0} \cdot \xi_0 + \delta_0$. mit $0 < \xi_0 < \beta$ und $\delta_0 < \beta^{\alpha_0}$. Wäre $\alpha_0 \neq \alpha$, so $\alpha_0 < \alpha$ nach Definition von α. Dann $\beta^{\alpha_0} \cdot \xi_0 + \delta_0 < \beta^{\alpha_0} \cdot \xi_0 + \beta^{\alpha_0} = \beta^{\alpha_0} \cdot (\xi + 1) \leq \beta^{\alpha_0} \cdot \beta \leq \beta^{\alpha_0+1} \leq \beta^\alpha \leq \epsilon$, ein Widerspruch. Somit ist $\alpha_0 = \alpha$. Aus der Eindeutigkeit der Division mit Rest ergibt sich dann $\xi_0 = \xi$ und $\delta_0 = \delta$. □

Satz 10.8 (Cantorsche Normalform für Ordinalzahlen) *Sei $\beta > 1$. Dann hat jede Ordinalzahl $\alpha > 0$ eine eindeutig bestimmte β-*adische Darstellung *(oder* Darastellung zur Basis *β), d.h. es gibt eindeutig bestimmte $i \in \omega$, $i \geq 1$, $\alpha_1, \dots, \alpha_i, \xi_1, \dots, \xi_i \in Ord$ mit*

$$\alpha_1 > \cdots > \alpha_i \qquad \textit{und} \qquad 0 < \xi_1, \dots, \xi_i < \beta,$$

und

$$\alpha = \beta^{\alpha_1} \cdot \xi_1 + \cdots + \beta^{\alpha_i} \cdot \xi_i. \tag{8}$$

Beweis: Eindeutigkeit. Wäre die Behauptung falsch, so gäbe es eine kleinste Ordinalzahl α mit zwei derartige Darstellung haben, etwa

$$\beta^{\alpha_1} \cdot \xi_1 + \underbrace{\beta^{\alpha_2} \cdot \xi_2 + \cdots + \beta^{\alpha_i} \cdot \xi_i}_{=\delta} = \beta^{\alpha'_1} \cdot \xi'_1 + \underbrace{\beta^{\alpha'_2} \cdot \xi'_{2'} \cdots + \beta^{\alpha'_i} \cdot \xi'_{\ell'}}_{=\delta'}.$$

Nach Bem 10.7 (6) gilt $\delta < \beta^{\alpha_1}$ und $\delta' < \beta^{\alpha'_1}$. Aus der Eindeutigkeit in Bem 10.7 (7) ergibt sich $\alpha_1 = \alpha'_1$, $\xi_1 = \xi'_1$ und $\delta = \delta'$. Anwendung der Induktionsvoraussetzung auf δ ergibt die Behauptung.

Existenz. Wäre die Behauptung falsch, so gäbe es eine kleinste Ordinalzahl α, die keine entsprechende Darstellung hat. Mit Bem 10.7 (7) wählen wir α_1, ξ_1 und δ mit

$$\alpha = \beta^{\alpha_1} \cdot \xi_1 + \delta \quad \text{und} \quad 0 < \xi_1 < \beta \text{ und } \delta < \beta^{\alpha_1}.$$

Ist $\delta = 0$, so ist $\alpha = \beta^{\alpha_1} \cdot \xi_1$ die β-adische Darstellung. Ist $\delta > 0$, so besitzt nach Wahl von α die Ordinalzahl δ eine β-adische Darstellung. Damit hat auch α eine solche Darstellung, ein Widerspruch. □

Eine Anwendung: Die Goodsteinfolge. Wir erinnern zunächst an die Definition der Goodsteinfolge. Sei $d \in \omega$, $d > 1$. Für $n \in \omega$ mit $n \geq 1$ bezeichne $[n]_d$ die Darstellung von n zur Basis d.

$$[23]_2 = 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0, \quad [23]_3 = 3^2 \cdot 2 + 3^1 + 3^0 \cdot 2, \quad [23]_4 = 4^2 + 4^1 + 4^0 \cdot 3.$$

Ersetzt man in ihr in den Exponenten, Exponenten von Exponenten,... alle Zahlen größer als d, wiederum durch ihre Darstellung zur Basis d, so erhält man schließlich die *Superdarstellung* $[[n]]_d$ *von* n *zur Basis* d, also etwa

$$[[23]]_2 = 2^{2^2} + 2^2 + 2^1 + 2^0.$$

Oder etwa

$$[266]_2 = 2^8 + 2^3 + 2^1 \qquad \text{und} \qquad [[266]]_2 = 2^{2^{2+2^0}} + 2^{2+2^0} + 2^1.$$

Für $n \in \omega$ und $d > 1$ sei $G(d, n) \in \omega$ wie folgt definiert:

- Wenn $n = 0$, so $G(d, n) = 0$.
- Wenn $n \geq 1$, so erhält man $G(d, n)$ in dem man in der Superdarstellung $[[n]]_d$ von n zur Basis d alle vorkommenden d durch $d + 1$ ersetzt und von der dadurch resultierenden Zahl 1 subtrahiert.

