Nichtstandardanalysis

Universität Freiburg

SS 2009

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/flum/nsa/

Inhalt: Aufbau der Analysis unter Verwendung von infinitesimalen (sprich: unendlich kleinen) Größen.

Ziel: Sicherer Umgang mit infinitesimalen und unendlich großen Zahlen.

Pythagoras (6. Jh. v.Chr.)

Pythagoreer

Vergleich und Messen von Strecken(verhältnissen)

- Vorstellung: Festlegung einer Strecke der Länge 1; jede andere Strecke damit kommensurabel (Länge durch rationale Zahl ausdrückbar).
- Feststellung: Es gibt inkommensurable Größen.

Eudoxos von Knidos (ca. 400 v.Chr.)

Arbeiten mit inkommensurablen Größen wie mit kommensurablen Größen

Zitat aus Mainzer in Ebbinghaus et al., ZAHLEN, Seite 27:

Zahlreiche Sätze der Proportionenlehre [Lehre der kommensurablen Größen] können wir heute als Rechengesetze für reelle Zahlen deuten. Man muß allerdings beachten, dass die Griechen nicht einmal rationale, geschweige denn irrationale Verhältnisse als Erweiterungen des Bereichs der natürlichen Zahlen auffaßten, sondern als Begriffe eigener Art ansahen. Das Ziel der Proportionenlehre sind geometrische Ergebnisse, wie beispielweise die exakte Begründung zahlreicher Formeln zur Flächen- und Inhaltsberechnung. . . .

Die Entwicklung des Zahlbegriffs erhält durch den Einfluß der indisch-arabischen Algebra einen entscheidenden Auftrieb. So rechnet der arabische Mathematiker Abu Kamil (ca. 850–930) mit Quadratwurzelausdrücken u.a. nach der Regel

$$\sqrt{p} + \sqrt{q} = \sqrt{p + q + 2 \cdot \sqrt{pq}}.$$

Man beginnt mit neuen Ausdrücken zu rechnen, ohne sie schon als neue Zahlen zu begreifen.

Durch die Lösungsformeln für Gleichungen 3. und 4. Grades, die im 16. Jahrhundert entdeckt wurden, erhielt dieses Vorgehen großen Auftrieb.

M. STIFEL *schreibt noch in seiner* Arithmetica integra *von 1544:*

> *So wie eine unendliche Zahl keine Zahl ist, so ist eine irrationale Zahl keine wahre Zahl, weil sie sozusagen unter einem Nebel der Unendlichkeit verborgen ist.*

Diesen "Nebel der Unendlichkeit" präzisiert S. STEVIN *(1548–1620) bereits als unendliche Folge von Dezimalzahlbrüchen, die er durch Intervallschachtelung bei der Lösungsapproximation von algebraischen Gleichungen entwickelt....*

Einen neuen Schub erfährt die Entwickliung des Zahlbegriffes durch die Infinitesimalrechnung im 17. und 18. Jahrhundert. Hier liefert insbesondere die Theorie der Reihen seit Leibniz und den Gebrüdern BERNOULLI *(Jakob (1654–1705), Johann (1667–1748)) eine neue Möglichkeit der Zahlendarstellung. Bereits in der* Arithmetica infintorum *(1655) des* J.

WALLIS *(1616–1703), findet sich z.B. die unendliche Produktentwicklung*

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots \qquad \Big[= \prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}\Big]$$

Zahlendarstellungen durch unendliche Summen bzw. Produkte wurden jedoch nicht – wie seit CAUCHY *und* WEIERSTRASS *üblich – als konvergierende Folgen mit dem Grenzwertbegriff definiert. Man sagt vielmehr, dass sich z.B.*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$$

von 1 um eine "infintesimal kleine" Größe unterscheidet.

L. EULER *formuliert 1734 ein Konvergenzkriterium für Reihe in der Sprache der infinitesimalen Größen. Neben den "endlichen" und "wirklichen" (reellen) Zahlen, die als Meßwerte Anwendung fanden, schien es also noch "infinitesimale" und "ideale" Zahlen zu geben. Im 19. Jahrhundert wurden sie jedoch als ungenaue und psychologisierende Redeweisen aus der Mathematik verbannt und nach Einführung des Grenzwertbegriffs (*CAUCHY, WEIERSTRASS*) als überflüssig empfunden.*

Erst in der Non-Standard-Analysis kamen die infinitesimalen Zahlen wieder zu neuen Ehren.

In the fall of 1960 it ocurred to me that the concepts and methods of contemporary Mathematical Logic are capable of providing a suitableframework for the development of the Differential and Integral Calculus by means of infinitely small and infinitely large numbers. ABRAHAM ROBINSON (1918–74)

A. Robinson

Konstruktion der reellen Zahlen aus den rationalen

– über Fundamentalfolgen durch G. CANTOR (1845–1918)

– über Dedekindsche Schnitte durch R. DEDEKIND (1831–1916)

G. Cantor

R. Dedekind

1876 schreibt Lipschitz an Dedekind über seine Schrift *Stetigkeit und Irrationalzahlen* von 1872, in der Dedekind die Konstruktion über die Schnitte angibt:

> *...Ich kann nur sagen, dass ich die von Euclid V aufgestellte Definition ...für genauso befriedigend halte, als Ihre Definition. Aus diesem Grunde würde ich wünschen, dass namentlich die Behauptung wegfiele, dass solche Sätze wie* $\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$ *bisher nicht wirklich bewiesen seien.... Was Sie an der Vollständigkeit des Gebietes erwähnen, die aus Ihren Prinzipien abgeleitet wird, so fällt dieselbe in der Sache mit der Grundeigenschaft einer Linie zusammen, ohne die kein Mensch sich eine Linie vorstellen kann.*

Hierzu Mainzer:

> *Während Lipschitz also einen Standpunkt zum Ausdruck bringt, der an Mathematiker früherer Jahrhunderte erinnert, denen ein intuitives Verständnis der Grundlagen ihrer Wissenschaft ausreichte, steht Dedekind am Anfang einer neuen methodischen Einstellung, der es – wie Cantor, Frege, Peano u.a. – um die präzise und explizite Formulierung der mathematischen Grundlagen geht.*

G. W. LEIBNIZ (1646–1716)

I. NEWTON (1642–1727)

G. Leibniz

I. Newton

Marquis de l'Hôpital (1661–1704), ein Schüler von Leibniz und Johann Bernoulli, schreibt 1696 im ersten Lehrbuch der Differentialrechnung, *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes (Analysis des Unendlich-Kleinen zum Verständnis der gekrümmten Linien)*:

> Demande ou supposition. *On demande qu'on puisse prendre indifférentment l'une pour l'autre deux quantités qui ne diffèrent entr'elles que d'une quantité infiniment petite.*

Ähnlich Leibniz: *It is correct to consider quantities of which the difference is incomparably small to be equal.*

und Johannes Bernoulli: *A quantity which is increased or decreased by an infinitesimally small quantity is neither increased or decreased.*

Hierzu A. Robinson:

> *This axiom* [of l'Hôpital] *is of great importance since it attempts to provide a basis for the justification of the fundamental rules of the differential calculus. Additional interest is lent to the axiom by the fact that it implies, clearly and immediately, a glaring contradiction, i.e. that the (infinitesimal) difference between two quantities may, at the same time, be both equal to, and different from, zero.*

LEONHARD EULER (1707–1783)

EULER schreibt in der 1748 erschienenen *Introductio in analysis infinitorum*

> *Da aber i* [i von infinitus; unsere Schreibweise $i = \sqrt{-1}$ geht auch auf Euler zurück, doch hat er sie erst viel später eingeführt] *eine unendlich große Zahl ist, so wird* $\frac{i-1}{i} = 1$*; denn offenbar nähert sich der Wert des Bruches immer mehr der Einheit, je größer die Zahl ist, die man für i setzt; es wird daher, wenn i eine Zahl bedeutet, die größer ist als jede nur denkbare Zahl, der Bruch* $\frac{i-1}{i}$ *gerade gleich der Einheit werden.*

Bei der Herleitung der Reihe für den Kosinus beginnt er mit der de Moivre-Formel:

$$\begin{aligned}\cos nz &= \frac{1}{2}\Big((\cos z + i\sin z)^n + (\cos z - i\sin z)^n\Big)\\ &= \cos^n z - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos^{n-2} z\sin^{n-2} z\\ &\qquad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cos^{n-4} z\sin^{n-4} z + \dots\end{aligned}$$

und schreibt dann

> *Ist nun z ein unendlich kleiner Bogen, so wird $\sin z = z$ und $\cos z = 1$. Ist alsdann ferner n eine unendlich große Zahl von der Beschaffenheit, dass nz einen Bogen von endlicher Größe, den wir v nennen wollen, darstellt, so wird, weil $\sin z = z = \frac{v}{n}$ ist:*

$$\cos v = 1 - \frac{v^2}{1\cdot 2} + \frac{v^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \text{etc}$$

Zwischenrechnung:

$$\cos v = 1 - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot 1\cdot\frac{v^2}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot 1\cdot\frac{v^4}{n^4} + \dots$$

Kurt Gödel (1906–1978) schreibt in einem Vorwort in A. Robinson's Buch *Non-Standard Analysis*:

> *I would like to point out a fact that was not explicitly mentioned by Professor Robinson, but seems quite important to me; namely that non-standard analysis frequently simplifies substantially the proofs, not only of elementary theorems, but also of deep results. This is true, e.g., also for the proof of the existence of invariant subspaces for compact operators, disregarding the improvement of the result; and it is true in an even higher degree in other cases. This state of affairs should prevent a rather common misinterpretation of non-standard analysis, namely the idea that it is some kind of extravagance or fad of mathematical logicians. Nothing could be farther from the truth. Rather there are good reasons to believe that non-standard analysis, in some version or other, will be the analysis of the future.*

One reason is the just mentioned simplification of proofs, since simplification facilitates discovery. Another, even more convincing reason, is the following: Arithmetic starts with the integers and proceeds by successively enlarging the number system by rational and negative numbers, irrational numbers, etc. But the next quite natural step after the reals, namely the introduction of infinitesimals, has simply been omitted. I think, in coming centuries it will be considered a great oddity in the history of mathematics that the first exact theory of infinitesimals was developed 300 years after invention of the differential calculus.

Ward Henson schreibt in einem vor ca. 10 Jahren erschienen Artikel *Foundations of Nonstandard Analysis. A Gentle Introduction to Nonstandard Extensions*:

> *There are many introductions to nonstandard analysis, so why write anther one? All of the existing introductions have one or more of the following features:*
>
> – *heavy use of logical formalism right from the start;*
>
> – *early introduction of set theoretic apparatus in excess of what is needed for some applications;*
>
> – *dependence on an explicit construction of the nonstandard model, usually by means of the ultrapower construction.*
>
> *All three of these features have negative consequences.*

D. Landers, L. Rogge in *Nichstandard Analysis*:

> *Die Nichtsandard-Mathematik hat in den letzten Jahrzehnten einen großen Aufschwung erfahren. Sie hat die Entwicklungen in den verschiedenartigsten Gebieten beeinflußt und befruchtet. Da die Nichtstandard-Analysis in der von A. Robinson entwickelten Form aus der Modelltheorie, einem Teilgebiet der mathematischen Logik, abgeleitet wurde, war sie selbst vielen Mathematikern nur schwer zugänglich. Die Bentzung von unendlich kleinen und unendlich großen Zahlen sowie eines neuen Begriffes der "Endlichkeit," mit dem man zum Beispiel die Menge der reellen Zahlen in eine "endliche" Menge einbetten konnte, erschien unheimlich und mystisch. Vieles klang wie Berichte aus einer zwar verlockenden, aber fremden neuen Welt, in der geradezu paradiesische Zustände herrschen: Viele Verbote waren plötzlich aufgehoben. Man durfte unbekümmert mit infinitesimalen Größen arbeiten, das dx der Differential- und Integralrechnung wurde eine reale Größe, mit der man numerisch rechnen konnte, Flächen und Rauminhalte gewann man durch einfaches "Abzählen," Integrieren entpuppte sich als bloßes Summieren. Der Weg in dieses Paradies war jedoch mit vielen ungewohnten Steinen der Mathematischen Logik gepflastert. . . .*

Wir hoffen, dass unsere Leser beim Studium dieses Buches den Enthusiasmus der Autoren für die Schönheit, Eleganz und Wirksamkeit der Nichtstandard-Methoden teilen werden.

Wozu Nichtsandardanalysis?

Wozu betreibt man irgendeine Mathematik?

