Sei R eine zweistellige Relation auf A.

R ist reflexiv, wenn für alle $a \in A$ gilt:

$$Raa.$$

R ist irreflexiv, wenn für alle $a \in A$ gilt:

$$\text{nicht } Raa.$$

R ist symmetrisch, wenn für alle $a, b \in A$ gilt:

$$\text{wenn } Rab, \text{so } Rba.$$

R ist antisymmetrisch, wenn für alle $a, b \in A$ gilt:

$$\text{wenn } Rab \text{ und } Rba, \text{ so } a = b.$$

R ist konnex, wenn für alle $a, b \in A$ gilt:

$$Rab \text{ oder } Rba \text{ oder } a = b.$$

R ist transitiv, wenn für alle $a, b, c \in A$ gilt:

$$\text{wenn } Rab \text{ und } Rbc, \text{ so } Rac.$$

R ist eine partielle Ordnung, wenn R reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.

R ist eine totale oder lineare Ordnung, wenn R reflexiv, transitiv und antisymmetrisch und konnex ist.

R ist eine Äquivalenzrelation, wenn R reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.

$f : A^2 \to A$.

f ist kommutativ, wenn für alle $a, b \in A$ gilt:

$$f(a, b) = f(b, a).$$

f ist assoziativ, wenn für alle $a, b, c \in A$ gilt:

$$f(f(a, b), c) = f(a, f(b, c)).$$

"Vorrat" an Symbolen

Konstantensymbolen oder Konstanten: c_1, c_2, ... $\qquad c, d$

für $n \geq 1$:

n-st. Funktionssymbole: f_1^n, f_2^n, ... $\qquad f, g, h$

n-st. Relationsssymbole: R_1^n, R_2^n, ... $\qquad R, P, Q$

Sei S eine Symbolmenge.

Eine S-Struktur ist ein Paar

$$\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{a})$$

bestehend aus

- einer nicht leeren Menge A, dem Träger, (Grundbereich, Universum von $\mathfrak{A}$;

- einer auf S definierten Abbildung $\mathfrak{a}$, die
  - für alle $n \geq 1$ jedem n-stelligen Relationssymbol $R \in S$ eine n-stellige Relation $\mathfrak{a}(R) \subseteq A^n$ zuordnet;
  - für alle $n \geq 1$ jedem n-stelligen Funktionssymbol $f \in S$ eine n-stellige Funktion $\mathfrak{a}(f) : A^n \to A$ zuordnet;
  - jedem Konstantensymbol $c \in S$ ein Element $\mathfrak{a}(c) \in A$ zuordnet.

Digraphen und Graphen. Sei $S = \{E\}$.

Digraphen "sind" S-Strukturen (G, E^G). G ist die Menge der Punkte und E^G die Menge der (gerichteten) Kanten.

Graphen "sind" S-Strukturen (G, E^G) mit symmetrischem und irreflexivem E^G.

Sei $\mathfrak{G} = (G, E^G)$ ein Digraph.

Eine Schleife ist eine Kante der Gestalt (a, a).

Der Digraph $\mathfrak{G}$ ist schleifenfrei, wenn er keine Schleifen enthält.

Ein Weg ist ein Tupel $(a_0, \ldots, a_m) \in G^{m+1}$ für ein $m \in \mathbb{N}$, so dass für $i = 1, \ldots, m$: $(a_{i-1}, a_i) \in E^G$. $(a_0, \ldots, a_m)$ ist dann ein Weg derLänge m von a_0 nach a_m.

Ein Pfad ist ein Weg, dessen Punkte paarweise verschieden sind.

Ein Zyklus ist ein Weg $(a_0, \ldots, a_m)$ mit $m \geq 1$ und $a_0 = a_m$.

Der Digraph $\mathfrak{G}$ ist azyklisch, wenn er keine Zyklen enthält.

Ein Kreis in einem Graphen ist ein Weg $(a_0, \ldots, a_m)$ der Länge $m \geq 3$ mit $a_m = a_0$ und $a_i \neq a_j$ für $1 \leq i < j \leq m - 1$.

Alphabet Σ_S der Sprache der ersten Stufe zur Symbolmenge S:

(a) Variable: v_1, v_2,... x, y, z

(b) Junktoren: $\neg$, $\wedge$, $\vee$

(c) Quantoren: $\forall$, $\exists$

(d) Gleichheitszeichen: $=$

(e) Hilfssymbole:), (, ,

(f) die Symbole in S.

Somit

$$\Sigma_S = \Sigma_0 \cup S,$$

wobei Σ_0 die Menge der in (a) bis (e) vorkommenden Symbole bezeichnet.

$$V := \{v_1, v_2, \ldots\}$$

ist die Menge der Variable.

Sei S eine Symbolmenge. S-Terme oder kurz Terme sind die Zeichenreihen über Σ_S, die im folgenden Kalkül ableitbar sind:

(T1) $\dfrac{}{x}$ (T2) $\dfrac{}{c}\ c \in S$ (T3) $\dfrac{t_1, \dots, t_n}{f(t_1, \dots, t_n)}\ f \in S$ n-st.

T^S = Menge der S-Terme.

Beispiel. Für $S = \{f_6^1, f_1^3, c_1, c_4\}$ ist

$$f_1^3(c_4, f_1^3(v_7, v_7, c_1), f_6^1(c_4))$$

ein S-Term.

Ableitung:

1	c_1	(T2)
2	c_4	(T2)
3	v_7	(T1)
4	$f_6^1(c_4)$	(T3) auf 2
5	$f_1^3(v_7, v_7, c_1)$	(T3) auf 3,3,1
6	$f_1^3(c_4, f_1^3(v_7, v_7, c_1), f_6^1(c_4))$	(T3) auf 2,5,4

Lemma. "An jeder Stelle in einem Term, an der kein Hilfssymbol steht, beginnt genau ein Term."

1. Für alle $t, t' \in T^S$:

$$t \text{ ist kein echtes Anfangsstück von } t'.$$

2. Seien $t \in T^S$, $1 \leq i \leq |t|$ und $t = uav$ mit $u, v \in \Sigma_S^*$, $a \in \Sigma_S$, $|u| = i - 1$ und $a \neq ($, $a \neq)$, $a \neq ,$. Dann gibt es genau ein $t' \in T^S$ mit

$$t = ut'v' \text{ für ein geeignetes } v' \in \Sigma_S^*.$$

Beweis. Zu (2): Sei $t \in T^S$, $1 \leq i \leq |t|$ und $t = uav$ wie oben.

Existenz von t': Induktion über den Termkalkül.

Eindeutigkeit von t': Wenn

$$t = ut_1'v_1' \quad \text{und} \quad t = ut_2'v_2' \quad \text{mit } t_1' \neq t_2',$$

so ist t_1' ein echtes Anfangsstück von t_2' oder t_2' ein echtes Anfangsstück von t_1', ein Widerspruch zu 1.

Eindeutige Zerlegbarkeit von Termen. Jeder S-Term ist entweder

1. eine Variable oder
2. eine Konstante in S oder
3. ein Term der Gestalt $f(t_1, \ldots, t_n)$ für ein n-stelliges $f \in S$ und $t_1, \ldots, t_n \in T^S$.

   Dabei sind f und $t_1, \ldots, t_n$ eindeutig bestimmt.

Sei $\mathfrak{A}$ eine S-Struktur. Eine Belegung β in $\mathfrak{A}$ (in A) ist eine Abbildung $\beta : V \to A$.

Eine S-Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ besteht aus einer S-Struktur $\mathfrak{A}$ und einer Belegung β in $\mathfrak{A}$.

Definition. Sei $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ eine S-Interpretation. Induktiv über den Aufbau der S-Terme definiert man den Wert $\mathfrak{I}(t)$ des Terms t bei $\mathfrak{I}$. Dabei ist $\mathfrak{I}(t) \in A$.

$\mathfrak{I}(x) := \beta(x)$;

$\mathfrak{I}(c) := c^{\mathfrak{A}}$;

$\mathfrak{I}(f(t_1, \ldots, t_n)) := f^{\mathfrak{A}}(\mathfrak{I}(t_1), \ldots, \mathfrak{I}(t_n))$.

S-Ausdrücke oder S-Formeln der Sprache der ersten Stufe sind die Zeichenreihen über Σ_S^*, die man im folgenden Kalkül herleiten kann:

(A1) $\dfrac{}{t_1 = t_2}$ $\quad t_1, t_2 \in T^S$

(A2) $\dfrac{}{Rt_1 \ldots t_r}$ $\quad R \in S$ r-stellig, $t_1, \ldots, t_r \in T^S$

(A3) $\dfrac{\varphi}{\neg\varphi}$

(A4) $\dfrac{\varphi, \psi}{(\varphi \wedge \psi)}$

(A5) $\dfrac{\varphi, \psi}{(\varphi \vee \psi)}$

(A6) $\dfrac{\varphi}{\forall x \varphi}$

(A7) $\dfrac{\varphi}{\exists x \varphi}$

L^S Menge der S-Ausdrücke.

Beispiel. Für $S := \{\underset{2}{E}\}$ ist $\forall v_1 \exists v_5 E v_1 v_5$ ein S-Ausdruck.

1	Ev_1v_5	(A2)
2	$\exists v_5 E v_1 v_5$	(A7) auf 1
3	$\forall v_1 \exists v_5 E v_1 v_5$	(A6) auf 2

Eindeutige Zerlegbarkeit von Ausdücken. Jeder S-Ausdruck ist entweder ein Ausdruck der Gestalt

(1)	$t_1 = t_2$	oder	(2)	$Rt_1 \ldots t_r$	oder
(3)	$\neg\varphi$	oder	(4)	$(\varphi \wedge \psi)$	oder
(5)	$(\varphi \vee \psi)$	oder	(6)	$\forall x \varphi$	oder
(7)	$\exists x \varphi$				

Dabei sind eindeutig bestimmt

$t_1, t_2 \in T^S$ in (1),

$R \in S$ und $t_1, \ldots, t_r \in T^S$ in (2),

φ in (3),

φ und ψ in (4), (5),

x und φ in (6) und (7).

Ausdrücke der Gestalt (1) oder der Gestalt (2) sind

atomare S-Ausdrücke.

Für $t \in T^S$ oder $\varphi \in L^S$ sei var(t) bzw. var(φ) die Menge der in t bzw. φ vorkommenden Variablen.