Somit

$$G(2,23) = 3^{3^3} + 3^3 + 3^1 + 3^0 - 1 = 3^{3^3} + 3^3 + 3^1$$

$$G(2,266) = 3^{3^{3+3^0}} + 3^{3+3^0} + 3^1 - 1 = 3^{3^{3+3^0}} + 3^{3+3^0} + 3^0 \cdot 2.$$

Für $n \geq 1$, definiert man nun die Folge

$$n_1, n_2, n_3, \ldots$$

wie folgt:

- $n_1 := n$
- wenn $n_\ell = 0$, so $n_{\ell+1} = 0$; sonst $n_{\ell+1} := G(\ell+1, n_\ell)$,

also

$$n_1 = n, \quad n_2 = G(2, n_1), \quad n_3 = G(3, n_2), \ldots$$

So erhalten wir für $n = 266$

$$\begin{array}{lcl}
266_1 & = & 2^{2^{2+2^0}} + 2^{2+2^0} + 2^1 \\
266_2 & = & 3^{3^{3+3^0}} + 3^{3+3^0} + 3^1 - 1 = 3^{3^{3+3^0}} + 3^{3+3^0} + 3^0 \cdot 2 \\
266_3 & = & 4^{4^{4+4^0}} + 4^{4+4^0} + 4^0 \cdot 2 - 1 = 4^{4^{4+4^0}} + 4^{4+4^0} + 4^0 \cdot 1 \\
266_4 & = & 5^{5^{5+5^0}} + 5^{5+5^0} + 5^0 \cdot 1 - 1 = 5^{5^{5+5^0}} + 5^{5+5^0} \\
266_5 & = & 6^{6^{6+6^0}} + 6^{6+6^0} - 1 = 6^{6^{6+6^0}} + 6^6 \cdot 5 + 6^5 \cdot 5 + 6^4 \cdot 5 + 6^3 \cdot 5 + 6^2 \cdot 5 + 6^1 \cdot 5 + 6^0 \cdot 5 \\
266_5 & = & 6^{6^{6+6^0}} + \text{LK von Potenzen von 6 mit Exponeneten} < 6 + 6^0 \\
 & \vdots &
\end{array}$$

Satz 10.9 (Satz von Goodstein) *Für alle $n \in \omega$ mit $n \geq 1$ gibt es ein $\ell \geq 1$ mit $n_\ell = 0$.*

Beweis: Sind $k, d \in \omega$ und $k \geq 1$ und $d > 1$, so bezeichne $[[k]]_d^\omega$ die Ordinalzahl, die man aus der Superdarstellung $[[k]]_d$ von k zur Basis d erhält, indem man *alle* vorkommenden d's durch ω ersetzt. Damit erhält man die Cantorsche Normalform von $[[k]]_d^\omega$ zur Basis ω.

Somit gilt

$$[[266]]_2^\omega = [[2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2^1]]_2^\omega = \omega^{\omega^{\omega+1}} + \omega^{\omega+1} + \omega^1$$

$$[[3^{3^{3+3^0}} + 3^{3+3^0} + 3^0 \cdot 2]]_3^\omega = \omega^{\omega^{\omega+\omega^0}} + \omega^{\omega+\omega^0} + \omega^0 \cdot 2$$

$$[[4^{4^{4+1}} + 4^{4+1} + 1 \cdot 4^0]_4^\omega = \omega^{\omega^{\omega+1}} + \omega^{\omega+1} + 1 \cdot \omega^0$$

$$[[5^{5^{5+1}} + 5^{5+1}]]_5^\omega = \omega^{\omega^{\omega+1}} + \omega^{\omega+1}$$