Hier sieht D. Laugwitz vor allem drei Rechtfertigungsgründe:

(1) *den der Anwendung im weitesten Sinne, sei es in der Lösung von Problemen innerhalb und außerhalb der Mathematik, sei es durch die Neu- oder Weiterentwicklung von Methoden;*

(2) *den des Unterrichts, sei es durch Beiträge zu den Inhalten oder durch eine Verbesserung der Vermittlung;*

(3) *den der Reflexion auf die Mathematik selbst, seien es ihre Geschichte oder ihre Weiterentwicklung.*

H.S.M. COXETER:

Als Kind führte man mich in die Infinitesimalrechnung auf dem "bequemen" Weg ein, unter Gebrauch von unendlich kleinen Zahlen. Im Studium sollte ich diese Kindereien vergessen und ein strenger Mathematiker werden. Wie wunderbar, dass der Name Infinitesimalkalkül nun respektabel geworden ist!

K Menge, $\quad +^K, \cdot^K : K \times K \to K, \quad 0^K, 1^K \in K$

$(K, +^K, \cdot^K, 0^K, 1^K)$ ist ein Körper, wenn in ihm die Körperaxiome (I) gelten:

$$\text{(I)} \begin{cases} \forall x \forall y \forall z (x+y)+z = x+(y+z) & \forall x \forall y \forall z (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \\ \forall x\, x+0 = x & \forall x\, x \cdot 1 = x \\ \forall x \exists y\, x+y = 0 & \forall x (x \neq 0 \to \exists y\, x \cdot y = 1) \\ \forall x \forall y\, x+y = y+x & \forall x \forall y\, x \cdot y = y \cdot x \\ 0 \neq 1 & \\ \forall x \forall y \forall z\, x \cdot (y+z) = (x \cdot y) + (x \cdot z). & \end{cases}$$

$\leq^K \subseteq K \times K$; statt $(x, y) \in \leq^K$ schreiben wir auch $x \leq^K y$.

$(K, \leq^K)$ ist eine geordnete Menge (Ordnung), wenn in ihm die Ordnungsaxiome (II) gelten:

$$\text{(II)} \begin{cases} \forall x \forall y (x \leq y \vee y \leq x) \\ \forall x \forall y ((x \leq y \wedge y \leq x) \to x = y) \\ \forall x \forall y \forall z ((x \leq y \wedge y \leq z) \to x \leq z). \end{cases}$$

$(K, +^K, \cdot^K, 0^K, 1^K, \leq^K)$ ist ein geordneter Körper, wenn in ihm (I), (II) und die Verträglichkeitsaxiome (III) gelten:

$$\text{(III)} \begin{cases} \forall x \forall y \forall z (x \leq y \rightarrow x + z \leq y + z) \\ \forall x \forall y \forall z ((x \leq y \wedge 0 \leq z) \rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z). \end{cases}$$

Beispiele. $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$, genauer $(\mathbb{Q}, +^{\mathbb{Q}}, \ldots, \leq^{\mathbb{Q}})$ und $(\mathbb{R}, +^{\mathbb{R}}, \ldots, \leq^{\mathbb{R}})$, sind geordnete Körper.

Aufgabe. Sei K ein geordneter Körper.

1) Man zeige:

(a) Für alle $x, y \in K$: wenn $x \leq y$, so $-y \leq -x$.

(b) Für alle $x \in K$: $0 \leq x$ oder $0 \leq -x$.

2) Sei $|\;| : K \rightarrow K$ gegeben durch $|x| = \begin{cases} x & \text{falls } 0 \leq x \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$. Man zeige für $x, y \in K$:

(a) $|x| \geq 0, \quad |-x| = |x|, \quad x \leq |x|;$

(b) $|x + y| \leq |x| + |y|, \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|.$

Aufgabe. Es gibt kein $\leq^{\mathbb{C}} \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, sodass $(\mathbb{C}, +^{\mathbb{C}}, \cdot^{\mathbb{C}}, 0^{\mathbb{C}}, 1^{\mathbb{C}}, \leq^{\mathbb{C}})$ ein geordneter Körper ist.

Sei $(K, \leq)$ eine Ordnung, $M \subseteq K$, $x \in K$.

x ist eine obere Schranke von M	gdw	$\forall m \in M: \ m \leq x$;
x ist das Supremum von M	gdw	x ist obere Schranke von M und $\forall y \in K$ (wenn y obere Schranke von M, so $x \leq y$);
M ist nach oben beschränkt	gdw	$\exists x \in K$: x ist obere Schranke von M.

Beispiel. In $(\mathbb{Q}, \leq)$ gilt für

$$M := \{r \in \mathbb{Q} \mid r^2 \leq 2\}$$

– 7 ist obere Schranke von M

– M hat kein Supremum.

Eine Ordnung $(K, \leq)$ ist vollständig geordnet, wenn sie das Vollständigkeitsaxiom (IV) erfüllt:

(IV) Jede nicht leere nach oben beschränkte Teilmenge hat ein Supremum.

$(K, +^K, \cdot^K, 0^K, 1^K, \leq^K)$ ist ein vollständig geordneter Körper, wenn er (I)–(IV) erfüllt.

Satz. $(\mathbb{R}, +^{\mathbb{R}}, \ldots, \leq^{\mathbb{R}})$ ist bis auf Isomorphie der einzige vollständig geordnete Körper, d.h. (i) und (ii) gelten:

(i) $(\mathbb{R}, +^{\mathbb{R}}, \ldots, \leq^{\mathbb{R}})$ ist ein vollständig geordneter Körper;

(ii) Ist $(K, +^K, \cdot^K, 0^K, 1^K, \leq^K)$ ein vollständig geordneter Körper, so gibt ein bijektives $\pi : K \to \mathbb{R}$, das mit $+, \cdot, 0, 1, \leq$ verträglich ist, d.h.

- $\pi(x +^K y) = \pi(x) +^{\mathbb{R}} \pi(y); \quad \pi(x \cdot^K y) = \pi(x) \cdot^{\mathbb{R}} \pi(y);$
- $\pi(0^K) = 0^{\mathbb{R}}; \quad \pi(1^K) = 1^{\mathbb{R}};$
- $x \leq^K y \iff \pi(x) \leq^{\mathbb{R}} \pi(y).$

$$
\begin{aligned}
x \text{ infinitesimal} \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall r \in \mathbb{R},\ r > 0: \quad |x| < r. \\
x \text{ unendlich} \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall r \in \mathbb{R}: \quad r < |x|. \\
x \text{ endlich} \quad &\Longleftrightarrow \quad x \text{ nicht unendlich} \\
&\Longleftrightarrow \quad \exists r \in \mathbb{R}: \quad |x| \leq r.
\end{aligned}
$$

$$
x, y \text{ sind infinitesimal benachbart, } x \simeq y \quad \Longleftrightarrow \quad y - x \text{ ist infinitesimal.}
$$

Bemerkung 3. a) $\simeq$ ist eine Äquivalenzrelation. Für $x \in K$ ist die Äquivalenzklasse von x,

$$
\mu(x) = \{y \mid x \simeq y\},
$$

die Monade von x.

b) Für $r, s \in \mathbb{R}$, $r \neq s$ gilt: $\quad \mu(r) \cap \mu(s) = \emptyset$.

Beweis von Satz 2: Da x, y endlich sind, gibt es infinitesimale Δ und Δ' mit

$$x = \mathrm{st}(x) + \Delta \quad \text{und} \quad y = \mathrm{st}(y) + \Delta'.$$

Zu 5): $x + y = \underbrace{\mathrm{st}(x) + \mathrm{st}(y)}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{\Delta + \Delta'}_{\text{infinitesimal}}$. Somit $\mathrm{st}(x+y) = \mathrm{st}(x) + \mathrm{st}(y)$.

Zu 6): $x \cdot y = \underbrace{\mathrm{st}(x) \cdot \mathrm{st}(y)}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{\Delta \cdot \mathrm{st}(y)}_{\text{infinitesimal}} + \underbrace{\mathrm{st}(x) \cdot \Delta'}_{\text{infinitesimal}} + \underbrace{\Delta \cdot \Delta'}_{\text{infinitesimal}}$. Somit

$$\mathrm{st}(x \cdot y) = \mathrm{st}(x) \cdot \mathrm{st}(y).$$

Zu 7): Da $\mathrm{st}(y) \neq 0$, ist y nicht infinitesimal und damit nach Bem. 2 e) ist $\frac{1}{y}$ endlich. Nach Bem. 2 b) ist dann $\frac{x}{y}$ endlich. Dann

$$\mathrm{st}(x) = \mathrm{st}(\frac{x}{y} \cdot y) \overset{6)}{=} \mathrm{st}(\frac{x}{y}) \cdot \mathrm{st}(y), \qquad \text{also} \ \ \mathrm{st}(\frac{x}{y}) = \frac{\mathrm{st}(x)}{\mathrm{st}(y)}.$$

Zu 8): Sei $x \leq y$, also $\mathrm{st}(x) + \Delta \leq \mathrm{st}(y) + \Delta'$. Dann

$$\Delta - \Delta' \leq \underbrace{\mathrm{st}(y) - \mathrm{st}(x)}_{\in\mathbb{R}}. \qquad \text{Somit nach Bem. 1 d)}: \quad 0 \leq \mathrm{st}(y) - \mathrm{st}(x).$$

Zu 9) Gelte $\mathrm{st}(x) < \mathrm{st}(y)$. Angenommen $y \leq x$. Dann nach 8) $\mathrm{st}(y) \leq \mathrm{st}(x)$, ein Widerspruch.

Zu 10) a) Gelte $x \simeq r$ und $r < s$. Dann

$$\mathrm{st}(x) = r < s = \mathrm{st}(s),$$

woraus sich mit 9) die Behauptung $x < s$ ergibt.

Zu 11) Gelte $x < y$ und $x \not\simeq y$. Dann nach 8)

$$\mathrm{st}(x) \leq \mathrm{st}(y)$$

und wegen $x \not\simeq y$ somit

$$\mathrm{st}(x) < \mathrm{st}(y).$$

Da $\mathrm{st}(x), \mathrm{st}(y) \in \mathbb{R}$ existiert $r \in \mathbb{R}$ mit

$$\mathrm{st}(x) < r < \mathrm{st}(y).$$

Wegen

$$x \simeq \mathrm{st}(x) < r < \mathrm{st}(y) \simeq y$$

ergibt sich die Behauptung $x < r < y$ nun aus 10).

Körper $\mathbb{R}(X)$ der rationalen Funktionen über $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{R}(X) = \{\frac{p(X)}{q(X)} \mid \quad p(X), q(X) \text{ Polynome mit Koeffizienten in } \mathbb{R}; \\ q(X) \text{ vom Nullpolynom verschieden}\}$$

Definiere $+, \cdot, 0, 1$ auf $\mathbb{R}(X)$ wie in der Schule.

- $(\mathbb{R}(X), +, \cdot, 0, 1)$ ist ein Körper
- $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}(X)$ bei Identifikation von r $(\in \mathbb{R})$ mit $\frac{r}{1}$ $(\in \mathbb{R}(X))$.
- $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1) \subseteq (\mathbb{R}(X), +, \cdot, 0, 1)$.
- Jedes Element $\neq 0$ in $\mathbb{R}(X)$ ist darstellbar in der Form

$$\frac{p(X)}{q(X)} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{lll} p(X) = \sum_{\nu=0}^{\ell} a_\nu X^\nu & \text{und} & a_\ell \neq 0 \\ q(X) = \sum_{\nu=0}^{k} b_\nu X^\nu & \text{und} & b_k > 0 \end{array}$$

Wir definieren

$$0 < \frac{p(X)}{q(X)} \iff 0 <^{\mathbb{R}} a_\ell$$

und $\forall y, z \in \mathbb{R}(X)$:

$$y < z \iff 0 < z - y.$$

– $(\mathbb{R}(X), +, \cdot, 0, 1, <)$ ist ein geordneter Körper und $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \leq) \subseteq (\mathbb{R}(X), +, \cdot, 0, 1, \leq)$.

Bemerkung. $\frac{X}{1}$ ist unendlich$^+$ und somit $\frac{1}{X}$ infinitesimal$^+$.

Beweis. Sei $r \in \mathbb{R}$. Dann $r < \frac{X}{1}$, da $0 < \frac{X-r}{1}$. Somit $\frac{X}{1}$ unendlich$^+$ und damit $\frac{1}{X}$ infinitesimal$^+$.

Alphabet der Sprache L:

(a) VARIABLE. v_1, v_2,... x, y, z

(b) KONSTANTENSYMBOLE. Für $r \in \mathbb{R}$: $\underline{r}$

(c) RELATIONSSYMBOLE. Für $n \geq 1$ und $Q \subseteq \mathbb{R}^n$: $\underline{Q}$

(d) JUNKTOREN. $\neg$ "nicht", $\wedge$ "und", $\vee$ "oder",
$\rightarrow$ "wenn – so", $\leftrightarrow$ "genau dann, wenn"

(e) QUANTOREN. $\forall$ "für alle", $\exists$ "es gibt"

(f) GLEICHHEITSZEICHEN. $=$

(g) HILFSSYMBOLE.), (

Terme der Sprache L sind Variable oder Konstantensymbole.