Die Menge fr(φ) der in φ frei vorkommenden Variablen wird durch Induktion über dem Ausdruckskalkül definiert:

$$\text{fr}(\varphi) = \text{var}(\varphi), \text{ falls } \varphi \text{ atomar}$$

$$\text{fr}(\neg\varphi) = \text{fr}(\varphi)$$

$$\text{fr}((\varphi \wedge \psi)) = \text{fr}(\varphi) \cup \text{fr}(\psi)$$

$$\text{fr}((\varphi \vee \psi)) = \text{fr}(\varphi) \cup \text{fr}(\psi)$$

$$\text{fr}(\forall x\varphi) = \text{fr}(\varphi) \setminus \{x\}$$

$$\text{fr}(\exists x\varphi) = \text{fr}(\varphi) \setminus \{x\}$$

$$\begin{aligned}
&\text{fr}((\exists uRxu \wedge \exists y\forall x(Ryx \vee Ryu))) \\
&\quad = \text{fr}(\exists uRxu) \cup \text{fr}(\exists y\forall x(Ryx \vee Ryu)) \\
&\quad = (\text{fr}(Rxu) \setminus \{u\}) \cup (\text{fr}(\forall x(Ryx \vee Ryu)) \setminus \{y\}) \\
&\quad = (\{x, u\} \setminus \{u\}) \cup (\text{fr}((Ryx \vee Ryu)) \setminus \{y, x\}) \\
&\quad = \{x\} \cup ((\text{fr}(Ryx) \cup \text{fr}(Ryu)) \setminus \{y, x\}) \\
&\quad = \{x\} \cup ((\{y, x\} \cup \{y, u\}) \setminus \{y, x\}) \\
&\quad = \{x\} \cup \{u\}) \\
&\quad = \{x, u\}.
\end{aligned}$$

S-Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$, $x_1, \ldots, x_m$ paarweise verschiedene Variable, $a_1, \ldots, a_m \in A$

$$\mathfrak{I}\frac{a_1 \ldots a_m}{x_1 \ldots x_m} := (\mathfrak{A}, \beta\frac{a_1 \ldots a_m}{x_1 \ldots x_m}),$$

wobei $\beta\frac{a_1 \ldots a_m}{x_1 \ldots x_m}$ die Belegung in $\mathfrak{A}$ ist mit

$$\beta\frac{a_1 \ldots a_m}{x_1 \ldots x_m}(y) := \begin{cases} a_i & y = x_i \\ \beta(y) & y \neq x_1, \ldots, y \neq x_m \end{cases}$$

$$S = \{\underset{2}{g}\}, \quad \mathfrak{R} = (\mathbb{R}, \cdot), \quad \mathfrak{I} = (\mathfrak{R}, \beta) \text{ mit } \beta = \begin{cases} n & n \text{ ungerade} \\ -n & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \mathfrak{I} \models \neg\exists v_1 g(v_1, v_1) = v_2 \\ \iff\quad & \text{nicht } \mathfrak{I} \models \exists v_1 g(v_1, v_1) = v_2 \\ \iff\quad & \text{nicht ex. } r \in \mathbb{R}: \ \mathfrak{I}\frac{r}{v_1} \models g(v_1, v_1) = v_2 \\ \iff\quad & \text{nicht ex. } r \in \mathbb{R}: \ \mathfrak{I}\frac{r}{v_1}(g(v_1, v_1)) = \mathfrak{I}\frac{r}{v_1}(v_2) \\ \iff\quad & \text{nicht ex. } r \in \mathbb{R}: \ r \cdot r = -2. \end{aligned}$$

Somit $\mathfrak{I} \models \neg\exists v_1 g(v_1, v_1) = v_2$.

Entsprechend: $\mathfrak{I} \models \neg\exists v_{116} g(v_{116}, v_{116}) = v_2$.

Dagegen: $\mathfrak{I} \not\models \neg\exists v_1 g(v_1, v_1) = v_3$, da
$\mathfrak{I} \models \exists v_1 g(v_1, v_1) = v_3$.

$\Phi \subseteq L^S$, $\varphi, \psi \in L^S$

1. $\mathfrak{I}$ S-Interpretation

   $\mathfrak{I}$ Modell von Φ, $\mathfrak{I} \models \Phi$, gdw für alle $\chi \in \Phi : \mathfrak{I} \models \chi$.

2. ψ folgt aus Φ, $\Phi \models \psi$, gdw

   für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$: wenn $\mathfrak{I} \models \Phi$, so $\mathfrak{I} \models \psi$.

   $\Phi = \{\varphi\}$ dann auch $\varphi \models \psi$ statt $\Phi \models \psi$.

3. φ ist erfüllbar, Erf φ, gdw es gibt eine Interpretation, die φ erfüllt.

   Φ ist erfüllbar, Erf Φ, gdw es gibt eine Interpretation, die Φ erfüllt.

4. φ ist allgemeingültig, $\models \varphi$, gdw $\emptyset \models \varphi$

   gdw für alle $\mathfrak{I}$: $\mathfrak{I} \models \varphi$.

5. φ und ψ logisch äquivalent, $\varphi \equiv \psi$, gdw $\models \varphi \leftrightarrow \psi$

   gdw für alle $\mathfrak{I}$: ($\mathfrak{I} \models \varphi$ gdw $\mathfrak{I} \models \psi$).

Koinzidenzlemma. S, S_1, S_2 Symbolmengen, $S \subseteq S_1 \cap S_2$.

Für $j = 1, 2$ sei $\mathfrak{I}_j := (\mathfrak{A}_j, \beta_j)$ eine S_j-Interpretation.

Gelte $\mathfrak{A}_1 \upharpoonright S = \mathfrak{A}_2 \upharpoonright S$ (d.h. $A_1 = A_2$ und $k^{\mathfrak{A}_1} = k^{\mathfrak{A}_2}$ für $k \in S$).

Dann

1. Für $t \in T^S$:

   wenn $\beta_1 \upharpoonright \mathrm{var}(t) = \beta_2 \upharpoonright \mathrm{var}(t)$, so $\mathfrak{I}_1(t) = \mathfrak{I}_2(t)$.

2. Für $\varphi \in L^S$:

   wenn $\beta_1 \upharpoonright \mathrm{fr}(\varphi) = \beta_2 \upharpoonright \mathrm{fr}(\varphi)$, so ($\mathfrak{I}_1 \models \varphi$ gdw $\mathfrak{I}_2 \models \varphi$).

Beweis. zu 2): $\varphi := Rt_1 \dots t_r$:

$$\begin{array}{lcll} \mathfrak{I}_1 \models Rt_1 \dots t_r & \iff & R^{\mathfrak{A}_1}\mathfrak{I}_1(t_1)\dots\mathfrak{I}_1(t_r) & \\ & \iff & R^{\mathfrak{A}_1}\mathfrak{I}_2(t_1)\dots\mathfrak{I}_2(t_r) & \text{(wegen 1)} \\ & \iff & R^{\mathfrak{A}_2}\mathfrak{I}_2(t_1)\dots\mathfrak{I}_2(t_r) & \text{(wegen } R^{\mathfrak{A}_1} = R^{\mathfrak{A}_2}\text{)} \\ & \iff & \mathfrak{I}_2 \models Rt_1 \dots t_r. & \end{array}$$

$S = \{\underset{2}{R}\}; \quad x := v_1,\ y := v_2,\ z := v_3.$

R reflexiv:

$$\varphi_{\text{refl}} := \forall x Rxx$$

R irreflexiv:

$$\varphi_{\text{irrefl}} := \forall x \neg Rxx$$

R symmetrisch:

$$\varphi_{\text{symm}} := \forall x \forall y (Rxy \rightarrow Ryx)$$

R antisymmetrisch:

$$\varphi_{\text{antisymm}} := \forall x \forall y (Rxy \rightarrow \neg Ryx)$$

R konnex:

$$\varphi_{\text{konnex}} := \forall x \forall y (Rxy \vee x = y \vee Ryx)$$

R transitiv:

$$\varphi_{\text{transitiv}} := \forall x \forall y \forall z ((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)$$

Die Modelle von

$$\Phi_{\text{pOrd}} := \{\varphi_{\text{refl}}, \varphi_{\text{antisymm}}, \varphi_{\text{transitiv}}\}$$

sind die partiellen Ordnungen.

Die Modelle von

$$\Phi_{\text{Ord}} := \{\varphi_{\text{refl}}, \varphi_{\text{antisymm}}, \varphi_{\text{transitiv}}, \varphi_{\text{konnex}}\}$$

sind die Ordnungen.

Die Modelle von

$$\Phi_{\text{Äqui}} := \{\varphi_{\text{refl}}, \varphi_{\text{symm}}, \varphi_{\text{transitiv}}\}$$

sind die Äquivalenzstrukturen (Äquivalenzrelationen).

$S = \{\underset{2}{E}\}$

Die Modelle von

$$\Phi_{\text{Graph}} := \{\varphi_{\text{symm}}, \varphi_{\text{irrefl}}\} \qquad !$$

sind die Graphen.

Die Modelle von

$$\Phi_{\text{Digraph}} := \emptyset$$

sind die Digraphen.

Die Modelle von

$$\Phi_{\text{Digraph}} \cup \{\forall x \neg Exx\}$$

sind die schleifenlosen Digraphen.

$S = \{+, \cdot, 0, 1\}$

Die Modelle von

$$\Phi_{\mathrm{Kp}}: \quad \begin{array}{ll} \forall x \forall y \forall z (x + y) + z = x + (y + z) & \forall x \, x + 0 = x \\ \forall x \forall y \forall z (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) & \forall x \, x \cdot 1 = x \\ \forall x \exists y \, x + y = 0 & \forall x (\neg x = 0 \rightarrow \exists y \, x \cdot y = 1) \\ \forall x \forall y \, x + y = y + x & \forall x \forall y \, x \cdot y = y \cdot x \\ \neg 0 = 1 \quad \forall x \forall y \forall z \, x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) & \end{array}$$

sind die Körper.

