Mengenlehre

Universität Freiburg

WS 2010/2011

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/flum/ml/

G. Cantor

BEITRÄGE ZUR BEGRÜNDUNG DER TRANSFINITEN MENGENLEHRE (1895–1897):

Unter einer "Menge" verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die "Elemente" von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Über eine Eigenscahft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen (1874):

Die reellen algebraischen Zahlen bilden in ihrer Gesamtheit einen Inbegriff von Zahlgrößen, welcher mit (ω) *bezeichnet werde;... um so auffallender dürfte daher für den ersten Anblick die Bemerkung sein, daß man den Inbegriff* (ω) *dem Inbegriffe aller ganzen positiven Zahlen* ν*, welcher durch das Zeichen* (ν) *angedeutet werde, eindeutig zuordnen kann, so daß zu jeder algebraischen Zahl* ω *eine bestimmte ganze positive Zahl* ν *und umgekehrt zu jeder positiven ganzen Zahl* ν *eine völlig bestimmte reelle algebraische Zahl* ω *gehört, daß also, um mit anderen Worten dasselbe zu bezeichnen, der Inbegriff* (ω) *in der Form einer unendlichen gesetzmäßigen Reihe*

$$\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\nu, \ldots \tag{1}$$

gedacht werden kann, in welcher sämtliche Individuen von (ω) *vorkommen und ein jedes von ihnen sich in einer bestimmten Stelle in* (1)*, welche durch den zugehörigen Index gegeben ist, befindet.*

Wenn eine nach irgendeinem Gesetze gegebene unendliche Reihe voneinander verschiedener reeller Zahlengrößen

$$\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\nu, \ldots$$

vorliegt, so läßt sich in jedem vorgegebenen Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ *eine Zahl* η *(und folglich unendlich viele solcher Zahlen) bestimmen, welche in der Reihe nicht vorkommt.*

Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre (1878)

Mannigfaltigkeiten

Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten (1879–1884)

Punktmannigfaltigkeiten, Punktmengen, Mengen

Vereinigungsmenge, Durchschnitt

Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen (1872)

$$\frac{1}{2}b_0 + \sum(a_n \sin nx + b_n \cos nx) \qquad \frac{1}{2}b_0' + \sum(a_n' \sin nx + b_n' \cos nx)$$

$$1, 2, 3 \ldots, \infty, \infty{+}1, \infty{+}2, \infty{+}3, \ldots, \underbrace{\infty + \infty}_{2\infty}, 2\infty{+}1, \ldots, \infty{\cdot}\infty, \ldots, \infty^{\infty}, \ldots, \infty^{\infty^{\infty}}, \ldots$$

…wir sehen hier eine dialektische Begriffserzeugung, welche immer weiter führt und dabei frei von jeglicher Willkür in sich notwendig und konsequent bleibt.

E. Zermelo

A. Fraenkel

Ernst Zermelo

Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I (1908)

Abraham Fraenkel

Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre (1922)

Dedekind, Grelling, Russell, Whitehead

Ernst Zermelo

In der Geschichte der Wissenschaften ist es gewiß ein seltener Fall, wenn eine ganze wissenschaftliche Disziplin von grundlegender Bedeutung der schöpferischen Tat eines einzelnen zu verdanken ist. Dieser Fall ist verwirklicht in der Schöpfung Georg Cantors, der Mengenlehre, einer neuen mathematischen Disziplin...

Bemerkung 1.6 Sei B eine abzählbare Menge. Für eine nicht leere Menge A sind dann äquivalent:

(1) A ist höchstens abzählbar.

(2) Es gibt eine injektive Abbildung $g : A \to B$.

(3) Es gibt eine surjektive Abbildung $f : B \to A$.

Bemerkung 1.7 Sei A eine nicht leere Menge und B eine beliebige Menge. Wenn es eine injektive Abbildung von A nach B gibt, so auch eine surjektive Abbildung von B nach A.

Folgerung 1.8

(1) $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar.

Sei R eine Relation über A.

- R reflexiv auf A : für alle $x \in A$: $(x, x) \in R$.
- R symmetrisch (auf A) : für alle x, y $(\in A)$ (wenn $(x, y) \in R$, so $(y, x) \in R$).
- R transitiv (auf A) : für alle x, y, z $(\in A)$ (wenn $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$, so $(x, z) \in R$).
- R Äquivalenzrelation auf A : R ist reflexiv, symmetrisch und transitiv auf A.
- R irreflexiv (auf A) : für alle x $(\in A)$: $(x, x) \notin R$.
- R antisymmetrisch (auf A) : für alle x, y $(\in A)$ (wenn $(x, y) \in R$ und $(y, x) \in R$, so $x = y$).
- R konnex auf A : für alle $x, y \in A$ ($(x, y) \in R$ oder $x = y$ oder $(y, x) \in R$).
- R Ordnung auf A : R ist irreflexiv, transitiv und konnex auf A.
- R Ordnung auf A im Sinne von kleiner-gleich, kurz: R kg-Ordnung auf A : R ist reflexiv, antisymmetrisch, transitiv und konnex auf A.

Statt $(x, y) \in R$ schreiben wir oft Rxy oder xRy.

O. Deiser: Einführung in die Mengenlehre. Springer 2002

H.-D. Ebbinghaus: Einführung in die Mengenlehre. Spektrum 1979

U. Friedrichsdorf, A. Prestel: Mengenlehre für den Mathematiker. Vieweg 1985

P. Halmos: Naive set theory. Van Nostrand 1960

K. Kunen: Set theory. An introduction to independence proofs. North Holland 1980

A. Levy: Basic set theory. Springer 1979

Y. Moschovakis: Notes on set theory. Springer 1994

Eine Ordnung $(A, <)$ ist eine Wohlordnung, wenn

– jede nicht leere Teilmenge von A ein $<$-minimales Element besitzt.

Sei $\mathcal{A} = (A, <)$ eine Ordnung. $X \subseteq A$ ist Anfangsstück von $\mathcal{A}$, wenn

– aus $y \in X,\ b \in A$ und $b < y$ folgt $b \in X$.

Dann bezeichnen wir auch die Ordnung $(X, < \cap (X \times X))$ als Anfangsstück von $\mathcal{A}$.

Ein Anfangsstück X von $\mathcal{A}$ ist echt, wenn $X \neq A$.

Für $y \in A$ setzen wir

$$A_y := \{x \in A \mid x < y\}, \qquad <_y := < \cap\, (A_y \times A_y), \qquad \mathcal{A}_y = (A_y, <_y)$$

A_y bzw. $\mathcal{A}_y$ ist ein echtes Anfangsstück von $\mathcal{A}$, das von x bestimmte Anfangsstück von $\mathcal{A}$.

Bemerkung 2.19 Jedes echte Anfangsstück einer Wohlordnung $\mathcal{A}$ hat die Gestalt A_y für ein $y \in X$.