Ausdrücke (Formeln) von L sind die Zeichenreihen, die man durch endlichmalige Anwendung der folgenden Regeln erhalten kann:

(A1) Für Terme t_1, t_2 ist $t_1 = t_2$ ein Ausdruck.

(A2) Für $n \geq 1$, $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ und Terme $t_1, \ldots, t_n$ ist $\underline{Q} t_1 \ldots t_n$ ein Ausdruck.

(A3) Ist φ ein Ausdruck, so auch $\neg\varphi$.

(A4) Sind φ und ψ Ausdrücke, so auch $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ und $(\varphi \leftrightarrow \psi)$.

(A5) Ist φ ein Ausdruck und x eine Variable, so sind $\forall x \varphi$ und $\exists x \varphi$ Ausdrücke.

$$\mathcal{R} = (\mathbb{R}, (r)_{r\in\mathbb{R}}, (Q)_{n\geq 1,\ Q\subseteq\mathbb{R}^n})$$

$$\underline{r}, \qquad \underline{Q}$$

$$\varphi_M(x): \quad \forall y(\underline{M}y \to y\underline{\leq}x)$$

$$\psi_M(z): \quad (\varphi_M(z) \wedge \forall x(\varphi_M(x) \to z\underline{\leq}x)$$

$$\text{wobei } \varphi_M(z): \quad \forall y(\underline{M}y \to y\underline{\leq}z)$$

$$\chi_M: \quad \Big((\exists y\underline{M}y \wedge \exists x\varphi_M(x)) \to \exists z\psi_M(z)\Big)$$

$$\mathcal{R}^* = (\mathbb{R}^*, (r)_{r\in\mathbb{R}}, (Q^*)_{n\geq 1,\ Q\subseteq\mathbb{R}^n})$$

– $Q \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$Q^* = Q \cap \mathbb{R}^n \qquad \text{insbesondere } Q \subseteq Q^*.$$

$$Q^* = Q \qquad \Longleftrightarrow \qquad Q \text{ endlich}$$

– $f : A \to \mathbb{R}$:

$$f^* : A^* \to \mathbb{R}^* \qquad \text{und} \qquad f = f^* \restriction A.$$

– $X \subseteq (\mathbb{R}^*)^n$:

$$X \text{ standard} \iff \text{es gibt } Q \subseteq \mathbb{R}^n \text{ mit } X = Q^*.$$

– h n-stellige Funktion über $\mathbb{R}^*$:

$$h \text{ standard} \iff \text{es gibt eine } n\text{-stellige Funktion } f \text{ über } \mathbb{R} \text{ mit } h = f^*.$$

Beweis von Bem. 2: Sei $\Delta \neq 0$.

a) $$\frac{(f+g)^*(r+\Delta)-(f+g)(r)}{\Delta} \overset{\text{TP}}{=} \frac{f^*(r+\Delta)-f(r)}{\Delta}+\frac{g^*(r+\Delta)-g(r)}{\Delta} \simeq f'(r)+g'(r).$$

b) $$\frac{f^*(r+\Delta)\cdot g^*(r+\Delta)-f(r)\cdot g(r)}{\Delta} = \frac{f^*(r+\Delta)-f(r)}{\Delta}\cdot g^*(r+\Delta) + \frac{g^*(r+\Delta)-g(r)}{\Delta}\cdot f(r) \simeq f'(r)\cdot g(r)+g'(r)\cdot f(r).$$

c) Da $g(r)\neq 0$, gilt $g^*(r+\Delta)\neq 0$ wegen Bem. 1 b)i). Somit

$$\frac{\frac{1}{g^*(r+\Delta)}-\frac{1}{g(r)}}{\Delta} = \frac{\frac{g(r)-g^*(r+\Delta)}{g^*(r+\Delta)\cdot g(r)}}{\Delta} = \frac{g(r)-g^*(r+\Delta)}{\Delta}\cdot\frac{1}{g^*(r+\Delta)\cdot g(r)} \simeq -g'(r)\cdot\frac{1}{(g(r))^2}.$$

d)

$$
\begin{aligned}
&(f \circ g)^*(r+\Delta) \overset{\text{TP}}{=} f^*(g^*(r+\Delta)) && \text{nach Zuwachsregel ex } \Delta_1 \\
&\quad = f^*(g(r) + \Delta \cdot (g'(r) + \Delta_1)) && \text{da } \Delta \cdot (g'(r) + \Delta_1) \text{ infinitesimal ist,} \\
& && \text{gibt es nach Zuwachsregel } \Delta_2 \\
&\quad = f(g(r)) + \Delta \cdot (g'(r) + \Delta_1) \cdot f'(g(r)) + \Delta \cdot (g'(r) + \Delta_1) \cdot \Delta_2 \\
&\quad = f(g(r)) + \Delta \cdot g'(r) f'(g(r)) + \Delta \cdot \underbrace{\Big(\Delta_1 \cdot f'(g(r)) + (g'(r) + \Delta_1) \cdot \Delta_2\Big)}_{\text{infinitesimal}} \\
&\quad \simeq_\Delta f(g(r)) + \Delta \cdot g'(r) \cdot f'(g(r))
\end{aligned}
$$

Wiederum mit der Zuwachsregel erhalten wir:

$$
(f \circ g)'(r) = g'(r) f'(g(r)).
$$

$$\frac{f^*(b) - f^*(a)}{b - a} = \frac{\dfrac{1}{(2\kappa + 1/2)^2}}{\dfrac{1}{2\kappa + 1/2} - \dfrac{1}{2\kappa}} = \frac{\dfrac{1}{(2\kappa + 1/2)^2}}{\dfrac{-1/2}{(2\kappa + 1/2) \cdot 2\kappa}} = \frac{1}{\dfrac{-1/2 \cdot (2\kappa + 1/2)}{2\kappa}}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{-1}{2} - \dfrac{1}{8\kappa}} \simeq -2$$

$r \in \mathbb{R}, \quad \mu(r) \subseteq \mathrm{df}(f^*), \quad s \in \mathbb{R}$:

f differenzierbar in r mit Ableitung s $\Longleftrightarrow$ für alle $\Delta \neq 0: \quad \dfrac{f^*(r+\Delta) - f(r)}{\Delta} \simeq s$

Somit: Ist f differenzierbar in r, so

$$\text{für alle } b \in \mu(r): \quad \frac{f^*(b) - f^*(r)}{b - r} \simeq f'(r)$$

Sei f differenzierbar in r.

f gleichmäßig differenzierbar in r $\Longleftrightarrow$ für alle $a, b \in \mu(r): \quad \dfrac{f^*(b) - f^*(a)}{b - a} \simeq f'(r)$

$$\forall z\Big((\underline{\mathbb{N}}z\wedge z\underline{\geq}\underline{0}) \to \exists x\big(\underline{\mathbb{N}}x \wedge x\underline{\leq}z \wedge \underline{f}(\underline{r}\underline{+}x\underline{\cdot}\frac{\underline{s}\underline{-}\underline{r}}{z}) \underline{\leq} \underline{w} \underline{\leq} \underline{f}(\underline{r}\underline{+}(x\underline{+}\underline{1})\underline{\cdot}\frac{\underline{s}\underline{-}\underline{r}}{z}))\Big) \tag{1}$$

$$\forall z\Big((\underline{\mathbb{N}}z\wedge z\underline{\geq}\underline{0}) \to \exists x\big(\underline{\mathbb{N}}x \wedge x\underline{\leq}\underline{z} \wedge \forall y((\underline{\mathbb{N}}y \wedge y\underline{\leq}\underline{z}) \to \underline{f}(\underline{r}\underline{+}y\underline{\cdot}\frac{\underline{s}\underline{-}\underline{r}}{z}) \underline{\leq} \underline{f}(\underline{r}\underline{+}x\underline{\cdot}\frac{\underline{s}\underline{-}\underline{r}}{z}))\Big) \tag{2}$$

$$\forall z\Big((\underline{\mathbb{N}}z\wedge z\underline{\geq}\underline{0}) \to \forall x\big(\underline{[r,s]}\,x \to \exists y(\underline{\mathbb{N}}y \wedge y\underline{\leq}z \wedge \underline{r}\underline{+}y\underline{\cdot}\frac{\underline{s}\underline{-}\underline{r}}{z}) \underline{\leq} x \underline{\leq}\underline{r}\underline{+}(y\underline{+}\underline{1})\underline{\cdot}\frac{\underline{s}\underline{-}\underline{r}}{z}))\Big) \tag{3}$$

Satz von Rolle. Sei $r < s$, $f : [r, s] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, f in $]r, s[$ differenzierbar und $f(r) = f(s)$. Dann existiert $x_0 \in]r, s[$ mit

$$f'(x_0) = 0.$$

Beweis. Die Behauptung ist klar, falls $f(x) = f(r)$ für alle $x \in]r, s[$. Sonst existiert ein x_1 mit $f(x_1) < f(r)$ oder $f(x_1) > f(r)$. Dann wird das Minimum bzw. das Maximum in einem Punkte $x_0 \in]r, s[$ angenommen. Somit $f'(x_0) = 0$ nach \$ 3 Bem. 1 b). $\square$

Mittelwertsatz. Sei $r < s$, $f : [r, s] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, f in $]r, s[$ differenzierbar. Dann existiert $x_0 \in]r, s[$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(s) - f(r)}{s - r}.$$

Beweis. Man wende den Satz von Rolle auf $g : [r, s] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(x) := f(x) - \frac{f(s) - f(r)}{s - r}(x - r)$$

an. $\square$

Folgerung. Sei $r < s$, $f : [r,s] \to \mathbb{R}$ stetig, f in $]r,s[$ differenzierbar.

(1) Ist $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in]r,s[$, so ist f monoton steigend.

(2) Ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in]r,s[$, so ist f streng monoton steigend.

Beweis. Zu (1): Angenommen es gibt $r', s' \in [r,s]$ mit $r' < s'$ und $f(r') > f(s')$. Dann gibt es nach dem Mittelwertsatz ein $x_0 \in]r', s'[\subseteq]r,s[$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(s') - f(r')}{s' - r'} < 0,$$

ein Widerspruch. □

Rechenregeln für Exponenten

Seien $r, s \in \mathbb{R}, r, s > 0$ und $p, q \in \mathbb{Q}$. Dann:

(1) $1^p = 1, \quad r^0 = 1$

(2) $r^{p+q} = r^p \cdot r^q, \quad r^{p-q} = \frac{r^p}{r^q}$

(3) $r^{p \cdot q} = (r^p)^q$,

(4) $r^p \cdot s^p = (r \cdot s)^p, \quad \frac{r^p}{s^p} = (\frac{r}{s})^p$

(5) Wenn $r < s$ und $p > 0$, dann $r^p < s^p$.

(6) Wenn $1 < r$ und $p < q$, dann $r^p < r^q$.

(7) Wenn $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ und $p \geq 1$, so $(1+t)^p \geq 1 + pt$.

Beweis. Zu (5): Sei $p = \frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$. Dann ergibt sich aus $r < s$, dass $r^m < s^m$ und damit $r^{\frac{m}{n}} < s^{\frac{m}{n}}$ (wegen der strengen Monotonie der Funktionen).

Zu (6): $r^q = r^{p+(q-p)} = r^p \cdot r^{q-p}$. Da $1 < r$, wegen (5) $1^{q-p} < r^{q-p}$. Somit

$$r^p = 1 \cdot r^p < r^{q-p} \cdot r^p = r^q.$$

Zu (7): Für $x > 0$ und $f(x) = (1+x)^p - (1+px)$ gilt $f'(x) = p \cdot (1+x)^{p-1} - p$
$\geq p \cdot 1^0 - p = 0$. Somit ist f monoton wachsend. Da $f(0) = 0$, folgt die Behauptung.

Satz. $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$. Äquivalent sind:

(i) f ist stetig in r.

(ii) Es existiert infinitesimales, positives Δ mit:

$$\forall a \in D^*(|a - r| < \Delta \Rightarrow f^*(a) \simeq f(r)).$$

(iii) f ist stetig$^{\mathrm{I}}$ in r.

$r, \epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$

$K_\epsilon(r)$ ist offen:

Seien $s \in \mathbb{R}$, $s \in K_\epsilon(r)^* = \{a \in \mathbb{R}^* \mid |a - r| < \epsilon\}$, und Δ infinitesimal.

Da

$$|s - r| < \epsilon,$$

ist

$$|(s + \Delta) - r| \leq |s - r| + |\Delta| < \epsilon.$$

Somit ist

$$s + \Delta \in K_\epsilon(r)^*$$

und damit

$$\mu(r) \subseteq K_\epsilon(r)^*.$$

Folgerung aus dem Hauptsatz über gleichmäßig stetige Funktionen. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und gelte für alle $n \in \mathbb{N}$

$$f : D \cap [-n, n] \to \mathbb{R}$$

ist gleichmäßig stetig. Dann existiert genau ein g mit

$$g : \overline{D} \to \mathbb{R}, \qquad g \text{ ist stetig} \quad \text{und} \quad g \restriction D = f.$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $g \restriction [-n, n]$ gleichmäßig stetig.