K Klasse endlicher Strukturen, $\Phi \subseteq L^S$. Das Model-Checking Problem:

MC(K,Φ)	*Input:*	Struktur $\mathfrak{A} \in K$, Satz $\psi \in \Phi$
	Frage:	$\mathfrak{A} \models \psi$?

$$\mathfrak{D} \models \exists x\, \underbrace{(\underline{K}x \wedge \exists y(\underline{F}y \wedge Lxy \wedge Acy))}_{\varphi}$$

Das Auswertungsproblem:

AUS(K,Φ)	*Input:*	Struktur $\mathfrak{A} \in K$, $n \geq 1$, $\psi \in \Phi \cap L_n^S$
	Problem:	Berechne $\{(a_1, \ldots, a_n) \mid \mathfrak{A} \models \psi[a_1, \ldots, a_n]\}$.

$$\{k \mid \mathfrak{D} \models \varphi[k]\}$$

Bemerkung. Sei $S = \emptyset$ und $\mathfrak{A}$ eine S-Struktur mit mindestens 2 Elementen. Für $n \geq 1$ sei $x_n := v_{2\cdot n-1}$ und $y_n := v_{2\cdot n}$. Die Abbildung * : QAA $\to L^S$ sei induktiv wie folgt definiert:

$$\begin{array}{lcl}
X_i^* & := & x_i = y_i \\
\neg\alpha\ ^* & := & \neg\ \alpha^* \\
(\alpha \wedge \beta)^* & := & (\alpha^* \vee \beta^*) \\
(\alpha \vee \beta)^* & := & (\alpha^* \vee \beta^*) \\
\exists X_i \alpha\ ^* & := & \exists x_i \exists y_i \alpha^* \\
\forall X_i \alpha\ ^* & := & \forall x_i \forall y_i \alpha^*
\end{array}$$

Dann gilt für jeden Satz $\alpha \in$ QAA:

$$\alpha \text{ ist allgemeingültig } \iff \mathfrak{A} \models \alpha^*.$$

Somit

$$\text{QBSAT} \leq_{\text{pol}} \text{MC}(\mathfrak{A}, L^S) \ (:= \text{MC}(\{\mathfrak{A}\}, L^S)).$$

Da QBSAT PSPACE-hart ist, erhalten wir:

Folgerung. Für jedes S und jede Klasse K von S-Strukturen, die eine Struktur mit mindestens zwei Elementen enthält, ist MC(K,L^S) PSPACE-hart.

Ist ESTR(S) die Klasse aller endlichen S-Strukturen, so gilt sogar:

$$\text{MC(ESTR},L^S) \text{ ist PSPACE-vollständig.}$$

Die Breite br(φ) eines Ausdrucks φ ist definiert durch:

$$\text{br}(\varphi) := \max\{|\text{fr}(\psi)| \mid \psi \text{ Subformel von } \varphi\}.$$

Satz. Es gibt ein $c \in \mathbb{N}$ und einen Algorithmus, der für jede endliche Struktur $\mathfrak{A}$ und jeden Satz φ entscheidet, ob

$$\mathfrak{A} \models \varphi$$

in Zeit $\leq c \cdot |\varphi| \cdot ||\mathfrak{A}||^{\text{br}(\varphi)+1}$.

Folgerung. Für jeden Satz φ gibt es ein polynomielles Verfahren, das entscheidet, ob

$$\mathfrak{A} \models \varphi.$$

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ S-Strukturen

1. (a) $\pi : A \rightarrow B$, π ist Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach (auf) $\mathfrak{B}$, $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, wenn

   (1) π ist bijektiv;

   (2) Für jedes $R \in S, R$ r-stellig, $a_1, \ldots, a_r \in A$:
   $$R^{\mathfrak{A}} a_1 \ldots a_r \iff R^{\mathfrak{B}} \pi(a_1) \ldots \pi(a_r);$$

   (3) Für jedes $f \in S, f$ r-stellig, $a_1, \ldots, a_r \in A$:
   $$\pi(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_r)) = f^{\mathfrak{B}}(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_r));$$

   (4) Für $c \in S$:
   $$\pi(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}.$$

   (b) $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind isomorph, $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, gdw. ex. π mit $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

2. $\pi : A \rightarrow B$, π ist starker Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ gdw π erfüllt (2), (3) und (4).

3. $\pi : A \rightarrow B$, π Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ gdw π erfüllt (3), (4) und

   (2') für $R \in S, R$ r-stellig, $a_1, \ldots, a_r \in A$,
   $$\text{wenn } R^{\mathfrak{A}} a_1 \ldots a_r, \text{ so } R^{\mathfrak{B}} \pi(a_1) \ldots \pi(a_r).$$

Schreibweisen: $\pi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ Isomorphismus (starker Homomorphismus, Homomorphismus).

Sei S relational. Ein Ausdruck $\varphi \in L_m^S$ der Gestalt

$$\varphi = (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_s) \tag{1}$$

mit atomaren $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ ohne $=$ heißt conjunctive query (konjunktive Anfrage).

Ist φ wie eben in L_m^S, so sei $\mathfrak{A}_\varphi$ die (!) S-Struktur mit

$$\begin{aligned} A_\varphi &:= \{v_1, \ldots, v_m\} \\ R^{\mathfrak{A}_\varphi} y_1 \ldots y_r &\iff \text{es gibt } i \text{ mit } \varphi_i = Ry_1 \ldots y_r \end{aligned}$$

Dann $\mathfrak{A}_\varphi \models \varphi[v_1, \ldots, v_m]$ und somit $\mathfrak{A}_\varphi \models \exists v_1 \ldots \exists v_m \varphi$.

Bemerkung 1. Sei $1 \leq \ell \leq m$. Ist $\mathfrak{B}$ eine S-Struktur und $b_1, \ldots, b_\ell \in B$, so sind äquivalent:

1. $\mathfrak{B} \models \exists v_{\ell+1} \ldots \exists v_m \varphi[b_1, \ldots, b_\ell]$;
2. ex. $\pi : \mathfrak{A}_\varphi \to \mathfrak{B}$ Hom. mit $\pi(v_1) = b_1, \ldots, \pi(v_\ell) = b_\ell$.

Beweis: Gelte $\mathfrak{B} \models \exists v_{\ell+1} \ldots \exists v_m \varphi[b_1, \ldots, b_\ell]$, etwa

$$\mathfrak{B} \models (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_s)[b_1, \ldots, b_m].$$

Definiere $\pi : A_\varphi \to B$ durch $\pi(v_i) := b_i$ für $i = 1, \ldots, m$.

Wenn $R^{\mathfrak{A}_\varphi} v_{i_1} \ldots v_{i_r}$, so ex. j mit $\varphi_j = Rv_{i_1} \ldots v_{i_r}$. Somit $\mathfrak{B} \models Rv_{i_1} \ldots v_{i_r}[b_1, \ldots, b_m]$, d.h. $R^{\mathfrak{B}} b_{i_1} \ldots b_{i_r}$.

Sei umgekehrt $\pi : \mathfrak{A}_\varphi \to \mathfrak{B}$ ein Homomorphismus mit $\pi(v_1) = b_1, \ldots, \pi(v_\ell) = b_\ell$. Sei $b_i := \pi(v_i)$ für $i = \ell + 1, \ldots, m$. Da

$$\mathfrak{A}_\varphi \models (\varphi_1 \wedge \ldots \varphi_s)[v_1, \ldots, v_m],$$

gilt nach Homomorphielemma (s.u.)

$$\mathfrak{B} \models (\varphi_1 \wedge \ldots \varphi_s)[\pi(v_1), \ldots, \pi(v_m)]$$

und damit $\mathfrak{B} \models \exists v_{\ell+1} \ldots \exists v_m \varphi[b_1, \ldots, b_\ell]$.

Folgerung. Für konjunktive Anfrage $\varphi, \psi \in L^S$ sind äquivalent:

1. $\models (\varphi \to \psi)$;

2. für alle S-Strukturen $\mathfrak{A}$: $\varphi^{\mathfrak{A}} \subseteq \psi^{\mathfrak{A}}$;

3. $\mathfrak{A}_\varphi \models \psi[v_1, \ldots, v_m]$;

4. id : $A_\psi \to A_\varphi$ ist Homom. von $\mathfrak{A}_\psi$ auf $\mathfrak{A}_\varphi$.

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2): klar; (2) $\Rightarrow$ (3) wegen $\mathfrak{A}_\varphi \models \varphi[v_1, \ldots, v_m]$.
(3) $\Rightarrow$ (4) wegen Bemerkung 1.

Isomorphie- und Homomorphielemma. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ S-Str

1. Wenn $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, so für alle $\varphi \in L_0^S$:
$$\mathfrak{A} \models \varphi \iff \mathfrak{B} \models \varphi.$$
2. Ist $\mathfrak{B}$ ein starkes homomorphes Bild von $\mathfrak{A}$, d.h. ex. ein starker Homom. von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{B}$, so gilt für alle gleichheitsfreien $\varphi \in L_0^S$:
$$\mathfrak{A} \models \varphi \iff \mathfrak{B} \models \varphi.$$
3. Ist $\mathfrak{B}$ ein homom. Bild von $\mathfrak{A}$, d.h. ex. ein Homom. von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{B}$, so gilt für alle $\varphi \in L_0^S$ ohne $\neg$:
$$\text{wenn } \mathfrak{A} \models \varphi, \text{ so } \mathfrak{B} \models \varphi.$$

Beweis: Sei $\pi : A \to B$ die entsprechende Abbildung. Dann zeigen wir:

(i) Für alle $n \geq 1$, $a_1, \ldots, a_n \in A$, $t \in T_n^S$:
$$\pi(t^{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots, a_n]) = t^{\mathfrak{B}}[\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)].$$

(ii) Ist π ein Isomorphismus, so für alle $n \geq 1$, $a_1, \ldots, a_n \in A$, $\varphi \in L_n^S$:
$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \iff \mathfrak{B} \models \varphi[\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)].$$

(iii) Ist π ein starker Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{B}$, so für alle $n \geq 1$, $a_1, \ldots, a_n \in A$, $\varphi \in L^S$ ohne $=$:
$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \iff \mathfrak{B} \models \varphi[\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)].$$

(iv) Ist π ein Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{B}$, so für alle $n \geq 1$, $a_1, \ldots, a_n \in A$, $\varphi \in L^S$ ohne $\neg$:
$$\text{wenn } \mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n], \text{ so } \mathfrak{B} \models \varphi[\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)].$$

Zu (i): Induktion über t:

$t = v_j$: $\pi(v_j^{\mathfrak{A}}[a_1,\ldots,a_n]) = \pi(a_j) = v_j^{\mathfrak{B}}[\pi(a_1),\ldots,\pi(a_n)]$.

$t = f(t_1,\ldots,t_r)$: $\qquad \pi(f(t_1,\ldots,t_r)^{\mathfrak{A}}[a_1,\ldots,a_n])$

$= \pi(f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[a_1,\ldots,a_n],\ldots,t_r^{\mathfrak{A}}[a_1,\ldots,a_n]))$

$= f^{\mathfrak{B}}(\pi(t_1^{\mathfrak{A}}[a_1,\ldots,a_n]),\ldots,\pi(t_r^{\mathfrak{A}}[a_1,\ldots,a_n]))$ (f Homom.)

$= f^{\mathfrak{B}}(t_1^{\mathfrak{B}}[\pi(a_1),\ldots,\pi(a_n)],\ldots,t_r^{\mathfrak{B}}[\pi(a_1),\ldots,\pi(a_n)])$ (Ind.Vor.)