Wohlordnung $(\bar{n}, <_{\bar{n}})$ mit n-elementigen Träger

$$
\begin{array}{lll}
n = 0 & \bar{0} = \emptyset & <_{\bar{0}} = \emptyset \\
n = 1 & \bar{1} = \{\bar{0}\} = \{\emptyset\} & <_{\bar{1}} = \emptyset
\end{array}
$$

Wohlordnung $(\bar{n}, <_{\bar{n}})$ mit n-elementigen Träger

$$
\begin{array}{lcc}
n = 0 & \bar{0} = \emptyset & <_{\bar{0}} = \emptyset \\
n = 1 & \bar{1} = \{\bar{0}\} = \{\emptyset\} & <_{\bar{1}} = \emptyset \\
n = 2 & \bar{2} = \{\bar{0}, \bar{1}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} & <_{\bar{2}} = \{(\bar{0}, \bar{1})\}
\end{array}
$$

Wohlordnung $(\bar{n}, <_{\bar{n}})$ mit n-elementigen Träger

$$
\begin{array}{lccc}
n = 0 & \bar{0} = \emptyset & & <_{\bar{0}} = \emptyset \\
n = 1 & \bar{1} = \{\bar{0}\} = \{\emptyset\} & & <_{\bar{1}} = \emptyset \\
n = 2 & \bar{2} = \{\bar{0}, \bar{1}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} & & <_{\bar{2}} = \{(\bar{0}, \bar{1})\} \\
n = 3 & \bar{3} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} & & <_{\bar{3}} = <_{\bar{2}} \cup \{(x, \bar{2}) \mid x \in \bar{2}\}
\end{array}
$$

Wohlordnung $(\bar{n}, <_{\bar{n}})$ mit n-elementigen Träger

$$
\begin{array}{lcc}
n = 0 & \bar{0} = \emptyset & <_{\bar{0}} = \emptyset \\
n = 1 & \bar{1} = \{\bar{0}\} = \{\emptyset\} & <_{\bar{1}} = \emptyset \\
n = 2 & \bar{2} = \{\bar{0}, \bar{1}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} & <_{\bar{2}} = \{(\bar{0}, \bar{1})\} \\
n = 3 & \bar{3} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} & <_{\bar{3}} = <_{\bar{2}} \cup \{(x, \bar{2}) \mid x \in \bar{2}\} \\
 & \vdots & \\
n & \bar{n} = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{n-1}\} & \\
n+1 & \overline{n+1} = \bar{n} \cup \{\bar{n}\} == \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{n-1}, \bar{n}\} & <_{\overline{n+1}} = <_{\bar{n}} \cup \{(x, \bar{n}) \mid x \in \bar{n}\}
\end{array}
$$

Somit

- Wenn $x, y \in \bar{n}$, so $\quad (x <_{\bar{n}} y \iff x \in y)$.
- Wenn $x \in \bar{n}$, so $x \subseteq \bar{n}$.

Bemerkung. (1) $\emptyset$ ist transitiv.

(2) Ist x transitiv und $y \subseteq x$, so ist $x \cup \{y\}$ transitiv. Insbesondere ist $x \cup \{x\}$ transitiv.

(3) Sind x und y transitiv, so auch $x \cap y$ und $x \cup y$; allgemeiner: Ist A eine nicht leere Menge von transitiven Mengen, so sind $\bigcap A$ und $\bigcup A$ transitiv.

Wohlordnung $(\bar{n}, <_{\bar{n}})$ mit n-elementigen Träger

$$n = 0 \qquad \bar{0} = \emptyset \qquad <_{\bar{0}} = \emptyset$$

$$n+1 \qquad \overline{n+1} = \bar{n} \cup \{\bar{n}\} = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{n-1}, \bar{n}\} \qquad <_{\overline{n+1}} = <_{\bar{n}} \cup \{(x, \bar{n}) \mid x \in \bar{n}\}$$

Somit

- Wenn $x, y \in \bar{n}$, so $\quad (x <_{\bar{n}} y \iff x \in y)$.
- Wenn $x \in \bar{n}$, so $x \subseteq \bar{n}$.

A Menge

$$A \text{ transitiv}: \qquad \forall x \in A: \; x \subseteq A$$

$$\in_A = \{(x, y) \mid x, y \in A \text{ und } x \in y\}.$$

$$A \text{ Ordinalzahl}: \qquad A \text{ transitiv und } (A, \in_A) \text{ Wohlordunung}$$

Ordinalzahlen: $\quad \alpha, \beta, \ldots$

Bemerkung 2.30

(1) Ist α eine Ordinalzahl und $x \in \alpha$, so ist x eine Ordinalzahl. Somit

$$\alpha = \{\beta \text{ Ordinalzahl } \mid \beta \in \alpha\}.$$

(2) Sind α und β Ordinalzahlen, so

$$\alpha \subset \beta \iff \alpha \in \beta.$$

Satz. Die Klasse der Ordinalzahlen ist keine Menge.

Unter einer "Menge" verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die "Elemente" von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Erhalten Menge

$$y := \{x \mid x \text{ Menge und } x \notin x\}$$

und erhalten den Widerspruch

$$y \in y \iff y \notin y.$$

Ernst Zermelo

Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I (1908)

Die ursprüngliche Cantorsche Definition einer "Menge" als einer "Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen" bedarf also jedenfalls einer Einschränkung, ohne daß es schon gelungen wäre, sie durch eine andere, ebenso einfache zu ersetzen, welche zu keinen solchen Bedenken mehr Anlaß gäbe. Unter diesen Umständen bleibt gegenwärtig nichts anderes übrig, als den umgekehrten Weg einzuschlagen und ausgehend von der historisch bestehenden "Mengenlehre," die Prinzipien aufzusuchen, welche zur Begründung dieser mathematischen Disziplin erforderlich sind. Diese Aufgabe muß in der Weise gelöst werden, daß man die Prinzipien einmal eng genug einschränkt, um alle Widersprüche auszuschließen, gleichzeitig aber auch weit genug ausdehnt, um alles Wertvolle dieser Lehre beizubehalten.

Bereich von Objekten “Punkte”

R sei eine Relation, die auf gewisse Paare von Punkten zutrifft;

wir schreiben aRb, wenn R auf die Punkte a und b zutrifft.

Bereich mir R ist eine partielle Ordnung, wenn

- (irr) $\forall a$ nicht aRa;
- (trans) $\forall a, b, c$: (wenn aRb und bRc, so aRc).

Bereich von Objekten “Klassen”

$\in$ sei eine Relation, die auf gewisse Paare von Klassen zutrifft;

wir schreiben $A \in B$, wenn $\in$ auf die Klassen A und B zutrifft.