Bemerkung. Sei $r > 0$ und $n \geq 1$. Die Funktion

$$f : \mathbb{Q} \cap [-n, n] \to \mathbb{R} \qquad \text{mit} \qquad f(q) := r^q$$

ist gleichmäßig stetig.

Folgerung. Sei $r > 0$. Die Funktion

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \qquad \text{mit} \qquad f(q) := r^q$$

hat eine eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $g \restriction [-n, n]$ gleichmäßig stetig.

Wir schreiben r^t für $g(t)$.

Voraussetzung. I Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig.

$r, s \in I$, $r < s$. Dann fassen wir die Riemannsche Summe

$$\sum_{r}^{s} f(x)\Delta x$$

(bei festgehaltenen f, r, s) als Funktion (von Δx) auf $]0, s-r]$ auf und bezeichnen sie als Riemannsche Summenfunktion RS. Somit RS $:]0, s-r] \to \mathbb{R}$ und damit
RS* $:]0, s-r]^* \to \mathbb{R}^*$.

$$\int_r^s f(x)dx = \mathrm{st}(\mathrm{RS}^*(dx)) = \mathrm{st}(\textstyle\sum_r^s f(x)dx).$$

Satz 1. $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, $r, s \in I$, $r < s$, dx, du infinitesimal$^+$. Dann

$$\int_r^s f(x)dx = \int_r^s f(u)du.$$

Beweis. Wegen Symmetrie genügt z.z.: Ist $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, so

$$\int_r^s f(x)dx \leq \Big(\int_r^s f(u)du\Big) + \varepsilon.$$

Bemerkung. Für alle unendlich positiven $a, b \in \mathbb{R}^*$ gilt:

(1) $(1+\frac{1}{a})^a \simeq (1+\frac{1}{b})^b$ und $(1-\frac{1}{a})^a \simeq (1-\frac{1}{b})^b$.

(2) $(1+\frac{1}{a})^a$ und $(1-\frac{1}{a})^a$ sind endlich und $(1-\frac{1}{a})^a \simeq \frac{1}{(1+\frac{1}{a})^a}$.

Beweis. Sei $c := \int_0^1 2^t dt$. Es genügt zu zeigen: Für unendlich positives $a \in \mathbb{R}^*$

$$(1+\frac{1}{a})^a \simeq 2^c \qquad \text{und} \qquad (1-\frac{1}{a})^a \simeq 2^{-c}.$$

Wir zeigen die erste “nahe bei”-Beziehung, die zweite wird mit den naheliegenden Änderungen gezeigt). Sei also a unendlich$^+$. Dann

$$\log_2(1+\frac{1}{a}) \overset{\log_2 \text{stetig}}{\simeq} \log_2 1 = 0.$$

Da $\log_2$ streng monoton wachsend ist, ist

$$\Delta = \log_2(1+\frac{1}{a})$$

infinitesimal$^+$.

Weiterhin ist $2^\Delta = 1 + \frac{1}{a}$, also

$$a = \frac{1}{2^\Delta - 1}. \tag{4}$$

Wir wählen $\kappa \in \mathbb{N}^*$ $(\backslash\mathbb{N})$ mit

$$(\kappa - 1) \cdot \Delta < 1 \leq \kappa \cdot \Delta. \qquad \text{Somit } \kappa \cdot \Delta \simeq 1.$$

Es gilt nach der Definition des Integrals

$$c \simeq \left(1 + 2^\Delta + 2^{2\Delta} + \ldots + 2^{(\kappa-1)\cdot\Delta}\right) \cdot \Delta = \frac{2^{\kappa\cdot\Delta} - 1}{2^\Delta - 1} \cdot \Delta = (2^{\kappa\cdot\Delta} - 1) \cdot \frac{\Delta}{2^\Delta - 1}.$$

Wegen $\kappa \cdot \Delta \simeq 1$ gilt $2^{\kappa\cdot\Delta} - 1 \simeq 2 - 1$. Somit

$$c \simeq \frac{\Delta}{2^\Delta - 1}.$$

Wegen $\Delta = \log_2(1 + \frac{1}{a})$ und (4) daher

$$c \simeq a \cdot \log_2(1 + \frac{1}{a}) = \log_2\left((1 + \frac{1}{a})^a\right)$$

und wegen der Stetigkeit von 2^t daher

$$2^c \simeq (1 + \frac{1}{a})^a.$$

$\square$

Definition. $e = \mathrm{st}\big((1+\frac{1}{a})^a\big)$.

Satz. $(e^x)' = e^x$.

Beweis. Sei $t \in \mathbb{R}$ und Δ infinitesimal, $\Delta \neq 0$; zu zeigen ist

$$\frac{e^{t+\Delta} - e^t}{\Delta} \simeq e^t.$$

Sei etwa $\Delta > 0$ (der Fall $\Delta < 0$ wird entsprechend behandelt). Wegen $\frac{e^{t+\Delta}-e^t}{\Delta} = e^t \cdot \frac{e^\Delta - 1}{\Delta}$ genügt es, zu zeigen

$$b = \frac{e^\Delta - 1}{\Delta} \simeq 1.$$

Da $e^0 = 1$ und e^x stetig und streng monoton wachsend ist, gilt

$$b \cdot \Delta = e^\Delta - 1 \simeq 0 \quad \text{und } b \cdot \Delta \text{ infinitesimal}^+.$$

Somit (nach vorangehendem Satz)

$$e \simeq \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{b\cdot\Delta}}\right)^{\frac{1}{b\cdot\Delta}} = (1 + b\cdot\Delta)^{\frac{1}{b\cdot\Delta}} = (e^\Delta)^{\frac{1}{b\cdot\Delta}} = e^{\frac{1}{b}}.$$

Wegen

$$e \simeq e^{\frac{1}{b}}$$

ist b nicht unendlich (sonst $e \simeq e^{\frac{1}{b}} \simeq 1$, anderseits $e^0 = 1 < e^1 = e$) und nicht infintesimal (da sonst $\frac{1}{b}$ unendlich$^+$ und somit $e^{\frac{1}{b}}$ unendlich$^+$). Daher und wegen der Stetigkeit von e^x

$$e = \mathrm{st}(e^{\frac{1}{b}}) = e^{\frac{1}{\mathrm{st}(b)}}$$

Da e^x injektiv ist, gilt somit $\frac{1}{\mathrm{st}(b)} = 1$, d.h $b \simeq 1$. $\square$

$$
\begin{array}{lcl}
(r_n) \text{ konvergiert gegen } r & \iff & \forall \kappa \;\; r_\kappa \simeq r \\
r \text{ Häufungspunkt von } \;(r_n) & \iff & \exists \kappa \;\; r_\kappa \simeq r \\
(r_n) \text{ Cauchyfolge} & \iff & \forall \kappa, \lambda \;\; r_\kappa \simeq r_\lambda .
\end{array}
$$

- $\forall n \in \mathbb{N} \;\; |r_n| \leq M \quad \iff \quad \forall \mu \in \mathbb{N}^* \;\; |r_\mu| \leq M$
- Äquivalent sind:
  - $\{r_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist beschränkt (in $(\mathbb{R}, \leq)$);
  - Alle r_μ (mit $\mu \in \mathbb{N}^*$) sind endlich;
  - $\{r_\mu \mid \mu \in \mathbb{N}^*\}$ ist beschränkt (in $(\mathbb{R}^*, \leq)$).

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $r \in \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

(i) r ist innerer Punkt von D, d.h. $\mu(r) \subseteq D^*$, also

$$\text{für alle infinit}^+ \ \Delta \text{und } a \in \mathbb{R}^*\text{: wenn } |a - r| < \Delta, \text{ so } a \in D^*;$$

(ii) Es gibt ein infinit$^+$ Δ, so dass für alle $a \in \mathbb{R}^*$: wenn $|a - r| < \Delta$, so $a \in D^*$

(iii) Es gibt ein positives $\varepsilon \in \mathbb{R}$, so dass für alle $s \in \mathbb{R}$: wenn $|s - r| < \Delta$, so $s \in D$.

Beweis des Permanenzprinzips B:

$$\exists \Delta \text{ inf}^+ : \quad \mathcal{R}^* \models \varphi[\Delta]$$

$$\Longleftrightarrow \text{nicht } \forall \Delta \text{ inf}^+ : \quad \mathcal{R}^* \models \neg\varphi[\Delta]$$

$$\Longleftrightarrow \text{nicht } \exists \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0,\ \forall \delta \text{ mit } 0 < \delta \leq \varepsilon : \quad \mathcal{R} \models \neg\varphi[\delta] \qquad \text{(PP A auf } \neg\varphi)$$

$$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0, \quad \exists \delta \text{ mit } 0 < \delta \leq \varepsilon : \quad \mathcal{R} \models \varphi[\delta].$$

Beweis des Permanenzprinzips D:

$$
\begin{aligned}
&\exists k \forall n \geq k : \ \mathcal{R} \models \varphi[n] \\
&\qquad \Longleftrightarrow \text{nicht } \forall k \exists n \geq k : \quad \mathcal{R} \models \neg\varphi[n] \\
&\qquad \Longleftrightarrow \text{nicht } \exists \kappa : \quad \mathcal{R}^* \models \neg\varphi[\kappa] && \text{(PP C auf } \neg\varphi) \\
&\qquad \Longleftrightarrow \text{nicht } \forall \lambda \exists \kappa \geq \lambda : \quad \mathcal{R}^* \models \neg\varphi[\kappa] && \text{(PP C auf } \neg\varphi) \\
&\qquad \Longleftrightarrow \forall \kappa : \quad \mathcal{R}^* \models \varphi[\kappa] \\
&\qquad \Longleftrightarrow \exists \lambda \forall \kappa \geq \lambda : \quad \mathcal{R}^* \models \varphi[\kappa].
\end{aligned}
$$

Alphabet der Sprache L_1:

(a) VARIABLE. v_1, v_2,... x, y, z

(b) KONSTANTENSYMBOLE. Für $a \in R_1$: $\underline{a}$

(c) RELATIONSSYMBOLE. Für $n \geq 1$ und $Q \subseteq R_1^n$: $\underline{Q}$

(d) JUNKTOREN. $\neg$ "nicht", $\wedge$ "und", $\vee$ "oder",
$\rightarrow$ "wenn – so", $\leftrightarrow$ "genau dann, wenn"

(e) QUANTOREN. $\forall$ "für alle", $\exists$ "es gibt"

(f) GLEICHHEITSZEICHEN. $=$

(g) HILFSSYMBOLE.), (

L_1-Terme sind Variable oder Konstantensymbole.

L_1-Ausdrücke (L_1-Formeln) sind die Zeichenreihen, die man durch endlichmalige Anwendung der folgenden Regeln erhalten kann:

(A1) Für L_1-Terme t_1, t_2 ist $t_1 = t_2$ ein Ausdruck.

(A2) Für $n \geq 1$, $Q \subseteq R_1^n$ und L_1-Terme $t_1, \ldots, t_n$ ist $\underline{Q} t_1 \ldots t_n$ ein Ausdruck.

(A3) Ist φ ein Ausdruck, so auch $\neg\varphi$.

(A4) Sind φ und ψ Ausdrücke, so auch $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ und $(\varphi \leftrightarrow \psi)$.

(A5) Ist φ ein Ausdruck und x eine Variable, so sind $\forall x \varphi$ und $\exists x \varphi$ Ausdrücke.

L_1-Sätze sind L_1-Ausdrücke, bei denen alle Variable im Wirkungsbereich eines Quantors stehen.