$= f(t_1,\ldots,t_r)^{\mathfrak{B}}[\pi(a_1),\ldots,\pi(a_n)]$.

Zu (ii), (iii), (iv): $t_1 = t_2$:

$$\begin{array}{cl} & \mathfrak{A} \models t_1 = t_2[a_1,\ldots,a_n] \\ \Longleftrightarrow & t_1^{\mathfrak{A}}[a_1,\ldots,a_n] = t_2^{\mathfrak{A}}[a_1,\ldots,a_n] \\ * & \pi(t_1^{\mathfrak{A}}[a_1,\ldots,a_n]) = \pi(t_2^{\mathfrak{A}}[a_1,\ldots,a_n]) \\ & \qquad (* = \Longleftrightarrow \text{ wenn } \pi \text{ inj.; } * = \Downarrow \text{ sonst}) \\ \Longleftrightarrow & t_1^{\mathfrak{B}}[\pi(a_1),\ldots,\pi(a_n)] = t_2^{\mathfrak{B}}[\pi(a_1),\ldots,\pi(a_n)] \text{ (wegen (i))} \\ \Longleftrightarrow & \mathfrak{B} \models t_1 = t_2[\pi(a_1),\ldots,\pi(a_n)]. \end{array}$$

$Rt_1 \ldots t_r$:

$$\begin{array}{cl} & \mathfrak{A} \models Rt_1 \ldots t_r[a_1,\ldots,a_n] \\ \Longleftrightarrow & R^{\mathfrak{A}} t_1^{\mathfrak{A}}[a_1,\ldots,a_n] \ldots t_r^{\mathfrak{A}}[a_1,\ldots,a_n] \\ * & R^{\mathfrak{B}} \pi(t_1^{\mathfrak{A}}[a_1,\ldots,a_n]) \ldots \pi(t_r^{\mathfrak{A}}[a_1,\ldots,a_n]) \\ & (* = \Longleftrightarrow \text{, wenn } \pi \text{ starker Hom.; } * = \Downarrow\text{, wenn } \pi \text{ Hom.}) \\ \Longleftrightarrow & R^{\mathfrak{B}} t_1^{\mathfrak{B}}[\pi(a_1),\ldots,\pi(a_n)] \ldots t_r^{\mathfrak{B}}[\pi(a_1),\ldots,\pi(a_n)] \text{ (weg. (i))} \\ \Longleftrightarrow & \mathfrak{B} \models Rt_1 \ldots t_r[\pi(a_1),\ldots,\pi(a_n)]. \end{array}$$

Sei $\varphi \in L_n^S$ und $\varphi = \exists x \psi$. O.B.d.A. (s.u.) $x = v_{n+1}$, also $\psi = \psi(v_1, \dots, v_{n+1})$.

$$
\begin{array}{cl}
 & \mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \\
\iff & \text{ex. } a \in A\text{: } \mathfrak{A} \models \psi[a_1, \dots, a_n, a] \\
* & \text{ex. } a \in A\text{: } \mathfrak{B} \models \psi[\pi(a_1), \dots, \pi(a_n), \pi(a)] \text{ (Ind.vor.)} \\
\iff & \text{ex. } b \in B\text{: } \mathfrak{B} \models \psi[\pi(a_1), \dots, \pi(a_n), b] \quad \text{(da } \pi \text{ surjektiv)} \\
\iff & \mathfrak{B} \models \varphi[\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)].
\end{array}
$$

Bemerkung. Sei $\mathfrak{B}$ eine S-Struktur und $A_0 \supseteq B$. Dann existiert eine S-Struktur $\mathfrak{A}$ mit

$$A = A_0 \text{ und } \mathfrak{B} \text{ ist ein starkes homom. Bild von } \mathfrak{A}.$$

Beweis: Sei $b_0 \in B$ beliebig. Definiere $\pi : A_0 \to B$ durch

$$\pi(a) := \begin{cases} a & \text{für } a \in B \\ b_0 & \text{für } a \in A_0 \setminus B \end{cases}$$

Definiere S-Struktur $\mathfrak{A}$ mit $A = A_0$ so, dass $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ starker, surjektiver Homom., d.h. durch die folgenden Festlegungen

$$\begin{array}{rcl} R^{\mathfrak{A}} a_1 \ldots a_r & \iff & R^{\mathfrak{B}} \pi(a_1) \ldots \pi(a_r) \\ f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_r) & := & f^{\mathfrak{B}}(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_r)) \\ c^{\mathfrak{A}} & := & c^{\mathfrak{B}}. \end{array}$$

Dann ist etwa

$$\begin{array}{rcl} \pi(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_r)) & = & \pi(f^{\mathfrak{B}}(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_r))) \text{ (Def. von } f^{\mathfrak{A}}) \\ & = & f^{\mathfrak{B}}(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_r)) \text{ (Def. von } \pi). \end{array}$$

Folgerung. Sei $\Phi \subseteq L_0^S$ ohne $=$ und $m \geq 1$. Hat Φ ein Modell, dessen Träger genau m Elemente hat, so hat Φ auch ein Modell mit genau $m + 1$ Elementen (genauer: in jeder Mächtigkeit $\geq m$ hat Φ ein Modell).

Φ_{BA}:

$\forall x \forall y \; x \sqcap y = y \sqcap x$	$\sqcap$ kommutat.
$\forall x \forall y \forall z \; (x \sqcap y) \sqcap z = x \sqcap (y \sqcap z)$	$\sqcap$ assoziat.
$\forall x \forall y \; x \sqcup y = y \sqcup x$	$\sqcup$ kommutat.
$\forall x \forall y \forall z \; (x \sqcup y) \sqcup z = x \cup (y \sqcup z)$	$\sqcup$ assoziat.
$\forall x \forall y \forall z \; x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$	distributiv
$\forall x \forall y \forall z \; x \sqcup (y \sqcap z) = (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$	distributiv
$\forall x \forall y \; (x \sqcup y) \sqcap y = y$	Absorption
$\forall x \; (x \sqcap y) \sqcup y = y$	Absorption
$\forall x \; x \sqcap 1 = x$	1 neutral bei $\sqcap$
$\forall x \; x \sqcup 0 = x$	0 neutral bei $\sqcup$
$\forall x \forall y \; x \sqcap \sim x = 0$	Komplementgesetz
$\forall x \; x \sqcup \sim x = 1$	Komplementgesetz.

Ψ_E:

$\forall x Exx$, $\forall x \forall y (Exy \rightarrow Eyx)$, $\forall x \forall y \forall z ((Exy \wedge Eyz) \rightarrow Eyz)$

$\forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2 ((Ex_1 y_1 \wedge Ex_2 y_2) \rightarrow E(x_1 \sqcap x_2)\,(y_1 \sqcap y_2))$

$\forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2 ((Ex_1 y_1 \wedge Ex_2 y_2) \rightarrow E(x_1 \sqcup x_2)\,(y_1 \sqcup y_2))$

$\forall x \forall y (Exy \rightarrow E \sim x \sim y)$

Sind

$$(\forall x \exists y(Exy \vee Eyx) \wedge (\exists y(Exy \vee Eyx) \vee Eyz))$$

und

$$(\forall x \neg \forall y \neg (Exy \vee Eyx) \wedge (\exists y(Exy \vee Eyx) \vee Eyz))$$

logisch äquivalent?

Ersetzungslemma. (Intuitiv: Ersetzt man in φ einen Teilausdruck ψ durch einen zu ψ logisch äquivalenten Ausdruck, so erhält man einen zu φ logisch äquivalenten Ausdruck.)

Gelte $\varphi_1 \equiv \psi_1$ und $\varphi_2 \equiv \psi_2$; dann

$\neg\varphi_1 \equiv \neg\psi_1$,

$(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \equiv (\psi_1 \wedge \psi_2)$, $\quad (\varphi_1 \vee \varphi_2) \equiv (\psi_1 \vee \psi_2)$,

$\forall x\varphi_1 \equiv \forall x\psi_1$, $\quad \exists x\varphi_1 \equiv \exists x\psi_1$

Für eine totale Belegung b sei b_{sub} die Belegung

$$b_{\mathsf{sub}}(X) := \begin{cases} b(\gamma_i) & \text{falls } X = Y_i \text{ und } i \in \{1, \ldots, n\} \\ b(X) & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir zeigen:

$$\text{für alle } \delta \in \mathsf{AA}: \quad b(\delta\frac{\gamma_1 \ldots \gamma_n}{Y_1 \ldots Y_n}) = b_{\mathsf{sub}}(\delta). \qquad (2)$$

S-Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$, $x_1, \ldots, x_m$ paarweise verschiedene Variable, $a_1, \ldots, a_m \in A$

$$\mathfrak{I}\frac{a_1 \ldots a_m}{x_1 \ldots x_m} := (\mathfrak{A}, \beta\frac{a_1 \ldots a_m}{x_1 \ldots x_m}),$$

wobei $\beta\frac{a_1 \ldots a_m}{x_1 \ldots x_m}$ die Belegung in $\mathfrak{A}$ ist mit

$$\beta\frac{a_1 \ldots a_m}{x_1 \ldots x_m}(y) := \begin{cases} a_i & y = x_i \\ \beta(y) & y \neq x_1, \ldots, y \neq x_m \end{cases}$$

also für Terme $t_1, \ldots, t_m$:

$$\mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_1) \ldots \mathfrak{I}(t_m)}{x_1 \ldots x_m}(y) = \begin{cases} \mathfrak{I}(t_i) & y = x_i \\ \mathfrak{I}(y) & y \neq x_1, \ldots, y \neq x_m \end{cases}$$

Eine Abbildung $\sigma : V \to T^S$ ist eine Substitution, wenn $\{x \mid \sigma(x) \neq x\}$ endlich ist. Ist dann $\{x \mid \sigma(x) \neq x\} \subseteq \{x_1, \ldots, x_m\}$ mit paarweise verschiedenen x_i und ist $\sigma(x_1) = t_1, \ldots, \sigma(x_m) = t_m$, so schreiben wir für σ auch

$$\frac{t_1 \ldots t_m}{x_1 \ldots x_m}.$$

Ist $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ eine S-Interpretation und σ eine Substitution, so sei $\mathfrak{I}^\sigma := (\mathfrak{A}, \mathfrak{I} \circ \sigma)$.

Somit:

Ist $\sigma(x) = t$, so $\mathfrak{I}^\sigma(x) = \mathfrak{I} \circ \sigma(x) = \mathfrak{I}(t)$.

Ist $\sigma(x) = x$, so $\mathfrak{I}^\sigma(x) = \mathfrak{I} \circ \sigma(x) = \mathfrak{I}(x)$.