Bereich mit $\in$ ist ein Klassenuniversum, wenn

- (Ext)
- (Komp)
- ...

Klassen: $A, B, C, \ldots$.

$A \in B$: A ist Element von B

Definition. A Menge: $\exists B\ A \in B$. Mengen: $a, b, c \ldots$

Bemerkung 3.2 (1) Jede Menge ist eine Klasse.

(2) Jede Klasse enthält nur Mengen als Elemente.

(Ext) Extensionalitätsaxiom: $\forall A \forall B (A = B \leftrightarrow \forall z (z \in A \leftrightarrow z \in B))$

(Komp) Komprehensionsaxiom: Für jede Eigenschaft E von Mengen gibt es *die* Klasse $\{x \mid E(x)\}$.

$$V = \{x \mid x = x\} \text{ (die Allklasse)} \qquad \emptyset = \{x \mid x \neq x\} \text{ (die leere Klasse).}$$

Bemerkung 3.4 A ist eine Menge gdw $A \in V$.

Definition 3.5 A Teilkasse von B, $A \subseteq B$: $\forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$.

Bemerkung 3.6 Seien A und B Klassen. Mit (Komp) erhalten wir die Klassen

$$\begin{aligned}
A \cap B &:= \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\} && \text{den } \textit{Durchschnitt von } A \textit{ und } B \\
A \cup B &:= \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\} && \text{die } \textit{Vereinigung von } A \textit{ und } B \\
\bigcap A &:= \{x \mid \forall y \in A: \ x \in y\} && \text{den } \textit{Durchschnitt von } A \\
\bigcup A &:= \{x \mid \exists y \in A: \ x \in y\} && \text{die } \textit{Vereinigung von } A.
\end{aligned}$$

Klassen: $A, B, C, \ldots$.

Definition. A Menge: $\exists B\ A \in B$. Mengen: $a, b, c \ldots$

(Ext) EXTENSIONALITÄTSAXIOM: $\forall A \forall B (A = B \leftrightarrow \forall z (z \in A \leftrightarrow z \in B))$

(Komp) KOMPREHENSIONSAXIOM: Für jede Eigenschaft E von Mengen gibt es *die* Klasse $\{x \mid E(x)\}$.

$$V = \{x \mid x = x\} \qquad \emptyset = \{x \mid x \neq x\}.$$

(Null) NULLMENGENAXIOM: $\emptyset \in V$

(Paar) PAARMENGENAXIOM: $\forall a, b: \ \{x \mid x = a \text{ oder } x = b\} \in V$.

(Ver) VEREINIGUNGSMENGENAXIOM: $\forall a: \ \bigcup a \in V$.

(Pot) POTENZMENGENAXIOM: $\forall a: \ P(a) := \{x \mid x \subseteq a\} \in V$.

(Aus) AUSSONDERUNGSAXIOM: $\forall a \forall B: \ a \cap B \in V$.

(Inf) UNENDLICHKEITSAXIOM: Es gibt eine induktive Menge.

(AC) AUSWAHLAXIOM: Für jede Menge x paarweiser disjunkter nicht leerer Mengen gibt es $u \subseteq \bigcup x$ mit: für alle $y \in x$ enthält $u \cap y$ genau ein Element.

R Klasse

$$
\begin{array}{rcll}
D(R) & := & \{x \mid \exists y : \ (x,y) \in R\} & \text{der Definitionsbereich von } R \\
W(R) & := & \{y \mid \exists x : \ (x,y) \in R\} & \text{der Wertebereich von } R \\
\mathrm{Fld}(R) & := & D(R) \cup W(R) & \text{das Feld von } R
\end{array}
$$

Bemerkung 4.9 Für eine Relation R (d.h. $R \subseteq V \times V$) sind äquivalent:

(i) $R \in V$. (ii) $D(R), W(R) \in V$. (iii) $\mathrm{Fld}(R) \in V$.

Lemma 4.4 (2) Wenn $(a,b) \in C$, so $a, b \in \bigcup\bigcup C$.

F Funktion: F Relation (d.h. $R \subseteq V \times V$)

aus $(x, y_1) \in F$ und $(x, y_2) \in F$ folgt $y_1 = y_2$.

Statt $(x,y) \in F$ schreiben wir dann auch $F(x) = y$.

(AC)

Folgerung 1.8 (3) Seien $g : \mathbb{N} \to I$ und $f_i : \mathbb{N} \to A_i$ (für $i \in I$) surjektiv. Dann ist $\bigcup_{i \in I} A_i$ höchstens abzählbar.

Ist I höchstens abzählbar und ist A_i höchstens abzählbar für jedes $i \in I$, so ist $\bigcup_{i \in I} A_i$ höchstens abzählbar.

(Ers)

Satz. Jede Wohlordnung ist zu genau einer Ordinalzahl isomorph.

Beweis. Sei $\mathcal{A}$ eine Wohlordnung. Es bleibt die Existenz einer zu $\mathcal{A}$ isomorphen Ordinalzahl zu zeigen. Sei hierzu

$$B := \{b \in A \mid \text{das Anfangsstück } \mathcal{A}_b \text{ ist zu einer Ordinalzahl isomorph}\}.$$

Zu jedem $b \in B$ gibt es nach dem bereits Bewiesenen eine eindeutig bestimmte zu $\mathcal{A}_b$ isomorphe Ordinalzahl $\alpha(b)$. Wir setzen

$$X := \{\alpha(b) \mid b \in B\}.$$

Somit ist X eine Menge von Ordinalzahlen.

Folgerung 1.11 Für eine Menge A definieren wir $P^n(A)$ durch Induktion über n:

$$P^0(A) := A \quad \text{und} \quad P^{n+1}(A) := P(P^n(A)),$$

und setzen

$$P^\omega(A) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P^n(A) = \bigcup \{P^0(A), P^1(A), P^2(A), \dots\}.$$

(Komp) KOMPREHENSIONSAXIOM:

Für jede Eigenschaft E von Mengen gibt es *die* Klasse $\{x \mid E(x)\}$.

Alphabet der Sprache L:

(a) KLASSENVARIABLE. $V_1, V_2, \ldots$ X, Y, Z

(b) MENGENVARIABLE. $v_1, v_2, \ldots$ x, y, z

(c) GLEICHHEITSZEICHEN. $=$

(d) ENTHALTENSEINSZEICHEN. $\in$

(e) JUNKTOREN. $\neg$ "nicht", $\wedge$ "und", $\vee$ "oder",
$\rightarrow$ "wenn – so", $\leftrightarrow$ "genau dann, wenn"

(f) QUANTOREN. $\forall$ "für alle", $\exists$ "es gibt"

(g) HILFSSYMBOLE.), (

Ausdrücke (Formeln) von L sind die Zeichenreihen, die man durch endlichmalige Anwendung der folgenden Regeln erhalten kann:

(A1) Für Klassen- oder Mengenvariablen (!) t_1, t_2 ist $t_1 = t_2$ ein Ausdruck.