Ist φ ein L_1-Satz, so kann φ in $\mathcal{R}_1$ gelesen werden und geht dabei in eine wahre Aussage (φ gilt in $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_1$ ist Modell von φ, $\mathcal{R}_1 \models \varphi$) oder in eine falsche Aussage über.

$$\mathcal{R}_1 = \Big(\mathbb{R} \cup F \cup \mathrm{P}(\mathbb{R}), (a)_{a\in\mathcal{R}_1}, (Q)_{n\geq 1,\ Q\subseteq R_1^n}\Big)$$

1) $\varphi_1 = \forall x(\underline{R}x \vee \underline{F}x \vee \underline{\mathrm{P}(\mathbb{R})}x) \wedge \forall x\Big(\neg(\underline{R}x \wedge \underline{F}x) \wedge \neg(\underline{R}x \wedge \underline{\mathrm{P}(\mathbb{R})}x)) \wedge \neg(\underline{F}x \wedge \underline{\mathrm{P}(\mathbb{R})}x)\Big)$

φ_1 besagt in $\mathcal{R}_1$: $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} \,\dot\cup\, F \,\dot\cup\, \mathrm{P}(\mathbb{R})$

2) Jedem L-Satz φ kann man einen L_1-Satz $\hat\varphi$ zuordnen, der in $\mathcal{R}_1$ dasselbe besagt wie φ in $\mathcal{R}$; insbesondere

$$\mathcal{R}_1 \models \hat\varphi \iff \mathcal{R} \models \varphi.$$

3) a) $W \subseteq R_1^3$ $\qquad W frs \iff f \in F,\ r, s \in \mathbb{R}$ und $f(r) = s.$

$$\varphi_2 = \forall y \in \underline{R}\, \exists z \in \underline{F}\, \forall x \in \underline{R}\; W zxy$$

φ_2 besagt: Zu jeder Zahl y gibt es die konstante Funktion mit Wert y.

$$\varphi_3 = \forall x \in \underline{R}\, \exists y \in \underline{\mathrm{P}(\mathbb{R})}\ \forall z\, (\underline{\varepsilon} z y \leftrightarrow y = x)$$

φ_3 besagt: Zu jeder Zahl x gibt es die Menge $\{x\}$.

$$\varphi_4 = \forall x \forall y \Big((\underline{N} x \wedge \underline{N} y) \rightarrow \exists z (\underline{\mathrm{Fin}}\, z \wedge \forall u (u \underline{\varepsilon} z \leftrightarrow (\underline{N} u \wedge x \underline{\leq} u \wedge u \underline{\leq} y))) \Big)$$

φ_4 besagt: Zu natürlichen Zahlen x, y gibt es die endliche Menge $\{x, x+1, \ldots, y\}$.

$$\mathcal{R} = (\mathbb{R}, (r)_{r\in\mathbb{R}}, (Q)_{n\geq 1,\ Q\subseteq\mathbb{R}^n}) \qquad \mathcal{R}^* = (\mathbb{R}^*, (r)_{r\in\mathbb{R}}, (Q^*)_{n\geq 1,\ Q\subseteq\mathbb{R}^n})$$

$$L \to L(c)$$

$$\Phi_{\mathrm{Lb}} = \mathrm{Th}(\mathcal{R}) \cup \{\neg c = \underline{r} \mid r \in \mathbb{R}\}$$

$$\varphi_5 = \forall z \in \underline{F}\, \forall x \in \underline{\mathbb{R}}\, \exists^{=1} y \in \underline{\mathbb{R}}\; \underline{W} zxy$$

$$(\varphi_5 = \forall z \in \underline{F}\, \forall x \in \underline{\mathbb{R}}\, \exists y \in \underline{\mathbb{R}} (\underline{W} zxy \wedge \forall u \in \underline{\mathbb{R}} (\underline{W} zxu \rightarrow u = y)))$$

φ_5 besagt: Elemente in $\underline{F}$ entsprechen totalen einstelligen Funktionen über der Menge der Zahlen.

$$\varphi_6 = \forall z_1 \in \underline{F}\, \forall z_2 \in \underline{F} (\neg z_1 = z_2 \rightarrow \exists x \in \underline{\mathbb{R}}\, \exists y \in \underline{\mathbb{R}}\, (\underline{W} z_1 xy \wedge \neg \underline{W} z_2 xy))$$

φ_6 besagt: Verschiedene Elemente in $\underline{F}$ entsprechen verschiedenen Funktionen.

$$\varphi_7 = \forall y_1 \in \underline{\mathrm{P}(\mathbb{R})}\, \forall y_2 \in \underline{\mathrm{P}(\mathbb{R})} (\neg y_1 = y_2 \rightarrow \exists x \in \underline{\mathbb{R}}\, ((x \underline{\varepsilon} y_1 \wedge \neg x \underline{\varepsilon} y_2) \vee (\neg x \underline{\varepsilon} y_1 \wedge x \underline{\varepsilon} y_2)))$$

φ_7 besagt: Verschiedene Elemente in $\underline{\mathrm{P}(\mathbb{R})}$ entsprechen verschiedenen Teilmengen.

$$\mathcal{R}_1^* = \Big(R_1^*, (a^*)_{a \in \mathcal{R}_1}, (Q^*)_{n \geq 1,\ Q \subseteq R_1^n}\Big)$$

Transferprinzip (TP). Existenz idealer Punkt (IP).

- $R_1 = \mathbb{R}^* \ \dot{\cup}\ F^* \ \dot{\cup}\ (\mathrm{P}(\mathbb{R}))^*$.
- $\mathcal{R}^* = (\mathbb{R}^*, (r^*)_{r \in \mathbb{R}}, (Q^*)_{n \geq 1,\ Q \subseteq \mathbb{R}^n})$ "entspricht" dem alten $\mathcal{R}^*$; insbesondere können wir $r^* = r$ für $r \in \mathbb{R}$ annehmen.
- Weiterhin können wir annehmen:
  - $\underbrace{\{f^* \mid f \in F\}}_{\text{standard}} \subset \underbrace{F^*}_{\text{intern}} \subset \underbrace{\{h \mid h : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*\}}_{\text{extern}}$
  - $\underbrace{\{M^* \mid M \in \mathrm{P}(\mathbb{R})\}}_{\text{standard}} \subset \underbrace{\mathrm{P}(\mathbb{R})^*}_{\text{intern}} \subset \underbrace{\mathrm{P}(\mathbb{R}^*)}_{\text{extern}}$.

5 a) (Vollständigkeitsaxiom gilt für Optomatiker) Jede nicht-leere nach oben (unten) in $(\mathbb{R}^*, \leq^*)$ beschränkte Teilmenge besitzt in $(\mathbb{R}^*, \leq^*)$ ein Supremum (Infimum).

$$\varphi_4 = \forall x \forall y \Big((\underline{N}x \wedge \underline{N}y) \longrightarrow \exists z (\underline{\mathrm{Fin}}\, z \wedge \forall u (u \underline{\varepsilon} z \leftrightarrow (\underline{N}u \wedge x \underline{\leq} u \wedge u \underline{\leq} y))) \Big)$$

φ_4 besagt: Zu natürlichen Zahlen x, y gibt es die endliche Menge $\{x, x+1, \ldots, y\}$.

$$\varphi_8 = \forall z \in \underline{\mathrm{Fin}} (\neg z = \underline{\emptyset} \longrightarrow \exists u \exists v (u \underline{\varepsilon} z \wedge v \underline{\varepsilon} z \wedge \forall x (x \underline{\varepsilon} z \longrightarrow (u \underline{\leq} x \wedge x \underline{\leq} v))))$$

φ_8 besagt: Jede endliche, nichtleere Menge von Zahlen enthält eine größte und eine kleinste Zahl.

$$\varphi_9 = \forall z \in \underline{\mathrm{Fin}}\ \forall u \in \underline{F}\ \exists v \in \underline{\mathrm{Fin}}\ \forall y \in \underline{\mathbb{R}}\, (y \underline{\varepsilon} v \leftrightarrow \exists x (x \underline{\varepsilon} z \wedge \underline{W} uxy))$$

φ_9 besagt: Die Bildmenge einer endlichen Menge unter einer Funktion ist endlich.

Existenz idealer Punkt (IP). Für jede L_1-Formel, für die $\varphi(\mathcal{R}_1)$ zusammenlaufend ist, existiert ein $b \in R_1^*$ mit

$$\text{für alle } a \in \mathrm{Vb}(\varphi(\mathcal{R}_1)): \quad \mathcal{R}_1^* \models \varphi[a, b].$$

§ 2, Bem. 3) Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $Z_M \subseteq R_1 \times R_1$ gegeben durch

$$Z_M ab \iff a \in \mathbb{R},\ b \in \mathrm{P}(\mathbb{R}),\ b \text{ endlich, und } a \in b \subseteq M$$

– Z_M in $\mathcal{R}_1$ definierbar durch

$$\psi_M(x, y) = \big(\underline{\mathbb{R}}x \wedge \underline{\mathrm{Fin}}\, y \wedge x \underline{\varepsilon} y \wedge \forall z(z \underline{\varepsilon} y \rightarrow x \underline{\varepsilon}\, \underline{M})\big)$$

– Z_M zusammenlaufend und $\mathrm{Vb}(Z_M) = M$.

$$\varphi_{10} = \forall z \in \underline{\mathrm{P}(\mathbb{R})}\Big(\underline{\mathrm{Fin}}\, z \iff$$
$$\exists^{=1} v(\underline{\mathbb{N}} v \wedge \underline{0} \underline{\leq} v \wedge \exists h \in \underline{F}\, \forall y(y \underline{\varepsilon} z \leftrightarrow \exists^{=1} u(\underline{\mathbb{N}} u \wedge \underline{0} \underline{<} u \wedge u \underline{\leq} v \wedge \underline{W}\, huy)))\Big)$$

φ_{10} besagt: Eine Menge ist endlich gdw sie zu einem Anfangsabschnitt der positiven natürlichen Zahlen gleichmächtig ist.

Definierbarkeitslemma. Sei $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ L_1-Formel, $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}_1^*$. Dann ist

$$A = \{a \in \mathbb{R}^* \mid \mathcal{R}_1^* \models \varphi[a, b_1, \ldots, b_n]\}$$

intern.

Beispiel. $B_1, B_1 \subseteq \mathbb{R}^*$ intern. Dann ist

$$B_1 + B_2 := \{a_1 + a_2 \mid a_1 \in B_1 \text{ und } a_2 \in B_2\}$$

intern.

Setze im Definierbarkeitslemma $b_1 = B_1$, $b_2 = B_2$ und

$$\varphi(x, x_1, x_2) = \exists u_1 \exists u_2 (u_1 \underline{\varepsilon} x_1 \wedge u_2 \underline{\varepsilon} x_2 \wedge \underline{G_+} u_1 u_2 x).$$

Dann $A = B_1 + B_2$.

$r, s \in \mathbb{R}$, $r < s$, $n \in \mathbb{N}$;

$$\Delta = \frac{s - r}{n}$$

$$x_i = r + i \cdot \Delta \qquad \text{und} \qquad y_i = y(x_i)$$

$$\begin{aligned}
y_0 &= w_0 \\
y_1 &= y_0 + f(x_0, y_0) \cdot \Delta &&= w_0 + f(x_0, y_0) \cdot \Delta \\
y_2 &= y_1 + f(x_1, y_1) \cdot \Delta &&= w_0 + f(x_0, y_0) \cdot \Delta + f(x_1, y_1) \cdot \Delta \\
&\vdots \\
y_n &= y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1}) \cdot \Delta &&= w_0 + \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i) \cdot \Delta.
\end{aligned}$$

Wenn $x \in [x_\ell, x_{\ell+1}]$, so

$$y(x) = w_0 + \sum_{i=0}^{\ell-1} f(x_i, y_i) \cdot \Delta + f(x_\ell, y_\ell) \cdot (x - x_\ell)$$

$$
\begin{aligned}
|y(t)-\Big(\mathrm{st}(a_0)+\int_r^t f(x,y(x))dx\Big)| &\overset{(6)}{\simeq} |z(t)-\Big(\mathrm{st}(a_0)+\int_r^t f(x,y(x))dx\Big)| \\
&\overset{(3)}{\simeq} |z(x_{\nu+1})-\Big(\mathrm{st}(a_0)+\int_r^t f(x,y(x))dx\Big)| \\
&\overset{(2)}{\simeq} |a_0+\sum_{\rho=0}^{\nu} f^*(x_\rho,z(x_\rho))\cdot\Delta-\Big(\mathrm{st}(a_0)+\int_r^t f(x,y(x))dx\Big)| \\
&\overset{a_0\simeq\mathrm{st}(a_0)}{\simeq} |\sum_{\rho=0}^{\nu} f^*(x_\rho,z(x_\rho))\cdot\Delta-\int_r^t f(x,y(x))dx| \\
&\overset{dx=\Delta;t\simeq x_{\nu+1}}{\simeq} |\sum_{\rho=0}^{\nu} f^*(x_\rho,z(x_\rho))\cdot\Delta-\sum_{\rho=0}^{\nu} f^*(x_\rho,y^*(x_\rho))\cdot\Delta| \\
&= |\sum_{\rho=0}^{\nu}\Big(\underbrace{f^*(x_\rho,z(x_\rho))-f^*(x_\rho,y^*(x_\rho))}_{\text{infinitesimal}}\Big)\cdot\Delta
\end{aligned}
$$

da $z(x_\rho)\overset{(6)}{\simeq} y^*(x_\rho)\simeq t'$ (für ein geeignetes $t'\in\mathbb{R}$) und somit

$$
f^*(x_\rho,z(x_\rho))\simeq f(t,t')\simeq f^*(x_\rho,y^*(x_\rho))
$$

$= \text{infinitesimal}$ (nach §3, 7e, da $\sum_{\rho=0}^{\nu}\Delta = x_{\nu+1}-r$.)

Beweis. $\Delta := \frac{s-r}{n}$, $x_i := r + i \cdot \Delta$.