Ist daher $\sigma = \dfrac{t_1 \ldots t_m}{x_1 \ldots x_m}$, so $\mathfrak{I}^\sigma = \mathfrak{I}\dfrac{\mathfrak{I}(t_1) \ldots \mathfrak{I}(t_m)}{x_1 \ldots x_m}$

Substitutionslemma. Für jede Substitution $\sigma : V \to T^S$, jeden Term $t \in T^S$ und jeden Ausdruck $\varphi \in L^S$ definieren wir

$$t^\sigma \quad \text{und} \quad \varphi^\sigma,$$

sodass für alle S-Interpretationen $\mathfrak{I}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{I}(t^\sigma) & = & \mathfrak{I}^\sigma(t) \\ \mathfrak{I} \models \varphi^\sigma & \iff & \mathfrak{I}^\sigma \models \varphi; \end{array}$$

also

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{I}(t\frac{t_1 \dots t_m}{x_1 \dots x_m}) & = & \mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_1) \dots \mathfrak{I}(t_m)}{x_1 \dots x_m}(t) \\ \mathfrak{I} \models \varphi\frac{t_1 \dots t_m}{x_1 \dots x_m} & \iff & \mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_1) \dots \mathfrak{I}(t_m)}{x_1 \dots x_m} \models \varphi. \end{array}$$

Weiterhin gilt:

$$\varphi\frac{x}{x} = \varphi.$$

Beweis:

$$\begin{array}{lccl} t = x: & t^\sigma & := & \sigma(x) \\ t = c: & t^\sigma & := & c \\ t = f(t_1, \dots, t_n): & t^\sigma & := & f(t_1^\sigma, \dots, t_n^\sigma) \\ \varphi = t_1 = t_2: & \varphi^\sigma & := & t_1^\sigma = t_2^\sigma \\ \varphi = Rt_1 \dots t_n: & \varphi^\sigma & := & Rt_1^\sigma \dots t_n^\sigma \\ \varphi = \neg\psi: & \varphi^\sigma & := & \neg\ \psi^\sigma \\ \varphi = (\psi \wedge \chi): & \varphi^\sigma & := & (\psi^\sigma \wedge \chi^\sigma) \\ \varphi = (\psi \vee \chi): & \varphi^\sigma & := & (\psi^\sigma \vee \chi^\sigma) \end{array}$$

$$\varphi = \underset{\forall}{\exists} x \psi : \qquad \varphi^\sigma \ := \ \underset{\forall}{\exists} u \ \psi \frac{\sigma(y_1) \quad \ldots \quad \sigma(y_r) \quad u}{y_1 \quad \ldots \quad y_r \quad x}$$

Dabei sind $y_1, \ldots, y_r$ paarweise verschieden mit

$$\{y_1, \ldots, y_r\} \ := \ \{y \mid y \in \mathrm{fr}(\underset{\forall}{\exists} x \psi) \text{ und } y \neq \sigma(y)\}$$

und

$$u := \begin{cases} x, & \text{falls } x \notin \mathrm{var}(\sigma(y_1) \cup \ldots \cup \sigma(y_r)) \\ \text{die erste Variable, die in } \psi, \sigma(y_1), \ldots, \sigma(y_r) \text{ nicht vorkommt,} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bemerkungen. 1)

$$y \in \mathrm{fr}(\varphi\frac{t_1\ldots t_m}{x_1\ldots x_m}) \iff (y \in \mathrm{fr}(\varphi) \text{ und } y \neq x_1,\ldots,y\neq x_m)$$
$$\text{oder ex. } i \text{ mit } (y \in \mathrm{var}(t_i) \text{ und } x_i \in \mathrm{fr}(\varphi).$$

2) (gebundene Umbenennung) Wenn $y \notin \mathrm{fr}(\exists x\varphi)$, so

$$\exists x\varphi \equiv \exists y\varphi\frac{y}{x}.$$

Beweis von 2: Wenn $y = x$, dann Beh. klar, da $\varphi\frac{x}{x} = \varphi$

Sei $y \neq x$ und somit $y \notin \mathrm{fr}(\varphi)$.

Sei $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{I} \models \exists y\ \varphi\frac{y}{x} \\
\iff\ & \text{ex. } a \in A: \ \mathfrak{I}\frac{a}{y} \models \varphi\frac{y}{x} \\
\iff\ & \text{ex. } a \in A: \ (\mathfrak{I}\frac{a}{y})\frac{\mathfrak{I}\frac{a}{y}(y)}{x} \models \varphi \qquad \text{(Sub.lem.)} \\
\iff\ & \text{ex. } a \in A: \ \mathfrak{I}\frac{a\ a}{y\ x} \models \varphi \qquad (\text{da } y \neq x) \\
\iff\ & \text{ex. } a \in A: \ \mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi \qquad (\text{da } y \notin \mathrm{fr}(\varphi) \text{ und Koin.lem.}) \\
\iff\ & \mathfrak{I} \models \exists x\varphi.
\end{aligned}$$

3) (endliche Quantoren) Sei y die erste Variable, die in $\{x, \varphi\}$ nicht vorkommt. Wir setzen

$$\exists^{\geq 2} x\varphi := \exists x \exists y (\varphi \wedge \varphi\frac{y}{x} \wedge \neg y = x).$$

Dann gilt für jede Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$:

$$\mathfrak{I} \models \exists^{\geq 2} x\varphi \quad \Longleftrightarrow \quad |\{a \in A \mid \mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi\}| \geq 2.$$

$\varphi \in L^S$ ist in pränexer Normalform, wenn

$$\varphi = \underbrace{Q_1 x_1 \dots Q_m x_m}_{\text{Präfix}} \underbrace{\varphi_0}_{\text{Kern}}$$

mit $Q_1, \dots, Q_m \in \{\forall, \exists\}$ und φ_0 quantorenfrei.

Satz über die pränexe Normalform. Zu jeden Ausdruck $\varphi \in L^S$ läßt sich in polynomieller Zeit ein logisch äquivalenter Ausdruck $\psi \in L^S$ in pränexer Normalform angeben mit $\mathrm{fr}(\varphi) = \mathrm{fr}(\psi)$.

Beweis:

(1) $\neg\exists x\varphi \equiv \forall x\neg\varphi$.

(2) $\neg\forall x\varphi \equiv \exists x\neg\varphi$.

(3) $(\exists x\varphi\wedge\psi) \equiv \exists y(\varphi\frac{y}{x}\wedge\psi)$, wenn $y \notin \mathrm{fr}(\{\exists x\varphi, \psi\})$

$(\varphi\wedge\exists x\psi) \equiv \exists y(\varphi\wedge\psi\frac{y}{x})$, wenn $y \notin \mathrm{fr}(\{\varphi, \exists x\psi\})$

$(\forall x\varphi\wedge\psi) \equiv \forall y(\varphi\frac{y}{x}\wedge\psi)$, wenn $y \notin \mathrm{fr}(\{\forall x\varphi, \psi\})$

$(\varphi\wedge\forall x\psi) \equiv \forall y(\varphi\wedge\psi\frac{y}{x})$, wenn $y \notin \mathrm{fr}(\{\varphi, \forall x\psi\})$.

(4) Wie (3) wobei $\wedge$ stets durch $\vee$ ersetzt.

$\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$, $y \notin \mathrm{fr}(\{\varphi, \exists x\psi\})$:

$$\begin{array}{ll} & \mathfrak{I} \models (\varphi \wedge \exists x\psi) \\ \iff & \mathfrak{I} \models (\varphi \wedge \exists y\psi\frac{y}{x}) \quad (\text{da } \exists x\psi \equiv \exists y\psi\frac{y}{x}) \\ \iff & (\mathfrak{I} \models \varphi \text{ und ex } a \in A : \mathfrak{I}\frac{a}{y} \models \psi\frac{y}{x}) \\ \iff & \text{ex } a \in A : (\mathfrak{I}\frac{a}{y} \models \varphi \text{ und } \mathfrak{I}\frac{a}{y} \models \psi\frac{y}{x}) \qquad (\text{Koinz.lem.}) \\ \iff & \mathfrak{I} \models \exists y(\varphi \wedge \psi\frac{y}{x}). \end{array}$$

Beispiel: Sei

$$\varphi = (\neg\exists z Pxyz \vee \forall x \exists y Rxy).$$

Dann

$$\begin{array}{lll} \varphi & \overset{(1)}{\equiv} & (\forall z \neg Pxyz \vee \forall x \exists y Rxy) \\ & \overset{(4)}{\equiv} & \forall z(\neg Pxyz \vee \forall x \exists y Rxy) \\ & \overset{(4)}{\equiv} & \forall z \forall u(\neg Pxyz \vee \exists y Ruy) \\ & \overset{(4)}{\equiv} & \forall z \forall u \exists v(\neg Pxyz \vee Ruv). \end{array}$$

Ein Ausdruck in pränexer Normalform ist universell (existentiell), wenn alle Quantoren im Präfix Allquantoren (Existenzquantoren) sind.

φ und ψ sind erfüllbarkeitsäquivalent, wenn

$$\text{Erf } \varphi \iff \text{Erf } \psi.$$

Satz über die Skolemsche Normalform. Zu jeden Ausdruck φ läßt sich in polynomieller Zeit ein erfüllbarkeitsäquivalenter, universeller Ausdruck ψ in pränexer Normalform angeben mit $\text{fr}(\varphi) = \text{fr}(\psi)$. In ψ kommen neben den Symbolen aus φ gegebenfalls noch weitere Funktionssymbole und Konstantensymbole vor.

Beweis: Man bringe φ zunächst in pränexe NF und eliminiere anschließend "von links beginnend" die Existenzquantoren im Präfix wie folgt:

Sei $\varphi_1 \in L^S$ und $\varphi_1 = \forall x_1 \ldots \forall x_k \exists x_{k+1} \chi$.

Man wähle $f \notin S$, f k-stellig (falls $k = 0$, so sei f ein Konstantensymbol). Wir setzen

$$\psi_1 = \forall x_1 \ldots \forall x_k \ \chi \frac{f(x_1, \ldots, x_k)}{x_{k+1}}$$

Dann gilt:

(1) $\psi_1 \models \varphi_1$

(2) Wenn Erf φ_1, so Erf ψ_1 (wegen (1) sind somit φ_1 und ψ_1 erfüllbarkeitsäquivalent)

(3) $\text{fr}(\varphi_1) = \text{fr}(\psi_1)$.

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ S-Strukturen. $\mathfrak{A}$ ist Substruktur von $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, wenn

1. $A \subseteq B$.
2. (a) für $R \in S$ n-st.: $R^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{B}} \cap A^n$;
   (b) für $f \in S$ n-st.: $f^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{B}} \upharpoonright A^n$;
   (c) für $c \in S$: $c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$.