(A2) Für Klassen- oder Mengenvariablen t_1, t_2 ist $t_1 \in t_2$ ein Ausdruck.

(A3) Ist φ ein Ausdruck, so auch $\neg\varphi$.

(A4) Sind φ und ψ Ausdrücke, so auch $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ und $(\varphi \leftrightarrow \psi)$.

(A5) Ist φ ein Ausdruck und x eine Mengenvariable, so sind $\forall x\varphi$ und $\exists x\varphi$ Ausdrücke.

Eine Mengenvariable x kommt in einem Ausdruck φ frei vor, wenn sie in φ an mindestens einer Stelle vorkommt, wo sie nicht im Wirkungsbereich eines Quantors $\forall x$ oder $\exists x$ steht.

Für einen Ausdruck φ schreiben wir auch $\varphi(x_1, \ldots, x_s, Y_1, \ldots, Y_r)$ um anzudeuten, dass in φ höchstens die Mengenvariablen $x_1, \ldots, x_s$ frei vorkommen und höchstens die Klassenvariablen $Y_1, \ldots, Y_r$ vorkommen.

(Komp) Komprehensionsaxiom: Für jeden Ausdruck $\varphi(x, Y_1, \ldots, Y_s)$ und Klassen $A_1, \ldots, A_s$ gibt es *die* Klasse

$$\{a \mid \varphi(a, A_1, \ldots, A_s)\}.$$

V : $\varphi_1(x)$: $x = x$ $\{a \mid \varphi_1(a)\} = V$

$\emptyset$: $\varphi_2(x)$: $\neg x = x$ $\{a \mid \varphi_2(a)\} = \emptyset$

C Klasse, $\bigcap C$: $\varphi_3(x, Z)$: $\forall y(y \in Z \to x \in y)$ $\{a \mid \varphi_3(a, C)\} = \bigcap C$

C Klasse, $\bigcup C$: $\varphi_4(x, Z)$: $\exists y(y \in Z \wedge x \in y)$ $\{a \mid \varphi_4(a, C)\} = \bigcup C$

C Klasse, $P(C)$: $\varphi_5(x, Z)$: $\forall y(y \in x \to y \in Z)$ $\{a \mid \varphi_5(a, C)\} = P(C)$

b Menge, C Klasse, $b \cap C$: $\varphi_6(x, Y, Z)$: $(x \in Y \wedge x \in Z)$ $\{a \mid \varphi_6(a, b, C)\} = b \cap C$

Eine Klasse A ist induktiv, wenn

- $\emptyset \in A$;
- für alle $z \in A$: $z \cup \{z\} \in A$.

(Inf) Unendlichkeitsaxiom: Es gibt eine induktive Menge.

$$\omega := \bigcap \{x \mid x \text{ induktiv}\}$$

ist eine induktive Menge.

$$F_+ \quad := \{((\alpha,\beta),\gamma) \mid \alpha,\beta,\gamma \in \text{ Ord}, \ (\alpha,\in_\alpha) + (\beta,\in_\beta) \cong (\gamma,\in_\gamma)\} \qquad \text{die Addition von OZ.}$$

$$F_\cdot \quad := \{((\alpha,\beta),\gamma) \mid \alpha,\beta,\gamma \in \text{ Ord}, \ (\alpha,\in_\alpha) \cdot (\beta,\in_\beta) \cong (\gamma,\in_\gamma)\} \qquad \text{die Mult. von OZ.}$$

Statt $((\alpha,\beta),\gamma) \in F_+$ und $((\alpha,\beta),\gamma) \in F_\cdot$ schreiben wir auch

$$\alpha + \beta = \gamma \qquad \text{bzw.} \qquad \alpha \cdot \beta = \gamma.$$

Sei R eine Relation.

– R ist fundiert, wenn jede nichtleere Teilklasse des Feldes ein minimales Element enthält, d.h.

$$\forall B\,(\emptyset \neq B \subseteq \mathrm{Fld}(R) \Rightarrow \exists b \in B\,\forall c \in B : \quad \text{nicht } cRb.$$

– R ist lokal, wenn

$$\forall b \in \mathrm{Fld}(R) :\ \{c \mid cRb\} \in V.$$

$$0! := 1 \qquad\qquad (n+1)! := n! \cdot (n+1)$$

Fibonacci-Funktion: $\qquad f(0) := 0 \qquad f(1) := 1$

für $n \geq 2$: $\qquad f(n) = f(n-1) + f(n-2)$

Weitere induktiv definierte Funktion h: $\qquad h(0) := 1$

für $n \geq 1$: $\qquad h(n) = n \cdot \big(h(0) + h(1) + \cdots + h(n-1)\big)$

Sei α eine Ordinalzahl.

- α Nachfolgerzahl: es existiert β mit $\alpha = \beta' := \beta \cup \{\beta\}$.
- α Limeszahl, kurz: Lim α: $\alpha \neq 0$ und α ist keine Nachfolgerzahl.

$$\forall \alpha \in \mathrm{Ord} : \quad \Big(\text{entweder } \alpha = 0 \text{ oder } \alpha \text{ ist Nachfolgerzahl oder Lim } \alpha\Big).$$

Prinzip der transfiniten Induktion. Will man eine Eigenschaft E für alle Ordinalzahln nachweisen, so genügt es:

(i) $E(0)$

(ii) für jede Ordinalzahl α: (wenn $E(\alpha)$, so $E(\alpha + 1)$)

(iii) für jede Limeszahl γ: (wenn $E(\alpha)$ für alle $\alpha < \gamma$, so $E(\gamma)$).

$$A \text{ induktiv} : \qquad \emptyset \in A \text{ und } \forall x \in A : \quad x \cup \{x\} \in A$$

Allgemeiner Rekursionssatz R fundierte, lokale und transitive Relation, $G : \mathrm{Fld}(R) \times V \to V$. Dann gibt es genau eine Funktion $F : \mathrm{Fld}(R) \to V$ mit

$$(*) \qquad F(b) = G(b, F \restriction \{c \mid cRb\})$$

für alle $b \in \mathrm{Fld}(R)$.

Für $A = \omega$ erhalten wir die "gewöhnliche" induktive Definition von Funktionen mit der Menge der natürlichen Zahlen als Definitionsbereich: Seien

$$a_0 \in V \qquad \text{und} \qquad G : \omega \times V \to V$$

Dann gibt es genau eine Funktion $F : \omega \to V$ mit

$$\begin{aligned} F(0) &= a_0 \\ \forall i \in \omega : \quad F(i+1) &= G(i, F(i)). \end{aligned}$$

Sei a eine Menge.