Durch Induktion über ℓ definieren wir $\delta(u,\ell)$ für jedes $u \in \mathbb{R}$, $u > 0$, sodass für alle $v, w \in [-S, S]$:

$$\text{wenn} \quad |w - v| \leq \delta(u,\ell), \quad \text{so} \quad |y_{w,n}(x_\ell) - y_{v,n}(x_\ell)| \leq u.$$

$\delta(u, 0) = u$.

$$\begin{aligned}|y_{w,n}(x_{\ell+1}) - y_{v,n}(x_{\ell+1})| &= |y_{w,n}(x_\ell) - y_{v,n}(x_\ell)| + |f(x_\ell, y_{w,n}(x_\ell)) - f(x_\ell, y_{v,n}(x_\ell))| \cdot \Delta \\ &\leq \qquad ? \qquad + |f(x_\ell, y_{w,n}(x_\ell)) - f(x_\ell, y_{v,n}(x_\ell))| \cdot \Delta \leq u\end{aligned}$$

Da

$$\forall x \in [r,s]\ \forall v' \in [-S,S] : \quad |y_{v',n}(x)| \leq \underbrace{S + M \cdot (s-r)}_{T},$$

existiert wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f in $[r,s] \times [-T,T]$ ein $\eta > 0$ mit:

$$\text{wenn} \quad |y_{w,n}(x_\ell)) - y_{v,n}(x_\ell)| \leq \eta, \quad \text{so} \quad |f(x_\ell, y_{w,n}(x_\ell)) - f(x_\ell, y_{v,n}(x_\ell))| \cdot \Delta \leq \tfrac{u}{2}.$$

Dann $\delta(u, \ell+1) = \delta(\min\{\eta, \frac{u}{2}\}, \ell)$.

Beweis von Lemma 1 b). $\Rightarrow$: Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Dann

$$\mathcal{R}^* \models \exists \delta \in \underline{\mathbb{R}}\Big(\delta > 0 \land \exists u \in \underline{\mathbb{N}}\, \forall v \in \underline{\mathbb{N}}(u \leq v \rightarrow$$
$$\forall y \in \underline{D}(|y - \underline{r}| < \delta \rightarrow |f_v(y) - \underline{f}(y)| < \underline{\varepsilon}))\Big)$$

$(\delta \leftarrow \Delta \text{ inf}^+; u \leftarrow \lambda \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N})$

$\mathcal{R} \models \ldots$ liefert die Behauptung

$\Leftarrow$: Seien κ und $a \in D^*$ gegeben und $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Z.z. $|f_\kappa(a) - f^*(a)| < \varepsilon$.

Wähle $\delta \in \underline{\mathbb{R}}$, $\delta > 0$ und $u \in \mathbb{N}$ mit

$$\mathcal{R} \models \forall v \in \underline{\mathbb{N}}(\underline{u} \leq v \rightarrow \forall y \in \underline{D}(|y - \underline{r}| < \underline{\delta} \rightarrow |f_v(y) - \underline{f}(y)| < \underline{\varepsilon}))$$

Dann

$$\mathcal{R}^* \models \forall v \in \underline{\mathbb{N}}(\underline{u} \leq v \rightarrow \forall y \in \underline{D}(|y - \underline{r}| < \underline{\delta} \rightarrow |f_v(y) - \underline{f}(y)| < \underline{\varepsilon})).$$

Für $v \leftarrow \kappa$ und $y \leftarrow a$ erhalten wir die Behauptung.

$D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : D \to \mathbb{R}$, $r \in D$

- (f_n) konvergiert gegen f in r $\iff$ $\forall \kappa : \quad f_\kappa(r) \simeq f^*(r)$.
- (f_n) konv. gleichmäßig gegen f in r $\iff$ $\forall \kappa \forall a \in D^* : (a \simeq r \to \ f_\kappa(a) \simeq f^*(a))$
- Alle (f_n) sind stetig in r $\iff$ $\forall n \in \mathbb{N} \forall a \in D^* : (a \simeq r \to \ f_n^*(a) \simeq f_n^*(r))$.
- (f_n) gleichgradig stetig in r $\iff$ $\forall \mu \in \mathbb{N}^* \forall a \in D^* : (a \simeq r \to \ f_\mu(a) \simeq f_\mu(r))$.

Bemerkung. Sei $r \in D$, für alle $n \in \mathbb{N}$ sei f_n stetig in r und (f_n) konvergiere gleichmäßig gegen f in r. Dann ist (f_n) gleichgradig stetig in r (und somit f stetig in r).

Lemma 1 b). Äquivalent sind:

(i) (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen f in r.

(ii) $$\forall \varepsilon \in \underline{\mathbb{R}}, \varepsilon > 0 \, \exists \delta \in \underline{\mathbb{R}} \Big(\delta > 0 \, \wedge \, \exists u \in \underline{\mathbb{N}} \forall v \in \underline{\mathbb{N}} \big(u \leq v \to \\ \forall y \in \underline{D} (|y - \underline{r}| < \delta \to |f_v(y) - \underline{f}(y)| < \underline{\varepsilon}) \big) \Big)$$

Paul Dirac (1902–1984) in seinem 1930 erschienenen Buch “The Principles of Quantum Mechanics:”

> *Our work. . . has lead us to consider quantities involving a certain kind of infinity. To get a precise notation for dealing with these infinities, we introduce a quantity* $\delta(x)$ *depending on* x *satisfying the conditions*
>
> $$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1, \qquad \delta(x) = 0 \text{ for } x \neq 0.$$
>
> *To get a picture of* $\delta(x)$*, take a function of the real variable* x *which vanishes everywhere except inside a small domain, of length* ε *say, surrounding the origin* $x = 0$*, and which is so large inside this domain that its integral over this domain is unity. The exact shape of the function inside this domain does not matter. . . Then in the limit* $\varepsilon \to 0$ *this function will go over into* $\delta(x)$*.*
>
> *The most important property of* $\delta(x)$ *is exemplified by the following equation,*
>
> $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \delta(x)dx = f(0),$$
>
> *where* $f(x)$ *is any continuous function of* x*. We can easily see the validity of this equation from the above picture of* $\delta(x)$*. . .*

Aus Flügge "Handbuch der Physik"

The "function" $\delta(x)$ defined in this way is not like the functions we encounter in the ordinary way in mathematical analysis. The latter are defined to have a definite value at each point of a certain domain. For this reason DIRAC *has called the Delta function an "improper function" and has emphasized that it may be used in analysis only when no inconsistency can possibly arise from its use. It has been suggested by* DIRAC *himself that the delta function could be dispensed with by using a limiting procedure involving ordinary functions. But the "function" and its "derivates" play such a useful role in the formulation and solution of boundary value problems in classical mathematical physics as well as in quantum mechanics that it is important to derive the formal properties of the* DIRAC *delta function. It should be emphasized, however, that these properties are formal.*

$f \in F$, $r, s, t \in \mathbb{R}$

$$\underbrace{\int_r^s f(x)dx = t,}_{I frst} \qquad \underbrace{\int_{-\infty}^s f(x)dx = t,}_{I_{-\infty} fst} \qquad \underbrace{\int_r^\infty f(x)dx = t,}_{I^\infty frt} \qquad \underbrace{\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = t,}_{I_{-\infty}^\infty ft}$$

Dann

$$I \subseteq R_1^4, \qquad I_{-\infty}, I^\infty \subseteq R_1^3, \qquad I_{-\infty}^\infty \subseteq R_1^2$$

Definition. Seien $h \in F^*$ und $a, b, c \in \mathbb{R}^*$.

1) $\int_a^b h(x)dx = c$ gdw $I^* habc$.

2) $\int_{-\infty}^b h(x)dx = c$ gdw $(I_{-\infty})^* hbc$.

3) $\int_a^\infty h(x)dx = c$ gdw $(I^\infty)^* hac$.

4) $\int_{-\infty}^\infty h(x)dx = c$ gdw $(I_{-\infty}^\infty)^* hc$.

Lemma 1. Sei $h : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ intern und $a, c \in \mathbb{R}^*$. Dann gilt:

$$\int_a^\infty h(x)dx = c \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^*, \varepsilon > 0 \ \exists b_0 \in \mathbb{R}^*, b_0 > a$$

$$\forall b \in \mathbb{R}^*, b \geq b_0 : \quad |\int_a^b h(x)dx - c| < \varepsilon.$$

Beweis. Da

$$\mathcal{R} \models \forall f \in \underline{F} \ \forall x, z \in \underline{\mathbb{R}} \Big(\underline{I^\infty} \, fxz \leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon \in \underline{\mathbb{R}} (\varepsilon > 0 \to \exists y_0 \in \underline{\mathbb{R}} (y_0 > x \wedge \forall y \in \underline{\mathbb{R}} (y \geq y_0 \to \exists u \in \underline{\mathbb{R}} (\underline{I} \, fxyu \wedge |u - z| < \varepsilon)))) \Big)$$

gilt

$$\mathcal{R}^* \models \forall f \in \underline{F} \ \forall x, z \in \underline{\mathbb{R}} \Big(\underline{I^\infty} \, fxz \leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon \in \underline{\mathbb{R}} (\varepsilon > 0 \to \exists y_0 \in \underline{\mathbb{R}} (y_0 > x \wedge \forall y \in \underline{\mathbb{R}} (y \geq y_0 \to \exists u \in \underline{\mathbb{R}} (\underline{I} \, fxyu \wedge |u - z| < \varepsilon)))) \Big)$$

und somit die Behauptung.

Wegen (TP) gilt:

Lemma 2. Für stetige $g, h \in F^*$, $a, b, c \in \mathbb{R}^*$

a) Wenn $\int_{-\infty}^{\infty} h(x)dx$ existiert (also $\int_{-\infty}^{\infty} h(x)dx = d$ für ein $d \in \mathbb{R}^*$), so

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)dx = \int_{-\infty}^{a} h(x)dx + \int_{a}^{b} h(x)dx + \int_{b}^{\infty} h(x)dx.$$

b) Wenn für alle $x \in \mathbb{R}^*$ gilt $|g(x)| \leq c$ und $h(x) \geq 0$, so

$$|\int_{a}^{b} g(x) \cdot h(x)dx| \leq c \cdot \int_{a}^{b} h(x)dx.$$

c) (Mittelwertsatz der Integralrechnung) Wenn $h(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^*$, so gibt es ein $\xi \in]a, b[^{\mathbb{R}^*}$ mit

$$\int_{a}^{b} g(x) \cdot h(x)dx = g(\xi) \cdot \int_{a}^{b} h(x)dx.$$

d) Ist $c > 0$, so

$$\int_a^b c \cdot g(c \cdot x) dx = \int_{c \cdot a}^{c \cdot b} g(y) dy,$$

und entsprechend für die uneigentlichen Integrale, etwa

$$\int_{-\infty}^b c \cdot g(c \cdot x) dx = \int_{-\infty}^{c \cdot b} g(y) dy.$$

Eine interne Funktion $\delta : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ ist eine Deltafunktion an der Stelle 0, wenn

(1) δ ist stetig*.

(2) $\forall a \in \mathbb{R}^*$: $\delta(a) \geq 0$.

(3) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$.

(4) Für alle $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$: $\int_{-\infty}^{-r} \delta(x)dx \simeq 0$ und $\int_{r}^{\infty} \delta(x)dx \simeq 0$.

Alphabet der Sprache $L(\mathcal{A}_\omega)$:

(a) VARIABLE. v_1, v_2,. . . x, y, z

(b) KONSTANTENSYMBOLE. Für $a \in A_\omega$: $\underline{a}$

(c) RELATIONSSYMBOL. $\underline{\in}$

(d) JUNKTOREN. $\neg$ “nicht”, $\wedge$ “und”, $\vee$ “oder”,
$\rightarrow$ “wenn – so”, $\leftrightarrow$ “genau dann, wenn”

(e) QUANTOREN. $\forall$ “für alle”, $\exists$ “es gibt”

(f) GLEICHHEITSZEICHEN. $=$

(g) HILFSSYMBOLE.), (

$L(\mathcal{A}_\omega)$-Terme sind Variable oder Konstantensymbole.

II a) $\varphi_1 = \forall x(x \mathrel{\underline{\in}} \underline{A_0} \rightarrow \forall y \neg y \mathrel{\underline{\in}} x)$

φ_1 besagt in $\mathcal{A}_\omega$: Urelemente enthalten keine Elemente

II b) $\varphi_{2,n} = \forall x\Big(\neg x \mathrel{\underline{\in}} \underline{A_0} \rightarrow (x \mathrel{\underline{\in}} \underline{A_{n+1}} \leftrightarrow \forall y(y \mathrel{\underline{\in}} x \rightarrow y \mathrel{\underline{\in}} \underline{A_n}))\Big)$

$\varphi_{2,n}$ besagt in $\mathcal{A}_\omega$: Elemente von A_ω, die keine Urelemente sind, liegen genau dann in A_{n+1}, wenn alle ihre Elemente in A_n liegen.