4) S enthalte mindestens ein Konstantensymbol und sei $\mathfrak{B}$ eine S-Struktur. Für

$$A_0 := \{t^{\mathfrak{B}} \mid t \in T_0^S\}$$

gilt: Es gibt eine Substruktur $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{B}$ mit $A = A_0$, die durch die variablenfreien Terme induzierte Substruktur.

Definiere $\mathfrak{A}$ durch

$A := A_0$

$R^{\mathfrak{A}} a_1 \dots a_r$ gdw. $R^{\mathfrak{B}} a_1 \dots a_r$

$c^{\mathfrak{A}} := c^{\mathfrak{B}} \quad (\in A_0)$

$f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_r) := f^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_r) \qquad (\in A?)$

Da $a_1, \dots, a_r \in A_0$, existieren $t_1, \dots, t_r \in T_0^S$ mit $a_1 = t_1^{\mathfrak{B}}, \dots, a_r = t_t^{\mathfrak{B}}$. Dann ist

$$f^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_r) = f^{\mathfrak{B}}(t_1^{\mathfrak{B}}, \dots, t_r^{\mathfrak{B}}) = \underbrace{\underbrace{f(t_1, \dots, t_r)}_{\in T_0^S}{}^{\mathfrak{B}}}_{\in A_0}.$$

5) (Universelle Ausdrücke bleiben beim Übergang zu Substrukturen erhalten)

$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, $a_1, \ldots, a_n \in A$

(a) Wenn $t \in T_n^S$, so

$$t^{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots, a_n] = t^{\mathfrak{B}}[a_1, \ldots, a_n].$$

(b) Wenn $\varphi \in L_n^S$ quantorenfrei ist, so

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \iff \mathfrak{B} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$$

(c) Wenn $\varphi \in L_n^S$ in pränexer Normalform und universell, so:

$$\text{Wenn } \mathfrak{B} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ so } \mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n].$$

Insbesondere: Wenn $\varphi \in L_0^S$ in pränexer Normalform und universell, so:

$$\text{Wenn } \mathfrak{B} \models \varphi \text{ so } \mathfrak{A} \models \varphi.$$

Beweis zu (c): Sei $\varphi = \forall v_{n+1} \ldots \forall v_{n+s} \psi$ mit quantorenfreiem ψ.

$$\begin{array}{ll} & \mathfrak{B} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \\ \Rightarrow & \text{f.a. } b_1, \ldots, b_s \in B\text{: } \mathfrak{B} \models \psi[a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_s] \\ \Rightarrow & \text{f.a. } b_1, \ldots, b_s \in A\text{: } \mathfrak{B} \models \psi[a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_s] \quad (A \subseteq B) \\ \iff & \text{f.a. } b_1, \ldots, b_s \in A\text{: } \mathfrak{A} \models \psi[a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_s] \quad \text{((b))} \\ \iff & \mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \end{array}$$

6) S enthalte Konst.symbole. Sei Φ Menge von universellen S-Sätzen in pränexer Normalform. Äquivalent sind:

(i) Erf Φ

(i) Erf Φ^t, wobei

$$\Phi^t := \{\psi\frac{t_1 \dots t_m}{x_1 \dots x_m} \mid \forall x_1 \dots \forall x_m \psi \in \Phi \text{ mit qf. } \psi\}$$

die Menge der Grundinstanzen von Ausdrücken in Φ ist.

Beweis:(i)$\Rightarrow$ (ii): Da $\Phi \models \chi$ für $\chi \in \Phi^t$, ist jedes Modell von Φ auch ein Modell von Φ^t.

(ii)$\Rightarrow$(i): Sei $\mathfrak{B} \models \Phi^t$. Wir setzen:

$$A_0 := \{t^{\mathfrak{B}} \mid t \in T_0^S\}.$$

Sei $\mathfrak{A}$ die Substruktur von $\mathfrak{B}$ mit $A = A_0$ (vgl. 4)). Dann $\mathfrak{A} \models \Phi^t$ (wegen 5 (b)). Sei β eine beliebige Belegung in $\mathfrak{A}$ und $\forall x_1 \dots \forall x_n \psi \in \Phi$ mit quantorenfreiem ψ. Dann

$$\text{für alle } t_1, \dots, t_n \in T_0^S: \ (\mathfrak{A}, \beta) \models \psi\tfrac{t_1 \dots t_n}{x_1 \dots x_n}.$$

Dann

$$\text{für alle } t_1, \dots, t_n \in T_0^S: \ (\mathfrak{A}, \beta)\tfrac{t_1^{\mathfrak{A}} \dots t_n^{\mathfrak{A}}}{x_1 \dots x_n} \models \psi$$

also

$$\text{für alle } a_1, \dots, a_n \in A: \ (\mathfrak{A}, \beta)\tfrac{a_1 \dots a_n}{x_1 \dots x_n} \models \psi,$$

daher

$$\mathfrak{A} \models \forall x_1 \dots \forall x_m \psi.$$

Eine Sequenz

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \psi$$

ist korrekt, wenn $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\} \models \psi$.

Eine Sequenzenregel

$$\frac{\begin{matrix}\Gamma_1, \psi_1 \\ \vdots \\ \Gamma_s, \psi_s\end{matrix}}{\Gamma, \psi}$$

ist korrekt, wenn sie bei Anwendung auf korrekte Sequenzen eine korrekte Sequenz liefert.

Ein Sequenzenkalkül $\mathfrak{S}$ ist eine Menge von Sequenzenregeln.

Eine Sequenz Γ, ψ ist in $\mathfrak{S}$ ableitbar oder in $\mathfrak{S}$ formal beweisbar, $\vdash_{\mathfrak{S}} \Gamma, \psi$, wenn sie durch endlichmalige Anwendung der Regeln in $\mathfrak{S}$ gewonnen werden kann.

$\mathfrak{S}$ ist korrekt: alle Regeln in $\mathfrak{S}$ sind korrekt.

$\mathfrak{S}$ ist vollständig: jede korrekte Sequenz ist in $\mathfrak{S}$ ableitbar.

Bemerkung. Ist $\mathfrak{S}$ korrekt, so ist jede in $\mathfrak{S}$ ableitbare Sequenz korrekt.

Ein korrekter und vollständiger Sequenzenkalkül $\mathfrak{S}_1$

(Vor) $\quad \dfrac{}{\Gamma, \varphi}, \quad \varphi \in \Gamma$

(Ant) $\quad \dfrac{\Gamma, \varphi}{\Gamma', \varphi}, \quad \Gamma \subseteq \Gamma'$

(FU) $\quad \dfrac{\begin{matrix}\Gamma, \psi, \varphi \\ \Gamma, \neg\psi, \varphi\end{matrix}}{\Gamma, \varphi}$

(Wid) $\quad \dfrac{\begin{matrix}\Gamma, \neg\varphi, \psi \\ \Gamma, \neg\varphi, \neg\psi\end{matrix}}{\Gamma, \varphi}$

($\vee$A) $\quad \dfrac{\begin{matrix}\Gamma, \varphi, \chi \\ \Gamma, \psi, \chi\end{matrix}}{\Gamma, (\varphi \vee \psi), \chi}$

($\vee$S) $\quad \dfrac{\Gamma, \varphi}{\Gamma, (\varphi \vee \psi)} \qquad \dfrac{\Gamma, \varphi}{\Gamma, (\psi \vee \varphi)}$

($\exists$S) $\quad \dfrac{\Gamma, \varphi\frac{t}{x}}{\Gamma, \exists x \varphi}$

($\exists$A) $\quad \dfrac{\Gamma, \varphi\frac{y}{x}, \psi}{\Gamma, \exists x \varphi, \psi} \quad y \notin \mathrm{fr}(\Gamma, \exists x \varphi, \psi)$

($=$ S) $\quad \dfrac{}{t = t}$

($=$ A) $\quad \dfrac{\Gamma, \varphi\frac{t_1 \ldots t_m}{x_1 \ldots x_m}}{\Gamma, t_1 = t'_1, \ldots, t_m = t'_m, \varphi\frac{t'_1 \ldots t'_m}{x_1 \ldots x_m}}$

Statt $\vdash_{\mathfrak{S}_1} \Gamma, \psi$ schreiben wir $\vdash \Gamma, \psi$.

Bemerkung 1. Alle Regeln von $\mathfrak{S}_1$ sind korrekt; somit

$$\text{wenn } \vdash \Gamma, \varphi, \text{ so } \Gamma \models \varphi.$$

Beweis. ($\exists$A) $\dfrac{\Gamma, \varphi\frac{y}{x}, \psi}{\Gamma, \exists x\varphi, \psi}$ $y \notin \mathrm{fr}(\Gamma, \exists x\varphi, \psi)$ ist korrekt:

Gelte

$$\Gamma, \varphi\frac{y}{x} \models \psi \tag{3}$$

und sei $\mathfrak{I} \models \Gamma$ und $\mathfrak{I} \models \exists x\varphi$, wobei $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$.

Dann

$$\text{ex. } a \in A\text{: } \mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi.$$

Dann nach Koinzidenzlemma und Vor. $y \notin \mathrm{fr}(\exists x\varphi)$

$$\text{ex. } a \in A\text{: } (\mathfrak{I}\frac{a}{x})\frac{a}{y} \models \varphi.$$

Somit

$$\text{ex. } a \in A\text{: } (\mathfrak{I}\frac{a}{y})\frac{\mathfrak{I}\frac{a}{y}(y)}{x} \models \varphi.$$

Daher nach Substit.lemma

$$\text{ex. } a \in A\text{: } \mathfrak{I}\frac{a}{y} \models \varphi\frac{y}{x}.$$

Da auch $\mathfrak{I}\frac{a}{y} \models \Gamma$ (weil $y \notin \mathrm{fr}(\Gamma)$), gilt nach (3)

$$\mathfrak{I}\frac{a}{y} \models \psi$$

und daher $\mathfrak{I} \models \psi$ (weil $y \notin \mathrm{fr}(\psi)$).

Es gilt

(1) $\vdash t = t$

(2) $\vdash t_1 = t_2, t_2 = t_1$

(3) $\vdash t_1 = t_2, t_2 = t_3, t_1 = t_3$

(4) $\vdash Rt_1 \ldots t_r, t_1 = t_1', \ldots, t_r = t_r', Rt_1' \ldots t_r'$

(5) $\vdash t_1 = t_1', \ldots, t_r = t_r', f(t_1, \ldots, t_r) = f(t_1', \ldots, t_r')$

Eine Sequenzenregel

$$(R) \quad \frac{\begin{array}{c}\Gamma_1, \psi_1 \\ \vdots \\ \Gamma_s, \psi_s\end{array}}{\Gamma, \psi}$$

ist in in $\mathfrak{S}_1$ ableitbar, wenn in $\mathfrak{S}_1$ und in $\mathfrak{S}_1 \cup \{(R)\}$ die gleichen Sequenzen ableitbar sind.