Sei nun $n \geq 1$ gegeben. Wir nehmen an, dass $n_\ell > 0$ für $\ell = 1, 2, \ldots$ und betrachten die unendliche Folge von Ordinalzahlen ≥ 1

$$[[n_1]]_2^\omega, [[n_2]]_3^\omega, [[n_3]]_4^\omega, \ldots, \tag{9}$$

Also im Fall $n = 266$ die Folge

$$\begin{array}{rcl}
[[266_1]]_2^\omega & = & \omega^{\omega^{\omega+\omega^0}} + \omega^{\omega+\omega^0} + \omega^1 \\
[[266_2]]_3^\omega & = & \omega^{\omega^{\omega+\omega^0}} + \omega^{\omega+\omega^0} + \omega^0 \cdot 2 \\
[[266_3]]_4^\omega & = & \omega^{\omega^{\omega+\omega^0}} + \omega^{\omega+\omega^0} + \omega^0 \cdot 1 \\
[[266_4]]_5^\omega & = & \omega^{\omega^{\omega+\omega^0}} + \omega^{\omega+\omega^0} \\
[[266_5]]_6^\omega & = & \omega^{\omega^{\omega+\omega^0}} + \omega^\omega \cdot 5 + \omega^5 \cdot 5 + \omega^4 \cdot 5 + \omega^3 \cdot 5 + \omega^2 \cdot 5 + \omega^1 \cdot 5 + \omega^0 \cdot 5 \\
[[266_5]]_6^\omega & = & \omega^{\omega^{\omega+\omega^0}} + \text{LK von Potenzen von } \omega \text{ mit Exponeneten} < \omega + \omega^0 \\
 & \vdots &
\end{array}$$

Wir zeigen

$$[[n_\ell]]_{\ell+1}^\omega > [[n_{\ell+1}]]_{\ell+2}^\omega. \tag{10}$$

Hieraus ergibt sich die Behauptung, da es keine unendliche echt absteigende Folge gibt. Sei also $[[n_\ell]]_{\ell+1}^\omega > 0$ und habe $[[n_\ell]]_{\ell+1}^\omega$ habe die ω-adische Darstellung

$$[[n_\ell]]_{\ell+1}^\omega = \omega^{\alpha_1} \cdot j_1 + \cdots + \omega^{\alpha_{i-1}} \cdot j_{i-1} + \omega^{\alpha_i} \cdot j_i,$$

Ist $\alpha_i = 0$, so hat $[[n_\ell]]_{\ell+1}^\omega$ die ω-adische Darstellung

$$[[n_{\ell+1}]]_{\ell+2}^\omega = \omega^{\alpha_1} \cdot j_1 + \cdots + \omega^{\alpha_{i-1}} \cdot j_{i-1} + \omega^0 \cdot (j_i - 1),$$

wobei im Fall $j_i = 1$ der letzte Term fehlt. Ist $\alpha_i \neq 0$, so giltfür $j_i > 0$

$$[[n_{\ell+1}]]_{\ell+2}^\omega = \omega^{\alpha_1} \cdot j_1 + \cdots + \omega^{\alpha_{i-1}} \cdot j_{i-1} + \omega^{\alpha_i} \cdot (j_i - 1),$$

und für $j_i = 0$ wegen Bemerkung 10.7 (6)

$$[[n_{\ell+1}]]_{\ell+2}^\omega = \omega^{\alpha_1} \cdot j_1 + \cdots + \omega^{\alpha_{i-1}} \cdot j_{i-1} + \delta$$

mit $\delta < \omega^{\alpha_i}$. In allen Fällen, ist $[[n_\ell]]_{\ell+1}^\omega > [[n_{\ell+1}]]_{\ell+2}^\omega$. $\square$

11 Das Zermelo-Fraenkelsche Axiomensystem

(Ext) Extensionalitätsaxiom: Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie die selben Elemente enthalten.

(Aus) Aussonderungsaxiom: Für jede Menge y und jede Eigenschaft E von Mengen gibt es eine Menge x für die gilt:

$$\forall z(z \in x \leftrightarrow (z \in y \wedge \ E \text{ trifft auf } z \text{ zu})).$$

(Paar) Paarmengenaxiom: Sind x und y Mengen, so gibt es eine Menge z mit

$$\forall u(u \in z \leftrightarrow (u = x \text{ oder } u = y)).$$

(Ver) Vereinigungsmengenaxiom: Ist x eine Menge, so gibt es eine Menge y mit

$$\forall u(u \in y \leftrightarrow \exists z \in x : \ u \in z).$$

(Pot) Potenzmengenaxiom: Ist x eine Menge, so gibt es eine Menge y mit

$$\forall z(z \in y \leftrightarrow z \subseteq x).$$

(Une) Unendlichkeitsaxiom: Es gibt eine Menge x, die $\emptyset$ enthält und mit jedem y auch $y \cup \{y\}$.

(Ers) Ersetzungsaxiom: Für jede Operation F und jede Menge x gibt es eine Menge y mit

$$\forall z(z \in y \leftrightarrow \exists u(u \in x \text{ und } F(u) = z).$$

(AC) Auswahlaxiom: Zu jeder Menge x von nicht leeren, paarweisen disjunkten Mengen gibt es eine Menge, die von jedem Element von x genau ein Element enthält.