- a ist endlich, wenn es $i \in \omega$ gibt mit $a \sim i$.
- a ist unendlich, wenn es nicht endlich ist.
- a ist abzählbar, wenn $a \sim \omega$.

$$\alpha \text{ Kardinalzahl} \iff \forall \beta < \alpha\colon\ \alpha \not\sim \beta$$

Card Klasse der Kardinalzahlen; Card_∞ Klasse der unendlichen Kardinalzahlen

In der Regel bezeichnen $\kappa, \lambda, \ldots$ Kardinalzahlen.

Bemerkung 8.9 $W(\aleph) = \text{Card}_\infty$.

Satz von Hessenberg $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha \sim \aleph_\alpha$.

Somit für jede unendliche Menge x

$$x \times x \sim x.$$

$$|x| := \min\{\alpha \mid x \sim \alpha\}$$

$|x|$ ist die Kardinalität oder Mächtigkeit von x.

$$\begin{array}{lrcl}
\textit{(kardinale Addition)} & \kappa + \lambda & = & |(\kappa \times \{0\}) \cup (\lambda \times \{1\})| \\
\textit{(kardinale Multiplikation)} & \kappa \cdot \lambda & = & |\kappa \times \lambda| \\
\textit{(kardinale Exponentiation)} & \kappa^\lambda & = & |{}^\lambda \kappa|.
\end{array}$$

Bemerkung 8.16 Für alle Mengen x, y gilt:

(1) $|x \cup y| \leq |x| + |y|$.

(2) Wenn $x \cap y = \emptyset$, so $|x \cup y| = |x| + |y|$.

(3) Ist x unendlich, so $|x \cup y| = \max\{|x|, |y|\}$.

Satz über die kardinale Multiplikation

(1) Die kardinale Multiplikation ist kommutativ und assoziativ.

(2) Für alle $\kappa, \lambda, \mu \in \mathrm{Card}$: $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$

(3) Für alle $\kappa, \lambda, \mu \in \mathrm{Card}$: wenn $\lambda \leq \mu$, so $\kappa \cdot \lambda \leq \kappa \cdot \mu$.

(4) Für alle $\kappa \in \mathrm{Card}$: $\kappa \cdot 0 = 0$.

(5) Auf ω stimmt die kardinale Multiplikation mit der üblichen überein.

(6) Für alle $\kappa, \lambda \in \mathrm{Card}$ mit $\kappa \geq \aleph_0$ und $\lambda \neq 0$

$$\kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}.$$

Satz über die kardinale Exponentiation

(1) Für alle $\kappa, \lambda, \mu \in \mathrm{Card}$: $\kappa^{(\lambda+\mu)} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$.

(2) Für alle $\kappa, \lambda, \mu \in \mathrm{Card}$: $\kappa^{(\lambda\cdot\mu)} = (\kappa^\lambda)^\mu$.

(3) Für alle $\kappa, \lambda, \mu \in \mathrm{Card}$: $(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$.

(4) Für alle $\kappa, \lambda, \mu \in \mathrm{Card}$: wenn $\lambda \leq \mu$, so $\kappa^\lambda \leq \kappa^\mu$ und $\lambda^\kappa \leq \mu^\kappa$.

(5) Auf ω stimmt die kardinale Exponentiation mit der üblichen überein.

(6) Für alle $\kappa \in \mathrm{Card}$: $\kappa^0 = 1$ und falls $\kappa \neq 0$: $0^\kappa = 0$.

(7) Für alle $\kappa \in \mathrm{Card}$: $1^\kappa = 1$.

(8) Für alle $\kappa \in \mathrm{Card}$: $2^\kappa = |P(\kappa)|$.

(9) Für alle $\kappa, \mu \in \mathrm{Card}$: wenn ($\kappa \geq \aleph_0$ und $2 \leq \mu \leq \aleph_0$), so $\mu^\kappa = 2^\kappa$.

(10) Für alle $\kappa \in \mathrm{Card}$: $\kappa^0 = 1$.

(11) Für alle $\kappa \in \mathrm{Card}$: $\kappa^1 = \kappa$.

(12) Für alle $\kappa, \lambda \in \mathrm{Card}$: wenn ($\kappa \geq \aleph_0$ und $1 \leq \lambda < \aleph_0$), so $\kappa^\lambda = \kappa$.

Die Vereinigung einer endlichen Menge von endlichen Mengen ist endlich, formaler:

$$\forall x \Big((|x| < \aleph_0 \text{ und } \forall y \in x : \ |y| < \aleph_0) \to |\bigcup x| < \aleph_0 \Big).$$

Die Vereinigung einer höchstens abzählbaren Menge von höchstens abzählbaren Mengen ist höchstens abzählbar, formaler:

$$\forall x \Big((|x| < \aleph_1 \text{ und } \forall y \in x : \ |y| < \aleph_1) \to |\bigcup x| < \aleph_1 \Big).$$

$$\mathrm{cf}(\alpha) = \min\{|x| \mid x \text{ kofinal in } \alpha)\}$$

Bemerkung 9.5 Sei α eine unendliche Ordinalzahl. Dann

$$\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha \iff \alpha \text{ ist eine reguläre Kardinalzahl.}$$

Bemerkung 9.2 (3) Ist κ singulär, so ist mit $\alpha < \kappa$ auch $\alpha^+ < \kappa$.

Bemerkung 9.4 (4) Ist Lim γ, so $\mathrm{cf}(\gamma) \in \mathrm{Card}_\infty$.

(6) $\mathrm{cf}(\alpha) = \min\{\beta \mid \exists f(f : \beta \to \alpha \text{ mit } W(f) \text{ ist kofinal in } \alpha)\}$.

Lemma von König und Zermelo. Sei I eine nicht leere Menge und $(\kappa_i)_{i\in I}$ und $(\lambda_i)_{i\in I}$ Familien von Kardinalzahlen mit $\kappa_i < \lambda_i$ für alle $i \in I$. Dann

$$\bigcup_{i\in I}\{i\} \times \kappa_i \prec \Pi_{i\in I}\lambda_i.$$

Bemerkung 1.16. Intervalle in $\mathbb{R}$ haben die Mächtigkeit des Kontinuums, genauer: für $r, s \in \mathbb{R}$ mit $r < s$ haben die Intervalle

$$[r, s], \quad [r, s[, \quad]r, s], \quad]r, s[, \quad]-\infty, s], \quad]-\infty, s[, \quad [r, \infty), \quad]r, \infty)$$

die Mächtigkeit des Kontinuums.

$a \subseteq R$, $r \in R$

r Häufungspunkt von a: In jeder Umgebung von r existiert $s \in a$ mit $r \neq s$.

$$\alpha + \beta = \mathrm{wo}\big((\alpha, \in_\alpha) + (\beta, \in_\beta)\big)$$

Satz über die ordinale Addition.