II c) $\varphi_3 = \forall x \forall y\Big((\neg x \mathrel{\underline{\in}} \underline{A_0} \wedge \neg y \mathrel{\underline{\in}} \underline{A_0}) \rightarrow (x = y \leftrightarrow \forall z(z \mathrel{\underline{\in}} x \leftrightarrow z \mathrel{\underline{\in}} y))\Big)$

φ_3 besagt in $\mathcal{A}_\omega$: Je zwei Elemente von A_ω, die keine Urelemente sind, sind genau dann gleich wenn sie die gleichen Elemente enthalten.

Für eine Menge A von Urelementen sei

$$A_0 = A, \qquad A_{n+1} = A_n \cup \mathrm{P}(A_n), \qquad A_\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

Insbesondere: $A_n \in A_{n+1} \subseteq A_\omega$.

$$\mathcal{A}_\omega = (A_\omega, (a)_{a \in A_\omega}, \in)$$

.

III Bemerkung. Sei $\mathcal{A}_\omega^* = (A_\omega^*, (a^*)_{a \in A_\omega}, \in^*)$ und $\mathcal{A}_\omega^* \models \mathrm{Th}(\mathcal{A}_\omega)$. Dann

a) (Transferprinzip) Für alle $L(\mathcal{A}_\omega)$-Sätze φ

$$\mathcal{A}_\omega \models \varphi \iff \mathcal{A}_\omega^* \models \varphi.$$

b) Wir identifizieren im Folgenden für $a \in A$ $(= A_0)$ das Element a^* mit a.

$$\varphi_4 = \forall x_1 \ldots \forall x_k \Big((x_1 \mathrel{\underline{\in}} \underline{A_\ell} \ \wedge \ldots \wedge x_k \mathrel{\underline{\in}} \underline{A_\ell}) \rightarrow \text{“}(x_1, \ldots, x_k) \mathrel{\underline{\in}} \underline{A_{\ell+3}}\text{”} \Big) \wedge$$
$$\forall y_1 \ldots \forall y_n \exists z \Big(z \mathrel{\underline{\in}} \underline{A_{\ell+4}} \wedge \forall x_1 \ldots \forall x_k ((x_1 \mathrel{\underline{\in}} \underline{A_\ell} \ \wedge \ldots \wedge x_k \mathrel{\underline{\in}} \underline{A_\ell}) \rightarrow$$
$$((x_1, \ldots, x_k) \mathrel{\underline{\in}} z \leftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_\ell))) \Big)$$

$$\varphi_5 = \forall x (x \mathrel{\underline{\in}} \underline{\mathbb{R}} \rightarrow \exists y (y \mathrel{\underline{\in}} \underline{\mathbb{N}} \wedge \text{“}(x,y) \mathrel{\underline{\in}} \underline{\leq}\text{”}))$$

“$(x,y) \mathrel{\underline{\in}} \underline{\leq}$”	Abkürzung für	$\exists z (z \mathrel{\underline{\in}} \underline{\leq} \wedge \text{“}z = (x,y)\text{”})$
“$z = (x,y)$”	Abkürzung für	$\forall u (u \mathrel{\underline{\in}} z \leftrightarrow (\text{“}u = \{x\}\text{”} \vee \text{“}u = \{x,y\}\text{”}))$
“$u = \{x\}$”	Abkürzung für	$\forall z (z \mathrel{\underline{\in}} u \leftrightarrow z = x)$
“$u = \{x,y\}$”	Abkürzung für	$\forall z (z \mathrel{\underline{\in}} u \leftrightarrow (z = x \vee z = y))$

Jedem L_1-Satz φ kann man einen $L(\mathcal{A}_\omega)$-Satz $\hat{\varphi}$ zuordnen, der in $\mathcal{A}_\omega$ dasselbe besagt wie φ in $\mathcal{R}_1$; insbesondere

$$\mathcal{A}_\omega \models \hat{\varphi} \iff \mathcal{R}_1 \models \varphi.$$

$Z \subseteq D \times D$

Z zusammenlaufend: $\forall n \geq 1 \ \forall a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{Vb}(Z) \ \exists b \in \mathrm{Nb}(Z):$

$$Za_1b, \ldots, Za_nb$$

I Beispiele und Bemerkungen. a) $(\mathbb{R}, \sigma_{\mathbb{R}})$ ist topologischer Raum, wobei

$$\sigma_{\mathbb{R}} = \{O \subseteq \mathbb{R} \mid O \text{ (offen)}^{\mathrm{I}}\}$$

b) $(\mathbb{R}^n, \sigma_{\mathbb{R}^n})$ ist topologischer Raum, wobei

$$\sigma_{\mathbb{R}^n} = \{O \subseteq \mathbb{R}^n \mid O \text{ (offen)}^{\mathrm{I}}\}$$

c) $(M, \mathrm{P}(M))$ ist topologischer Raum, $\mathrm{P}(M)$ die diskrete Topologie auf M.

d) $(M, \{\emptyset, M\})$ ist topologischer Raum, $\{\emptyset, M\}$ die triviale Topologie auf M.

e) (M, σ_{coe}) ist topologischer Raum, wobei

$$\sigma_{\text{coe}} = \{X \subseteq M \mid M \setminus X \text{ endlich}\} \cup \{\emptyset\},$$

die Topologie der coendlichen Mengen auf M.

f) Seien (M, σ) topologischer Raum und $L \subseteq M$. Dann ist

$$(L, \{L \cap O \mid O \in \sigma\})$$

ist ein topologischer Raum, die auf L durch (M, σ) induzierte Topologie.

g) Sei (M, d) ein metrischer Raum, d.h. M ist eine Menge und die Abstandsfunktion $d : M \times M \to \mathbb{R}$ erfüllt für alle $x, y, z \in M$:

- $d(x, y) \geq 0 \qquad$ und $\qquad (d(x, y) = 0 \iff x = y)$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Für $x \in M$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, ist

$$K_r(x) = \{y \in M \mid d(x, y) \leq r\}$$

die Kugel um x mit Radius r.

Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ ist offen in (M, d), wenn

$$\forall x \in Y \; \exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 : \; K_\varepsilon(x) \subseteq Y.$$

Dann gilt:

$$\sigma_d = \{Y \subseteq M \mid Y \text{ offen in } (M, d)\}$$

ist eine Topologie auf M, die durch (M, d) auf M induzierte Topologie.

h) $(\mathbb{R}^n, d_E)$ ist eine metrischer Raum, wobei

$$d_E((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

die Euklidische Metrik ist. Es gilt

$$\sigma_{d_E} = \sigma_{\mathbb{R}^n}.$$

h) $(\mathbb{R}^n, d_M)$ ist eine metrischer Raum, wobei

$$d_M((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}$$

die Maximumsmetrik ist.

II Beispiele und Bemerkungen. 1) Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$, so

$$A \text{ abgeschlossen} \iff A \text{ (abgeschlossen)}^{\mathrm{I}}$$

2) – $\emptyset$ und M sind agbeschlossen.

– Die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.

– Der Durchscnitt von abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.

3) (Charakterisierung der abgeschlossenen Mengen) B ist abgeschlossen gdw

$$\forall p \in M (\mu(p) \cap B^* \neq \emptyset \Rightarrow p \in B).$$

4). Für $B \subseteq M$ ist (per definitionem)

$$\bar{B} = \bigcap_{\substack{B \subseteq A \\ A \text{ abgeschlossen}}} A$$

die abgeschlossene Hülle von A. Es gilt:

a) $B \subseteq \bar{B}$ und $\bar{B}$ ist abgeschlossen.

b) Ist $B \subseteq A$ und A abgeschlossen, so $\bar{B} \subseteq A$.

c) B abgeschlossen $\iff$ $B = \bar{B}$.

d) $\bar{B} = M \setminus \operatorname{int}(M \setminus B)$

e) $\bar{B} = \{p \in M \mid \mu(p) \cap B^* \neq \emptyset\}$.

$$
\begin{array}{ccl}
B \text{ offen} & \iff & \forall p \in B: \ \mu(p) \subseteq B^* \\
B \text{ abgeschlossen} & \iff & \forall p \in M \ (\mu(p) \cap B^* \neq \emptyset \rightarrow p \in B) \\
B \text{ kompakt} & \iff & \forall a \in B^* \exists p \in B: \ a \in \mu(p) \\
& & \text{jeder Punkt in } B^* \text{ liegt in der Monade eines Punktes aus } B
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
a \text{ nahestandard}: & \exists p \in M: \ a \in \mu(p) \\
a \text{ nahestandard zu } p: & a \in \mu(p) \\
& \mathrm{ns}(M^*) = \{a \in M^* \mid a \text{ nahestandard}\}
\end{array}
$$

Satz 2 und Definition. σ hausdorffsch, $a \in M^*$ nahestandard. Dann gibt es genau ein $p \in M$ mit $a \in \mu(p)$; p ist der Standardteil von a, $p = \mathrm{st}(a)$.

$$\mathrm{st}: \mathrm{ns}(M^*) \rightarrow M$$

σ hausdorffsch:

$$
\begin{aligned}
B \text{ kompakt} &\iff B \subseteq \mathrm{ns}(M^*) \text{ und } \mathrm{st}(B^*) \subseteq B \\
&\iff B^* \subseteq \mathrm{st}^{-1}(B).
\end{aligned}
$$

Satz 3. $B \subseteq M$

$$B \text{ kompakt } \iff \forall \sigma' \subseteq \sigma \Big(B \subseteq \bigcup_{O \in \sigma'} O \to \exists \sigma_0 \subseteq \sigma',\ \sigma_0 \text{ endlich und } B \subseteq \bigcup_{O \in \sigma_0} O \Big).$$

$f_i : B \to C_i$. Für die gröbste Topologie auf B, in der alle f_i stetig sind, gilt für $p \in B$:

$$\mu(p) = \bigcap_{i \in I} f_i^{*-1}(\mu_i(f_i(p))).$$

$$\begin{aligned}\Pi_{i \in I} C_i &= \{f \mid \mathrm{df}(f) = I,\ \forall i \in I : f(i) \in C_i\} \\ &= \{(p_i)_{i \in I} \mid \forall i \in I : p_i \in C_i\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\Pi_{i \in I} C_i)^* &= \{h \mid h \text{ intern},\ \mathrm{df}(h) = I^*,\ \forall i \in I^* : h(i) \in C_i^*\} \\ &= \{(a_i)_{i \in I^*} \mid (a_i)_{i \in I^*} \text{ intern},\ \forall i \in I^* : a_i \in C_i^*\}\end{aligned}$$

(M, d) metrischer Raum. Metrik induziert Topologie

$$\sigma_d = \{O \mid \forall p \in O\, \exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 : \; K_\varepsilon(p) \subseteq O\}$$

Bemerkung 1. Sei (M, d) metrischer Raum.

a) Für $p \in M$ gilt

$$\mu(p) = \bigcap_{\substack{p \in O \\ O \in \sigma_d}} O^* = \bigcap_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R}, \\ \varepsilon > 0}} K_\varepsilon(p)^* = \{a \in M^* \mid d^*(a, p) \text{ infinitesimal}\}.$$

Somit:

$$a \in \mu(p) \iff d^*(a, p) \text{ infinitesimal.}$$

b) (M, σ_d) ist hausdorffsch (da $\mu(p) \cap \mu(q) = \emptyset$ für $p, q \in M$ mit $p \neq q$ wegen a) und da $d(p, q) \in \mathbb{R}$, $d(p, q) > 0$).

c) Sei $B \subseteq M$. Dann ist (B, d) (genauer $(B, d \restriction B \times B)$) ein metrischer Raum und die durch d auf B induzierte Topologie ist die Spurtopologie.

d) Auf M^* wird durch

$$a \simeq b \;\; (a \text{ und } b \text{ sind infinitesimal benachbart}) \iff d^*(a, b) \text{ infinitesimal}$$

eine Äquivalenzrelation definiert.

e) Für $B \subseteq M$ gilt

$$\begin{aligned} B \text{ offen} \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall p \in B \; \forall a \in M^*(a \simeq p \Rightarrow a \in B^*) \\ B \text{ abgeschlossen} \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall p \in M \; \forall a \in B^*(a \simeq p \Rightarrow p \in B) \end{aligned}$$

$$\bar{B} = \{p \in M \mid \exists a \in B^* : a \simeq p\}.$$

f) (M, d) und (L, d') metrische Räume, $B \subseteq M$, $f : B \to L$

$$f \text{ stetig} \iff \forall p \in B \; \forall a \in B^*(a \simeq p \Rightarrow f^*(a) \simeq f(p)).$$

Definition. (M, d) metrischer Raum, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in M, $p \in M$.

a) $(p_n) \to p \iff \forall \kappa\ p_\kappa \simeq p$

b) p Häufungspunkt von $(p_n) \iff \exists \kappa\ p_\kappa \simeq p$

c) (p_n) Cauchyfolge $\iff \forall \kappa\ \forall \lambda\ p_\kappa \simeq p_\lambda$.