Die folgenden Regel sind ableitbar:

$$(\text{TND}) \quad \frac{}{(\varphi \vee \neg\varphi)}$$

$$(\text{Wid'}) \quad \frac{\begin{array}{c}\Gamma, \psi \\ \Gamma, \neg\psi\end{array}}{\Gamma, \varphi}$$

$$(\text{MP}) \quad \frac{\begin{array}{c}\Gamma, (\varphi \vee \psi) \\ \Gamma, \neg\varphi\end{array}}{\Gamma, \psi} \qquad \frac{\begin{array}{c}\Gamma, (\neg\varphi \vee \psi) \\ \Gamma, \varphi\end{array}}{\Gamma, \psi}$$

$$(\text{KS}) \quad \frac{\begin{array}{c}\Gamma, \varphi, \psi \\ \Gamma, \varphi\end{array}}{\Gamma, \psi}$$

$\Phi \subseteq L^S$, $\psi \in L^S$:

ψ ist aus Φ $\mathfrak{S}_1$-ableitbar oder mit $\mathfrak{S}_1$ formal beweisbar , $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}_1} \beta$,

gdw

es gibt endlich viele $\varphi_1, \ldots, \varphi_r \in \Phi$ mit: $\vdash \varphi_1, \ldots, \varphi_r, \psi$

$\vdash$ statt $\vdash_{\mathfrak{S}_1}$; ableitbar statt $\mathfrak{S}_1$-ableitbar

Ziel:

$$\Phi \vdash \psi \iff \Phi \models \psi$$

$\Rightarrow=$ Korrektheit von $\mathfrak{S}_1$; $\Leftarrow=$ Vollständigkeit von $\mathfrak{S}_1$.

Da alle Regeln von $\mathfrak{S}_1$ korrekt sind:

Korrektheitssatz. Wenn $\Phi \vdash \psi$, so $\Phi \models \psi$.

Beweis: Wenn $\Phi \vdash \psi$, so gibt es $\varphi_1, \ldots, \varphi_r \in \Phi$ mit:

$$\vdash \varphi_1, \ldots, \varphi_r, \psi.$$

Nach Bem. 1 gilt dann $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_r\} \models \psi$, also $\Phi \models \psi$.

Bemerkung 2. (a) Wenn $\Phi \vdash \psi$ und $\Phi \subseteq \Psi$, so $\Psi \vdash \psi$.

(b) Wenn $\Phi \vdash \psi$, so ex. endliches $\Phi_0 \subseteq \Phi$ mit $\Phi_0 \vdash \psi$.

(c) Wenn $\psi \in \Phi$, dann $\Phi \vdash \psi$.

(d) Wenn $\Gamma \subseteq \Phi$, $\vdash \Gamma, \psi_1, \ldots, \psi_r, \psi$ und $\Phi \vdash \psi_1, \ldots, \Phi \vdash \psi_r$, so $\Phi \vdash \psi$.

(e) Wenn $\vdash \psi_1, \ldots, \psi_r, \psi$ und $\Phi \vdash \psi_1, \ldots, \Phi \vdash \psi_r$, so $\Phi \vdash \psi$.

Φ ist ($\mathfrak{S}_1$-)widerspruchsfrei, Wf Φ,

gdw

es gibt keinen Ausdruck φ mit: $\Phi \vdash \varphi$ und $\Phi \vdash \neg\varphi$.

Lemma 1. Wf Φ gdw f. a. endlichen $\Phi_0 \subseteq \Phi$: Wf Φ_0.

Lemma 2. nicht Wf Φ gdw f. a. $\psi \in L^S$: $\Phi \vdash \psi$.

Lemma 3. (a) $\Phi \vdash \psi$ gdw nicht Wf $\Phi \cup \{\neg\psi\}$.

(b) $\Phi \vdash \neg\psi$ gdw nicht Wf $\Phi \cup \{\psi\}$.

(c) Wenn Wf Φ, so Wf $\Phi \cup \{\psi\}$ oder Wf $\Phi \cup \{\neg\psi\}$.

Lemma 4. Wenn Wf Φ, so Erf Φ.

Lemma 5. Wenn $\Phi_1 \subseteq \Phi_2 \subseteq \ldots$ und Wf Φ_i für alle $i \geq 1$, so Wf $\bigcup_{i \geq 1} \Phi_i$.

$$\bar{t} := \{t' \mid t \sim t'\} \quad \text{und} \quad T^{\Phi} := \{\bar{t} \mid t \in T^S\}.$$

Für $c \in S$: $\qquad c^{T^{\Phi}} := \bar{c}$.

Für r-stelliges $f \in S$:

$$f^{T^{\Phi}}(\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_r) := \overline{f(t_1, \ldots, t_r)}.$$

Für r-stelliges $R \in S$:

$$R^{T^{\Phi}} \bar{t}_1 \ldots \bar{t}_r \quad \text{gdw} \quad \Phi \vdash Rt_1 \ldots t_r.$$

Setze $\mathfrak{I}^{\Phi} := (\mathfrak{T}^{\Phi}, \beta^{\Phi})$, wobei

$$\beta^{\Phi}(x) := \bar{x}.$$

Bemerkung 2. (a) Für $t \in T^S$: $\mathfrak{I}^{\Phi}(t) = \bar{t}$.

(b) Für atomares φ:

$$\mathfrak{I}^{\Phi} \models \varphi \iff \Phi \vdash \varphi.$$

(c) Für $\varphi \in L^S$ und paarweise verschiedenen $x_1, \ldots, x_n$:

$$\mathfrak{I}^{\Phi} \models \exists x_1 \ldots \exists x_n \varphi \iff \text{ex. } t_1, \ldots, t_n \in T^S\text{: } \mathfrak{I}^{\Phi} \models \varphi \frac{t_1 \ldots t_n}{x_1 \ldots x_n}$$

$$\mathfrak{I}^{\Phi} \models \forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi \iff \text{f.a. } t_1, \ldots, t_n \in T^S\text{: } \mathfrak{I}^{\Phi} \models \varphi \frac{t_1 \ldots t_n}{x_1 \ldots x_n}.$$

Bemerkung 2 (c) ergibt sich aus:

Lemma. Sei $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ eine Interpretation mit

$$A = \{\mathfrak{I}(t) \mid t \in T^S\}.$$

Dann

$$\mathfrak{I}^\Phi \models \exists x_1 \dots \exists x_n \varphi \iff \text{ex. } t_1, \dots, t_n \in T^S\colon \mathfrak{I}^\Phi \models \varphi\frac{t_1 \dots t_n}{x_1 \dots x_n}$$

$$\mathfrak{I}^\Phi \models \forall x_1 \dots \forall x_n \varphi \iff \text{f.a. } t_1, \dots, t_n \in T^S\colon \mathfrak{I}^\Phi \models \varphi\frac{t_1 \dots t_n}{x_1 \dots x_n}.$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{I}^\Phi \models \exists x_1 \dots \exists x_n \varphi \\
\iff\quad & \text{ex } a_1, \dots, a_n \in A : \mathfrak{I}\frac{a_1 \dots a_n}{x_1 \dots x_n} \models \varphi \\
\overset{\text{(Vor.)}}{\iff}\quad & \text{ex } t_1, \dots, t_n \in T^S : \mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_1) \dots \mathfrak{I}(t_n)}{x_1 \dots x_n} \models \varphi \\
\iff\quad & \text{ex } t_1, \dots, t_n \in T^S : \mathfrak{I} \models \varphi\frac{t_1 \dots t_n}{x_1 \dots x_n}.
\end{aligned}$$

Bemerkung 3. Φ sei widerspruchsfrei, negationstreu und enthalte Beispiele. Dann gilt für alle φ, ψ:

(a) Entweder $\Phi \vdash \varphi$ oder $\Phi \vdash \neg\varphi$.

(b) $\Phi \vdash (\varphi \vee \psi) \iff \Phi \vdash \varphi$ oder $\Phi \vdash \psi$.

(c) $\Phi \vdash \exists x\varphi \iff$ ex. $t \in T^S$: $\Phi \vdash \varphi\frac{t}{x}$.

Beweis: (a) Da Φ negationstreu:

$$\Phi \vdash \varphi \text{ oder } \Phi \vdash \neg\varphi.$$

Es kann nicht ($\Phi \vdash \varphi$ und $\Phi \vdash \neg\varphi$) gelten, da Wf Φ.

(b) Gelte $\Phi \vdash (\varphi \vee \psi)$. Wenn nicht $\Phi \vdash \varphi$, so $\Phi \vdash \neg\varphi$ (weil Φ negationstreu ist), und (MP) Seite 47 liefert dann $\Phi \vdash \psi$. Die andere Richtung ergibt sich mit ($\vee$S).

(c) $\Leftarrow$: mit ($\exists$S).

$\Rightarrow$: Gelte $\Phi \vdash \exists x\varphi$. Da Φ Beispiele enthält, gibt es einen Term t mit

$$\Phi \vdash (\neg\exists x\varphi \vee \varphi\frac{t}{x});$$

mit (MP) Seite 47 ergibt sich

$$\Phi \vdash \varphi\frac{t}{x}.$$

Satz von Henkin. Sei Φ widerspruchsfrei, negationstreu und enthalte Beispiele. Dann gilt für alle φ:

$$\mathfrak{I}^{\Phi} \models \varphi \iff \Phi \vdash \varphi.$$

Insbesondere: $\mathfrak{I}^{\Phi} \models \Phi$.

Beweis: Induktion über Anzahl der Junktoren und Quantoren in φ. Für atomares φ wurde die Behauptung in Bem. 2 gezeigt.