(1) Die ordinale Addition ist assoziativ (jedoch nicht kommutativ, da etwa $1 + \omega \neq \omega + 1$).

(2) $\forall \alpha : \quad \alpha + 0 = \alpha = 0 + \alpha$.

(3) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Ord}$: $(\beta < \gamma \iff \alpha + \beta < \alpha + \gamma)$.

(4) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Ord}$: (wenn $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$, so $\beta = \gamma$) (jedoch $1 + \omega = 0 + \omega$).

(5) Für alle α, β mit $\alpha \leq \beta$ gibt es genau ein γ mit $\alpha + \gamma = \beta$ (jedoch ist die Gleichung $x + \omega = \aleph_1$ nicht lösbar).

(6) Für jedes α und jede Menge a von Ordinalzahlen gilt:

$$\alpha + \sup a = \sup\{\alpha + \beta \mid \beta \in a\}$$

(jedoch $\sup \omega + \omega \neq \sup\{i + \omega \mid i \in \omega\}$).

$$\alpha \cdot \beta = \mathrm{wo}\big((\alpha, \in_\alpha) \times (\beta, \in_\beta)\big).$$

Seien $\mathcal{A} = (A, <^A)$ und $\mathcal{B} = (B, <^B)$ Ordnungen.

Das Produkt $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ist die Struktur $(A \times B, <)$, wobei für $(a, b), (a', b') \in A \times B$

$$(a, b) < (a', b') :\iff b <^B b' \text{ oder } (b = b' \text{ und } a <^A a').$$

Satz über die ordinale Multiplikation

(1) $\forall \alpha \in \mathrm{Ord}$: $(1 \cdot \alpha = \alpha = \alpha \cdot 1$ und $0 \cdot \alpha = 0 = \alpha \cdot 0)$.

(2) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Ord},\ \alpha > 0$: $(\beta < \gamma \iff \alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma)$.

Insbesondere ist für $\alpha > 0$ und $1 < \gamma$: $\alpha < \alpha \cdot \gamma$.

(3) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Ord},\ \alpha > 0$: (wenn $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma$, so $\beta = \gamma$) (jedoch $1 \cdot \omega = 2 \cdot \omega$).

(4) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Ord}$: (wenn $\alpha \leq \beta$, so $\alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$.)

(5) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Ord}$: $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

(6) (Division mit Rest) $\forall \alpha, \beta \in \mathrm{Ord},\ \beta > 0$, gibt es ein eindeutig bestimmtes Paar $(\delta, \rho) \in \mathrm{Ord} \times \mathrm{Ord}$ mit

$$\alpha = \beta \cdot \delta + \rho \quad \text{und} \quad \rho < \beta.$$

(7) Für jedes α und jede Menge a von Ordinalzahlen gilt:

$$\alpha \cdot \sup a = \sup\{\alpha \cdot \beta \mid \beta \in a\}$$

(jedoch $(\sup \omega) \cdot = \omega \cdot \omega \neq \omega = \sup\{i \cdot \omega \mid i \in \omega\}$).

$d \in \omega$, $d \geq 2$. Für $n \in \omega$ mit $n \geq 1$ bezeichne $[n]_d$ die d-adische Darstellung von n.

$$[23]_2 = 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0, \quad [23]_3 = 3^2 \cdot 2 + 3^1 + 3^0 \cdot 2, \quad [23]_4 = 4^2 + 4^1 + 4^0 \cdot 3$$

Ersetzt man in ihr in den Exponenten, Exponenten von Exponenten,... alle Zahlen größer als d, wiederum durch ihre Darstellung zur Basis d, so erhält man schließlich $[[n]]_d$, die d-adische Superdarstellung von n, also etwa

$$[[23]]_2 = 2^{2^2} + 2^2 + 2^1 + 2^0.$$

$$[266]_2 = 2^8 + 2^3 + 2^1 \qquad \text{und} \qquad [[266]]_2 = 2^{2^{2+2^0}} + 2^{2+2^0} + 2^1.$$

Für $n \in \omega$ und $d \geq 2$ sei $G(d,n) \in \omega$ wie folgt definiert:

– Wenn $n = 0$, so $G(d,n) = 0$.

– Wenn $n \geq 1$, so erhält man $G(d,n)$ in dem man in der d-adischen Superdarstellung $[[n]]_d$ von n alle vorkommenden d durch $d+1$ ersetzt und von der dadurch resultierenden Zahl 1 subtrahiert.

Somit

$$G(2,23) = 3^{3^3} + 3^3 + 3^1 + 3^0 - 1 = 3^{3^3} + 3^3 + 3^1$$

$$G(2,266) = 3^{3^{3+3^0}} + 3^{3+3^0} + 3^1 - 1 = 3^{3^{3+3^0}} + 3^{3+3^0} + 3^0 \cdot 2.$$

Für $n \geq 1$, definiert man nun die Folge

$$n_1, n_2, n_3, \ldots$$

wie folgt:

- $n_1 := n$
- wenn $n_\ell = 0$, so $n_{\ell+1} = 0$; sonst $n_{\ell+1} := G(\ell+1, n_\ell)$,

also

$$n_1 = n, \quad n_2 = G(2, n_1), \quad n_3 = G(3, n_2), \ldots$$

So erhalten wir für $n = 266$

$$\begin{array}{lcl}
266_1 & = & 2^{2^{2+2^0}} + 2^{2+2^0} + 2^1 \\
266_2 & = & 3^{3^{3+3^0}} + 3^{3+3^0} + 3^1 - 1 = 3^{3^{3+3^0}} + 3^{3+3^0} + 3^0 \cdot 2 \\
266_3 & = & 4^{4^{4+4^0}} + 4^{4+4^0} + 4^0 \cdot 2 - 1 = 4^{4^{4+4^0}} + 4^{4+4^0} + 4^0 \cdot 1 \\
266_4 & = & 5^{5^{5+5^0}} + 5^{5+5^0} + 5^0 \cdot 1 - 1 = 5^{5^{5+5^0}} + 5^{5+5^0} \\
266_5 & = & 6^{6^{6+6^0}} + 6^{6+6^0} - 1 = 6^{6^{6+6^0}} + 6^6 \cdot 5 + 6^5 \cdot 5 + 6^4 \cdot 5 + 6^3 \cdot 5 + 6^2 \cdot 5 + 6^1 \cdot 5 + 6^0 \cdot 5 \\
266_5 & = & 6^{6^{6+6^0}} + \text{LK von Potenzen von 6 mit Exponeneten} < 6 + 6^0 \\
 & \vdots &
\end{array}$$

Sind $k, d \in \omega$ und $k \geq 1$ und $d > 1$, so bezeichne $[[k]]_d^\omega$ die Ordinalzahl, die man aus der d-adischen Superdarstellung $[[k]]_d$ von k erhält, indem man *alle* vorkommenden d's durch ω ersetzt.

