Bemerkung 3 *Wegen Bemerkung 2 ist es möglich,* **induktive Definitionen über den Aufbau der Ausdrücke** *durchzuführen. Um in eindeutiger Weise eine Funktion für alle Ausdrücke zu definieren, genügt es,*

(D1): jeder Aussagenvariable einen Wert zuzuordnen;

(D2): jedem Ausdruck $\neg\alpha$ einen Wert zuzuordnen unter der Annahme, daß dem Ausdruck α bereits ein Wert zugeordnet ist;

(D3): a) jedem Ausdruck $(\alpha_1 \wedge \alpha_2)$ einen Wert zuzuordnen unter der Annahme, daß den Ausdücken α_1 und α_2 bereits je ein Wert zugeordnet ist;

b) jedem Ausdruck $(\alpha_1 \vee \alpha_2)$ einen Wert zuzuordnen unter der Annahme, daß den Ausdücken α_1 und α_2 bereits je ein Wert zugeordnet ist.

Beispiele: 1) $\mathsf{rg} : \mathsf{AA} \to \mathbb{N}$ ($\mathsf{rg}(\alpha)$ der **Rang** von α):

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{rg}(X) & = & 0 \\ \mathsf{rg}(\neg\alpha) & = & 1 + \mathsf{rg}(\alpha) \\ \mathsf{rg}((\alpha \wedge \beta)) & = & 1 + \max\{\mathsf{rg}(\alpha), \mathsf{rg}(\beta)\} \\ \mathsf{rg}((\alpha \vee \beta)) & = & 1 + \max\{\mathsf{rg}(\alpha), \mathsf{rg}(\beta)\} \end{array}$$

2) $\mathsf{TA} : \mathsf{AA} \to \mathsf{Pot}(\mathsf{AA})$ ($\mathsf{TA}(\alpha)$ die Menge der **Teilausdrücke** oder **Subformeln** von α):

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{TA}(X) & = & \{X\} \\ \mathsf{TA}(\neg\alpha) & = & \mathsf{TA}(\alpha) \cup \{\neg\alpha\} \\ \mathsf{TA}((\alpha \wedge \beta)) & = & \mathsf{TA}(\alpha) \cup \mathsf{TA}(\beta) \cup \{(\alpha \wedge \beta)\} \\ \mathsf{TA}((\alpha \vee \beta)) & = & \mathsf{TA}(\alpha) \cup \mathsf{TA}(\beta) \cup \{(\alpha \vee \beta)\}. \end{array}$$

Koinzidenzlemma Seien b, b' Belegungen für α, also

$$\text{var}(\alpha) \subseteq \text{df}(b) \cap \text{df}(b'),$$

und gelte

$$\text{für alle } X \in \text{var}(\alpha): \quad b(X) = b'(X).$$

Dann

$$b(\alpha) = b'(\alpha).$$

Beweis: Zeige durch Induktion über den Aufbau der Ausdrücke β:

$$\text{wenn var}(\beta) \subseteq \text{df}(b) \cap \text{df}(b'), \text{ so } b(\beta) = b'(\beta).$$

$$n \geq 1 \qquad \text{AA}_n := \{\alpha \mid \text{var}(\alpha) \subseteq \{X_1, \ldots, X_n\}\}.$$

Konvention: Ist $\alpha \in \text{AA}_n$ und sind $b_1, \ldots, b_n \in \{0, 1\}$, so steht

$$\alpha[b_1, \ldots, b_n]$$

für den Wert $b(\alpha)$, wobei b irgendeine Belegung ist mit

$$b(X_1) = b_1, \ldots, b(X_n) = b_n.$$

α	β	$\neg\alpha$	$(\neg\alpha \vee \beta)$
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

Somit gilt für jede Belegung b für $(\neg\alpha \vee \beta)$:

$$b((\neg\alpha \vee \beta)) = \dot{\rightarrow} (b(\alpha), b(\beta)).$$

Wir fassen $(\alpha \rightarrow \beta)$ als Abkürzung für $(\neg\alpha \vee \beta)$ auf.

α	β	$(\neg\alpha \vee \beta)$	$(\neg\beta \vee \alpha)$	$((\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\beta \vee \alpha))$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Somit gilt für jede Belegung b für $((\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\beta \vee \alpha))$:

$$b(((\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\beta \vee \alpha))) = \dot{\leftrightarrow} (b(\alpha), b(\beta)).$$

Wir fassen $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ als Abkürzung für $((\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\beta \vee \alpha))$ auf.

Definitionen (Hier sei mit Belegung stets Belegungen b mit df(b) = AV gemeint)

1. α ist **allgemeingültig** (ist eine **Tautologie**), $\models \alpha$, gdw α gilt bei allen Belegungen.

2. α ist **erfüllbar**, Erf α, gdw es gibt eine Belegung, die α erfüllt.

3. α und β sind **logisch äquivalent** gdw $\models (\alpha \leftrightarrow \beta)$
   gdw für alle Belegungen b: $b(\alpha) = b(\beta)$.

4. Sei $\Gamma \subseteq$ AA und b eine Belegung.

   $b(\Gamma) = 1$ bedeutet: $b(\alpha) = 1$ für alle $\alpha \in \Gamma$.

5. Γ ist **erfüllbar**, Erf Γ, gdw es gibt b mit $b(\Gamma) = 1$.

6. α **folgt aus** Γ, $\Gamma \models \alpha$, gdw

   für alle Belegungen b: wenn $b(\Gamma) = 1$, so $b(\alpha) = 1$.