Bemerkung 1) Wenn (p_n) konvergent, so (p_n) Cauchyfolge.

2) $\{\mathrm{st}(p_\kappa \mid \kappa \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N},\ p_\kappa$ nahestandard$\}$ ist die Menge der Häufungspunkt von (p_n).

3) (Robinsonsches Folgenlemma) Sind $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}^*}$ und $(b_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}^*}$ interne Folgen in M^* und gilt $a_n \simeq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so existiert κ mit $a_\nu \simeq b_\nu$ für alle $\nu \leq \kappa$.

4) Seien (M, d) und (L, d') metrische Räume, $f : M \to L$, $p \in M$, $p_n \in M$ für $n \in \mathbb{N}$.

a) Wenn $(p_n) \to p$ und f stetig, so $(f(p_n)) \to f(p)$.

b) Wenn (p_n) Cauchyfolge und f gleichmäßig stetig, so $(f(p_n))$ Cauchyfolge.

(M, d) metrischer Raum, $a \in M^*$.

$$
\begin{aligned}
a \text{ nahestandard (ns)} &\iff \text{existiert } p \in M \;\; a \in \mu(p) \\
a \text{ prenahestandard (pns)} &\iff \text{existiert Folge } (p_n) \\
&\qquad \forall n \in \mathbb{N}\; p_n \in M \quad \text{und} \quad \forall \kappa\; p_\kappa \simeq a \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Bemerkungen und Beispiele a) Wenn a ns, so a pns.

c) Wenn a pns und (p_n) mit (1), dann ist (p_n) Cauchyfolge.

d) Wenn (p_n) Cauchyfolge, so p_λ pns für alle $\lambda \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$.

e) Sei $a \in M^*$ und gelte

$$\forall n \in \mathbb{N} \left(p_n \in M \quad \text{und} \quad d^*(p_n, a) < \frac{1}{n} \right).$$

Dann $\forall \kappa\; p_\kappa \simeq a$; insbesondere ist a pns.

$(V, \langle\ ,\ \rangle)$ euklidischer Vektorraum:

- V Vektorraum über $\mathbb{R}$;
- $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ Skalarprodukt.

Eine lineare Abbildung $T : V \to V$ ist symmetrisch (selbstadjungiert), wenn für alle $x, y \in V$:

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle.$$

Hauptsatz über symmetrische lineare Abbildungen. Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum und $T : V \to V$ linear und symmetrisch. Dann existiert eine orthonormierte Basis $x_1, \ldots x_n$ von V und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit

$$[T]_{x_1,\ldots x_n} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Insbesondere gilt $Tx_i = \lambda_i x_i$. Wegen $x = \sum_{i=1}^n \langle x, x_i\rangle x_i$, ist

$$Tx = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x, x_i\rangle x_i.$$

Ist $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum, so ist $(V, \|\ \|)$ mit

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

ein normierter Vektorraum.

Definition. $(V, \|\ \|)$ ist ein normierter Vektorraum, wenn V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist und für $\|\ \| : V \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt:

(i) $\|x\| = 0 \iff x = 0$;

(ii) $\|rx\| = |r|\|x\| \qquad$ (für $r \in \mathbb{R}$);

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

In einem normierten Vektorraum $(V, \|\ \|)$ wird durch

$$d(x, y) = \|y - x\|$$

eine Metrik und dadurch eine Topologie induziert. Es gilt für $a, b \in V^*$

$$a \simeq b \iff \|b - a\|^* \text{ infinitesimal}$$
$$a \text{ nahestandard} \iff \exists x \in V \|a - x\|^* \simeq 0.$$

Konventionen.

V	$x, y, \ldots$	
V^*	$a, b, \ldots$	wenn a ns, so ${}^\circ a = \mathrm{st}(a)$
$\mathbb{R}$	$r, s, \ldots$	
$\mathbb{R}^*$	$\xi, \eta, \ldots$	wenn ξ ns, so ${}^\circ\xi = \mathrm{st}(\xi)$.

$$a \text{ endlich (normendlich)} \iff \|a\| \text{ endlich}$$

2) Wenn $a \simeq b$ und ξ endlich, so $\xi a \simeq \xi b$.

3) Wenn $\xi \simeq \eta$ und a endlich, so $\xi a \simeq \eta a$.

4) Wenn ξ und a ns, so ξa ns und ${}^\circ(\xi a) = {}^\circ\xi \, {}^\circ a$.

$$S = \{x \in V \mid \|x\| = 1\} \text{ ist die Sphäre in } (V, \| \ \|)$$

$C^2[r,s]$

$$\langle f,g\rangle = \int_r^s f(x)\cdot g(x)dx$$

Gelte für alle $t,t' \in [a,b]\times[a,b]$

$$k(t,t') = k(t',t).$$

und gelte wieder für $T : C^2[r,s] \longrightarrow C^2[r,s]$

$$(Tf)(t) = \int_r^s k(t,y)\cdot f(y)dy$$

Dann ist T symmetrisch:

$$\begin{aligned}
\langle Tf,g\rangle &= \int_r^s (Tf)(x)\cdot g(x)dx \\
&= \int_r^s \Big(\int_r^s k(x,y)\cdot f(y)dy\Big)\cdot g(x)dx \\
&= \int_r^s \int_r^s k(y,x)\cdot f(y)\cdot g(x)dxdy \qquad \text{(da } k(t,t') = k(t',t)\text{)} \\
&= \int_r^s f(y)\Big(\int_r^s k(x,y)\cdot g(x)dx\Big)dy \\
&= \langle f,Tg\rangle
\end{aligned}$$

$(V, \langle\ ,\ \rangle)$ euklidischer Vektorraum

$$x_1, \ldots, x_n \text{ orthogonal } \iff \forall i, j, i \neq j : \quad x_i \perp x_j \quad (\text{d.h. } \langle x_i,\ x_j \rangle = 0)$$

$$x_1, \ldots, x_n \text{ orthonormiert } \iff \forall i, j, i \neq j : \quad \langle x_i,\ x_j \rangle = \delta_{ij})$$

Bemerkung 1) Seien $x_1, \ldots, x_n$ orthogonal. Dann (Pythagoras)

$$\|x_1 + \cdots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2.$$

2) Seien $x_1, \ldots, x_n$ orthonormiert und $x \in [x_1, \ldots, x_n]$. Dann

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x,\ x_i \rangle x_i \quad \text{und} \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x,\ x_i \rangle^2.$$

3) Seien $x_1, \ldots, x_n$ orthonormiert und $U := [x_1, \ldots, x_n]$. Die Abbildung $P_U : V \to V$, die orthogonale Projektion von V auf U, sei gegeben durch: Für $x \in V$

$$P_U x = \sum_{i=1}^{n} \langle x,\ x_i \rangle x_i.$$

a) P_U linear und $P_U : V \to U$.

b) $x - P_U x \perp U$. Insbesondere $x = P_U x + y$ mit $y \perp U$.

Beweis. Sei $j \in [n]$. Dann

$$\langle x - P_U x,\ x_j \rangle = \langle x, x_j \rangle - \langle \sum_{i=1}^{n} \langle x,\ x_i \rangle x_i, x_j \rangle = \langle x, x_j \rangle - \langle x, x_j \rangle = 0.$$

c) $(P_U x = 0 \iff x \perp U)$ und $(P_U x = x \iff x \in U)$.

Beweis. Wenn $P_U x = 0$, dann $x \perp U$ wegen b).
Wegen b) gilt $\langle x, P_U x \rangle = \langle P_U x, P_U x \rangle$. Somit $P_U x = 0$ wenn $x \perp U$.
Wenn $x \in U$, so $P_U x = x$ wegen 2). Wenn $P_U x = x$, so $x \in U$ wegen a).

d) $\|P_U x\|^2 \overset{2)}{=} \sum_{i=1}^{n} \langle x,\ x_i \rangle^2 \leq \|x - P_U x\|^2 + \|P_U x\|^2 \overset{b)}{=} \|x\|^2$. Somit $\|P_U\| \leq 1$.

e) Für alle $u \in U$ mit $u \neq P_U x$: $\|x-u\| > \|x - P_U x\|$.

Beweis. $\|x-u\|^2 = \|(x-P_U x) + (P_U x - u)\|^2 \overset{b) \text{ und } 2)}{=} \|x - P_U x\|^2 + \|P_U x - u\|^2$.

e) liefert eine “basisfreie” Definition von P_U.

f) P_U ist symmetrisch.

Beweis. Seien $x, x' \in V$, $x = P_U x + y$ und $x' = P_U x' + y'$. Dann

$$\langle P_U x, x' \rangle = \langle P_U x, P_U x' + y' \rangle \overset{b)}{=} \langle P_U x, P_U x' \rangle \overset{b)}{=} \langle P_U x + y, P_U x' \rangle = \langle x, P_U x' \rangle.$$

4) Seien $x_1, x_2 \dots$ orthonormiert und $x \in V$. Dann (wegen d))

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle x, x_i \rangle^2 \leq \|x\|^2.$$

5) Sind $x_1, x_2 \dots$ orthonormiert, so ist x_κ nicht nahestandard. Insbesondere ist id_V nicht kompakt.

Beweis. Sonst existiert $x \in V$ mit $x_\kappa \simeq x$. Dann wäre x Häufungspunkt von $x_1, x_2 \dots$. Wegen 1) ist jedoch $\|x_i - x_j\|^2 = 2$ für $i \neq j$.

Hauptsatz über kompakte, symmetrische Operatoren. Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und $T : V \to V$ linear, symmetrisch und kompakt. Dann existiert eine (endliche oder unendliche) Folge von EW $r_1, r_2, \ldots$ mit

$$|r_1| \geq |r_2| \geq \ldots \qquad > 0$$

und eine orthonormierte Folge $x_1, x_2, \ldots$ zugehöriger EV, also mit $Tx_i = r_i x_i$, mit

$$\forall x \in V : \qquad Tx = \sum_{i=1} \langle Tx, x_i \rangle x_i = \sum_{i=1} r_i \langle x, x_i \rangle x_i.$$

Beweis. Sei X intern und *-endlich mit

$$V \subseteq X \subseteq V^*$$

und U der in V^* von X erzeugte Unterraum*. Somit ist U *-endlich dimensional.

Sei P $(= P_U) : V^* \to V^*$ die (interne) orthogonale Projektion von V^* nach U und

$$R = P \circ T^*.$$

Dann

$$R : V^* \to V^* \qquad \text{und} \qquad R \restriction U : U \to U.$$

(a) $\|a\| \leq \|T\| \cdot \|a\|$.

(b) "R ist eine sehr gute Approximation von T"

(i) $\forall x \in V : \quad Rx = Tx.$

(ii) $\forall a \in V^*,\ a$ endlich : $\quad (Ra \simeq T^*a \quad$ und somit ist Ra nahestandard).

Wozu Nichtsandardanalysis?

Wozu betreibt man irgendeine Mathematik?

Hier sieht D. Laugwitz vor allem drei Rechtfertigungsgründe:

(1) *den der Anwendung im weitesten Sinne, sei es in der Lösung von Problemen innerhalb und außerhalb der Mathematik, sei es durch die Neu- oder Weiterentwicklung von Methoden;*

(2) *den des Unterrichts, sei es durch Beiträge zu den Inhalten oder durch eine Verbesserung der Vermittlung;*

(3) *den der Reflexion auf die Mathematik selbst, seien es ihre Geschichte oder ihre Weiterentwicklung.*

Literatur

(1) Albeverio et al., Nonstandard methods in stochastic analysis in mathematical physics.

(2) Cutland et al., Developments in nonstandard mathematics.

(3) Cutland et al., Nonstandard analysis in its applications.

(4) Davis, Applied nonstandard analysis.

(5) Diener, Reeb, Analyse non standard.

(6) Diener, Diener, Nonstandard analysis in practice.

(7) Euler, Einleitung in die Analysis des Unendlichen.

(8) Goldblatt, Lectures on the Hyperreals.

(9) Henle, Kleinberg, Infinitesimal calculus.

(10) Hurd, Loeb, An introduction to nonstandard real analysis.

(11) Keisler, Foundations of infinitesimal calculus.

(12) Landers, Rogge, Nichtstandard Analysis.

(13) Laugwitz, Zahlen und Kontinuum.

(14) Lorenz, Ein Konzept der Nichtstandardanalysis ald Bindeglied zwischen klassischer Potentialtheorie und Irrfahrteh auf Gittern.

(15) Lutz, Goze, Nonstandard analysis, a practical guide.

(16) Richter, Ideale Punkte, Monaden und Nichtstandardmethoden.

(17) Robert, Nonstandard analysis.

(18) Robinson, Non-standard analysis.

(19) Väth, Nonstandard analysis.