Somit gilt

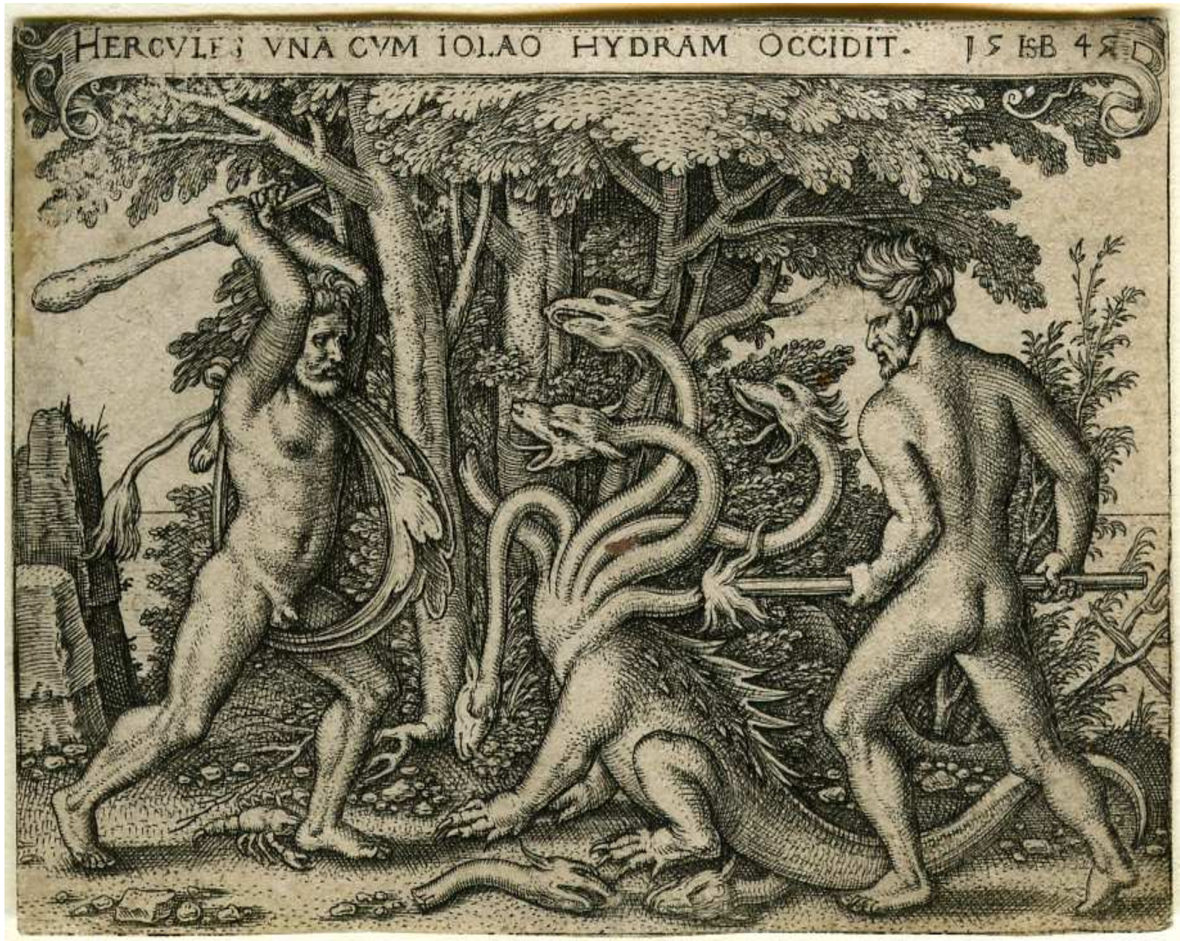
$$[[266]]_2^\omega = [[2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2^1]]_2^\omega = \omega^{\omega^{\omega+1}} + \omega^{\omega+1} + \omega^1$$

$$[[3^{3^{3+3^0}} + 3^{3+3^0} + 3^0 \cdot 2]]_3^\omega = \omega^{\omega^{\omega+\omega^0}} + \omega^{\omega+\omega^0} + \omega^0 \cdot 2$$

$$[[4^{4^{4+1}} + 4^{4+1} + 1 \cdot 4^0]_4^\omega = \omega^{\omega^{\omega+1}} + \omega^{\omega+1} + 1 \cdot \omega^0$$

$$[[5^{5^{5+1}} + 5^{5+1}]]_5^\omega = \omega^{\omega^{\omega+1}} + \omega^{\omega+1}.$$

$$
\begin{aligned}
266_1 &= 2^{2^{2+2^0}} + 2^{2+2^0} + 2^1 \\
266_2 &= 3^{3^{3+3^0}} + 3^{3+3^0} + 3^1 - 1 = 3^{3^{3+3^0}} + 3^{3+3^0} + 3^0 \cdot 2 \\
266_3 &= 4^{4^{4+4^0}} + 4^{4+4^0} + 4^0 \cdot 2 - 1 = 4^{4^{4+4^0}} + 4^{4+4^0} + 4^0 \cdot 1 \\
266_4 &= 5^{5^{5+5^0}} + 5^{5+5^0} + 5^0 \cdot 1 - 1 = 5^{5^{5+5^0}} + 5^{5+5^0} \\
266_5 &= 6^{6^{6+6^0}} + 6^{6+6^0} - 1 = 6^{6^{6+6^0}} + 6^6 \cdot 5 + 6^5 \cdot 5 + 6^4 \cdot 5 + 6^3 \cdot 5 + 6^2 \cdot 5 + 6^1 \cdot 5 + 6^0 \cdot \\
266_5 &= 6^{6^{6+6^0}} + \text{LK von Potenzen von } 6 \text{ mit Exponeneten} < 6 + 6^0 \\
&\vdots \\
[[266_1]]_2^\omega &= \omega^{\omega^{\omega+\omega^0}} + \omega^{\omega+\omega^0} + \omega^1 \\
[[266_2]]_3^\omega &= \omega^{\omega^{\omega+\omega^0}} + \omega^{\omega+\omega^0} + \omega^0 \cdot 2 \\
[[266_3]]_4^\omega &= \omega^{\omega^{\omega+\omega^0}} + \omega^{\omega+\omega^0} + \omega^0 \cdot 1 \\
[[266_4]]_5^\omega &= \omega^{\omega^{\omega+\omega^0}} + \omega^{\omega+\omega^0} \\
[[266_5]]_6^\omega &= \omega^{\omega^{\omega+\omega^0}} + \omega^\omega \cdot 5 + \omega^5 \cdot 5 + \omega^4 \cdot 5 + \omega^3 \cdot 5 + \omega^2 \cdot 5 + \omega^1 \cdot 5 + \omega^0 \cdot 5 \\
[[266_5]]_6^\omega &= \omega^{\omega^{\omega+\omega^0}} + \text{LK von Potenzen von } \omega \text{ mit Exponeneten} < \omega + \omega^0 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$


HERCVLES VNA CVM IOLAO HYDRAM OCCIDIT.

Die Hydra war eine übergroße Wasserschlange mit neun Köpfen, von denen acht sterblich waren und der in der Mitte stehende neunte unsterblich. Sie wuchs im Süden Griechenlands. Sie pflegte aufs Land herauszukommen, Viehherden zu zerreißen und Felder zu verwüsten.

Sie zu erlegen, war die zweite der insgesamt 12 sagenhaften Aufgaben, welche der kraftstrotzende Herakles (lat. Hercules) im Dienste des Königs Eurystheus vollbrachte, um zu sühnen, dass er seine Frau und seine Kinder in einem wütenden Wahnsinnsanfall ermordet hatte. Herakles trat der Hydra unerschrocken entgegen, packte sie kraftvoll und hielt sie fest. Sie aber umschlang einen seiner Füße, ohne sich auf weitere Gegenwehr einzulassen. Daraufhin begann Herakles, mit seiner Keule dem Ungeheuer die Köpfe zu zerschmettern. Anfänglich aber hatte er keinen Erfolg damit, denn kaum hatte er einen Kopf der Hydra zerschlagen, so wuchsen anstatt des einen Kopfes zwei neue nach. Endlich schlug Herakles der Hydra auch das unsterbliche Haupt ab; dieses begrub er am Wege und wälzte einen schweren Fels darüber.

Sei R eine Relation über A.

- R reflexiv auf A : für alle $x \in A$: $(x, x) \in R$.
- R symmetrisch (auf A) : für alle $x, y \in A$ (wenn $(x, y) \in R$, so $(y, x) \in R$).
- R transitiv (auf A) : für alle $x, y, z \in A$ (wenn $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$, so $(x, z) \in R$).
- R Äquivalenzrelation auf A : R ist reflexiv, symmetrisch und transitiv auf A.

(r) Für alle x: $(x, x) \in R$.

(s) Für alle x, y: Wenn $(x, y) \in R$, so $(y, x) \in R$.

(t) Für alle x, y, z: Wenn $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$, so $(x, z) \in R$.

NBG Klassen: $A, B, C, \ldots$.

Definition. A Menge: $\exists B \; A \in B$. Mengen: $a, b, c \ldots$

(Ext) EXTENSIONALITÄTSAXIOM: $\forall A \forall B (A = B \leftrightarrow \forall z (z \in A \leftrightarrow z \in B))$

(Komp) KOMPREHENSIONSAXIOM: Für jede Eigenschaft E von Mengen gibt es *die* Klasse $\{x \mid E(x)\}$.

$$V = \{x \mid x = x\} \qquad \emptyset = \{x \mid x \neq x\}.$$

(Null) NULLMENGENAXIOM: $\emptyset \in V$

(Paar) PAARMENGENAXIOM: $\forall a, b: \; \{x \mid x = a \text{ oder } x = b\} \in V$.

(Ver) VEREINIGUNGSMENGENAXIOM: $\forall a: \; \bigcup a \in V$.

(Pot) POTENZMENGENAXIOM: $\forall a: \; P(a) := \{x \mid x \subseteq a\} \in V$.

(Aus) AUSSONDERUNGSAXIOM: $\forall a \forall B: \; a \cap B \in V$.

(Inf) UNENDLICHKEITSAXIOM: Es gibt eine induktive Menge.

(AC) AUSWAHLAXIOM: Für jede Menge x paarweiser disjunkter nicht leerer Mengen gibt es $u \subseteq \bigcup x$ mit: für alle $y \in x$ enthält $u \cap y$ genau ein Element.

(Ers) ERSETZUNGSAXIOM: Für jede Funktion F und Menge a: $F[a] \in V$.

ZFC

Extensionalitätsaxiom: Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie die selben Elemente enthalten.

Aussonderungsaxiom: Für jede Menge y und jede Eigenschaft E von Mengen gibt es eine Menge x für die gilt:

$$\forall z(z \in x \leftrightarrow (z \in y \wedge \ E \text{ trifft auf } z \text{ zu})).$$

Paarmengenaxiom: Sind x und y Mengen, so gibt es eine Menge z mit

$$\forall u(u \in z \leftrightarrow (u = x \text{ oder } u = y)).$$

Vereinigungsmengenaxiom: Ist x eine Menge, so gibt es eine Menge y mit

$$\forall u(u \in y \leftrightarrow \exists z \in x : \ u \in z).$$

Potenzmengenaxiom: Ist x eine Menge, so gibt es eine Menge y mit

$$\forall z(z \in y \leftrightarrow z \subseteq x).$$

Unendlichkeitsaxiom: Es gibt eine Menge x, die $\emptyset$ enthält und mit jedem y auch $y \cup \{y\}$.

Ersetzungsaxiom: Für jede Operation F und jede Menge x gibt es eine Menge y mit

$$\forall z(z \in y \leftrightarrow \exists u(u \in x \text{ und } F(u) = z).$$

Auswahlaxiom: Zu jeder Menge x von nicht leeren, paarweisen disjunkten Mengen gibt es eine Menge, die von jedem Element von x genau ein Element enthält.

$$\begin{array}{rrcl} & V_0 & := & \emptyset \\ & V_{\alpha+1} & := & P(V_\alpha) \\ \text{wenn Lim } \gamma \text{, so} & V_\gamma & := & \bigcup\{V_\alpha \mid \alpha < \gamma\}. \end{array}$$

$(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$ ist bis auf Isomorphie der einzige vollständig geordnete Körper.

$(a, <)$ Ordnung

$$(a,<) \text{ dicht} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} \forall x, y \in a,\ x < y\ \exists z \in a: \ (x < z \text{ und } z < y) \\ \forall x \in a\ \exists z \in a: \ x < z \quad \text{und} \quad \forall x \in a\ \exists z \in a: \ z < x. \end{array}$$

$(a, <)$ Souslin Kontinuum

$\Longleftrightarrow$ (1) $(a, <)$ ist dicht

(2) $(a, <)$ ist vollständig

(3) $(a, <)$ besitzt eine abzählbare dichte Teilmenge, d.h.

$$\exists b \subseteq a,\ |b| \leq \aleph_0, \forall x, y \in a,\ x < y,\ \exists z \in b: \ (x < z \text{ und } z < y)$$

(4) jede Menge von paarweise disjunkten Intervallen in $(a, <)$ ist höchstens abzählbar.

$(\mathbb{R}, <)$ ist ein Souslin Kontinuum.

(SH): $(\mathbb{R}, <)$ ist bis auf Isomorphie das einzige Souslin Kontinuum.