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}^{\Phi} \models \neg\varphi &\iff \text{nicht } \mathfrak{I}^{\Phi} \models \varphi \\ &\iff \text{nicht } \Phi \vdash \varphi \quad \text{(Ind.vor)} \\ &\iff \Phi \vdash \neg\varphi \quad \text{Bem. 3(a).} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}^{\Phi} \models (\varphi \vee \psi) &\iff (\mathfrak{I}^{\Phi} \models \varphi \text{ oder } \mathfrak{I}^{\Phi} \models \psi) \\ &\iff (\Phi \vdash \varphi \text{ oder } \Phi \vdash \psi) \quad \text{(Ind.vor)} \\ &\iff \Phi \vdash (\varphi \vee \psi) \quad \text{Bem. 3(b).} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}^{\Phi} \models \exists x\varphi &\iff \text{ex. } t \in T^S : \mathfrak{I}^{\Phi} \models \varphi\frac{t}{x} \quad \text{Bem. 2(c)} \\ &\iff \text{ex. } t \in T^S : \Phi \vdash \varphi\frac{t}{x} \quad \text{(Ind.vor)} \\ &\iff \Phi \vdash \exists x\varphi \quad \text{Bem. 3(c).} \end{aligned}$$

Lemma 1. Sei Wf Φ und frei(Φ) endlich. Dann ex. Ψ:

Wf Ψ, $\quad \Phi \subseteq \Psi$ und Ψ enthält Beispiele.

Lemma 2. Sei Wf Ψ. Dann ex. Θ:

Wf Θ, $\quad \Psi \subseteq \Theta$ und Θ ist negationstreu.

Satz. Ist Wf Φ und frei(Φ) endlich, so Erf Φ.

Gödelscher Vollständigkeitssatz. (Kurt Gödel)

Für $\Phi \cup \{\psi\} \in L^S$ gilt:

$$\Phi \models \psi \iff \Phi \vdash \psi.$$

Lemma 3. Wf Φ, $y \notin \mathrm{fr}(\Phi \cup \{\exists x\psi\}$. Dann

$$\text{Wf } \Phi \cup \{(\exists x\psi \to \psi\frac{y}{x}\}.$$

Beweis: Ang. nicht Wf $\Phi \cup \{(\exists x\psi \to \psi\frac{y}{x})\}$. Sei $\chi \in L_0^S$. Dann ex. $\Gamma \subseteq \Phi$ mit $\vdash \Gamma, (\exists x\psi \to \psi\frac{y}{x}), \chi$, etwa

	$\vdots$	
k	$\Gamma, (\neg\exists x\psi \vee \psi\frac{y}{x}), \chi$	
$k+1$	$\Gamma, \neg\exists x\psi, \neg\exists x\psi$	(Vor)
$k+2$	$\Gamma, \neg\exists x\psi, (\neg\exists x\psi \vee \psi\frac{y}{x})$	($\vee$S) auf $k+1$
$k+3$	$\Gamma, \neg\exists x\psi, (\neg\exists x\psi \vee \psi\frac{y}{x}), \chi$	(Ant) auf k
$k+4$	$\Gamma, \neg\exists x\psi, \chi$	(KS) auf $k+3$, $k+2$
	$\vdots$	
m	$\Gamma, \psi\frac{y}{x}, \chi$	entsprechend
$m+1$	$\Gamma, \exists x\psi, \chi$	($\exists$A) auf m; $y \notin \mathrm{fr}(\Gamma, \exists x\psi, \chi)$
$m+2$	Γ, χ	(FU) auf $m+1$, $k+4$.

Dies zeigt

$$\Phi \models \exists v_1 = v_1 \quad \text{und} \quad \Phi \models \neg\exists v_1 = v_1,$$

im Gegensatz zu Wf Φ.

$\Phi \cup \{\psi\} \in L^S$.

Gödelscher Vollständigkeitssatz.

$$\begin{array}{rcl} \Phi \models \psi & \Longleftrightarrow & \Phi \vdash \psi \\ \text{Erf } \Phi & \Longleftrightarrow & \text{Wf } \Phi. \end{array}$$

Endlichkeitssatz (Kompaktheitssatz).

1) Wenn $\Phi \models \psi$, so ex. endliches $\Phi_0 \subseteq \Phi : \Phi_0 \models \psi$.

2) Wenn jede endliche Teilmenge von Φ erfüllbar ist, so auch Φ.

Satz von Löwenheim und Skolem. Ist Φ erfüllbar, so hat Φ ein Modell mit höchstens abzählbarem Träger.

Folgerung (aus Vollst.satz). $\Phi \cup \{\psi\} \in L^{S_1} \subseteq L^{S_2}$. Dann:

$$\begin{aligned} \Phi \vdash_{S_1} \psi \quad &\Longleftrightarrow \quad \Phi \vdash_{S_2} \psi; \\ \mathsf{Wf}_{S_1}\Phi \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathsf{Wf}_{S_2}\Phi. \end{aligned}$$

$S = \{s, 0\}$. $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, s^{\mathbb{N}}, 0)$, wobei $s^{\mathbb{N}}(k) = k + 1$

(P1) $\forall x \neg s(x) = 0$

(P2) $\forall x \forall y (s(x) = s(y) \rightarrow x = y)$

(P3) $\forall X((X0 \wedge \forall y(Xy \rightarrow Xs(y))) \rightarrow \forall z Xz)$

Erfahrungstatsache 1: Es ist möglich, die ganze Vielfalt der Objekte des “mathematischen Universums” auf den Mengenbegriff zurückzuführen: Man kann annehmen, das Universum besteht nur aus Mengen.

Erfahrungstatsache 2: Jede mathematische Aussage läßt sich als Aussage über die Gesamtheit der Mengen auffassen und in $L^{\{\underline{\epsilon}\}}$ symbolisieren.

Erfahrungstatsache 3: Die Eigenschaften des Universums, die der Mathematiker verwendet, sind in ZFC, ZFC $\subseteq L_0^{\{\underline{\epsilon}\}}$, “enthalten” und die Mathematiker akzeptieren die Eigenschaften von ZFC.

Erfahrungstatsache 4: Für $\varphi \subseteq L_0^{\{\underline{\epsilon}\}}$ gilt:

ZFC $\vdash \varphi \iff \varphi$ ist Symbolisierung einer mathematisch beweisbaren Aussage.

Satz. (Gödelscher Vollständigkeitssatz) Sei $\Phi \subseteq L^{S_\infty}$ semi-entscheidbar. Dann ist

$$\{\psi \in L^{S_\infty} \mid \Phi \models \psi\}$$

semi-entscheibar.

Insbesondere: Ist S endlich und $\Phi \subseteq L^{S_\infty}$ endlich, so ist

$$\{\psi \in L^{S} \mid \Phi \models \psi\}$$

semi-entscheibar.

Lemma. Die Menge der ableitbaren S_∞-Sequenzen,

$$\{\Gamma, \psi \mid \Gamma \cup \{\psi\} \subseteq L^{S_\infty},\ \vdash \Gamma, \psi\},$$

ist semi-entscheibar.

Beweis: Für $n = 1, 2, 3, \ldots$ stellt das gesuchte Verfahren die in der lexikographischen Reihenfolge n ersten Terme und Ausdrücke her, bildet die endlich vielen Ableitungen einer Länge $\leq n$, die nur diese Ausdrücke und Terme verwenden und aus höchstens n-gliedrigen Sequenzen bestehen und gibt die jeweils letzte Sequenz aus.

Unentscheidbarkeit der Logik der ersten Stufe.

$$\{\psi \in L_0^{S_\infty} \mid \models \psi\} \quad \text{ist nicht entscheidbar.}$$

Es ist nicht entscheidbar, ob $\varphi \in L_0^{S_\infty}$ allgemeingültig ist.

Beweis: Zurückführung auf das Halteproblem: Wir ordnen jeder Turingmaschine T effektiv einen S_∞-Satz φ_T zu mit

T (angesetzt auf das leere Band) stoppt $\iff$ $\models \varphi_T$.

Angabe einer S-Str. $\mathfrak{A}_T$

T stoppt nicht	T stoppt nach s_0 Schritten
$A_T := \mathbb{N}$	$A_T := \{0, \ldots, \underbrace{\max\{z_T, s_0\}}_{e}\}$
$\leq^{A_T}$ gewöhnl. Ordg	$\leq^{A_T}$ gewöhnl. Ordg
$0^{A_T} := 0$	$0^{A_T} := 0$
s^{A_T} Nachfolgerfkt.	s^{A_T} Nachfolgerfkt. mit $s^{A_T}(e) = e$

$Q^{A_T}\ \ell\ m$: nach ℓ Schritten ist T im Zustand m

$K^{A_T}\ \ell\ m$: nach ℓ Schritten ist Kopf auf m-ten Feld

$B_a^{A_T}\ \ell\ m$: nach ℓ Schritten steht a im m-ten Feld

$\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$, ...: Abk. für Terme 0, $s(0)$, $s(s(0))$, ...

Wir geben $\psi_T \in L_0^S$ an mit

(1) (a) $\mathfrak{A}_T \models \psi_T$

(b) Ist $\mathfrak{A} \models \psi_T$ und läuft T mindestens ℓ Schritte und ist nach ℓ Schritten im Zustand z, so sind

$$\overline{0}^{\mathfrak{A}}, \overline{1}^{\mathfrak{A}}, \ldots, \overline{\ell}^{\mathfrak{A}} \text{ p.v. und } \; Q^{\mathfrak{A}}\overline{\ell}^{\mathfrak{A}}\overline{z}^{\mathfrak{A}}.$$

Für

$$\varphi_T := (\psi_T \to \exists x Q x \overline{1})$$

gilt dann:

(2) T stoppt $\iff \models \varphi_T$.

Als ψ_t wähle man die Konjunktion der Ausdrücke:

1. "$\leq$ ist Ordnung mit kleinstem Element 0 und Nachfolgerfunktion s"
2. (Die Anfangsdaten stimmen) $(Q00 \wedge K00 \wedge \forall x B_* 0x)$
3. (Die Übergänge sind korrekt) $\bigwedge_{\mathsf{anw} \in \delta} \psi_{\mathsf{anw}}$,

wobei etwa für

$$\mathsf{anw} = \; z, a \mapsto z', a', 1$$

$$\begin{aligned}\psi_{\mathsf{anw}} := \forall x \forall y ((Q x \bar{z} \wedge K x y \wedge L_a x y) \rightarrow \\ (\neg s(x) = x \wedge Q s(x) \overline{z'} \wedge K s(x) s(y) \wedge L_{a'} s(x) y \\ \wedge \forall z (\neg z = y \rightarrow \bigwedge_{b \in \Sigma} (L_b s(x) z \leftrightarrow L_b x z)))).\end{aligned}$$

Satz von Trachtenbrot. Die Menge

$$\Psi_{\text{ea}}^{S_\infty} := \{\varphi \in L_0^{S_\infty} | \ \varphi \text{ gilt in jeder endlichen } S_\infty\text{-Struktur}\}$$

der im Endlichen allgemeingültigen Sätze ist nicht semi-entscheidbar.

Beweis: Wir zeigen

$$T \text{ stoppt nicht} \iff \neg\psi_T \in \Psi_{\text{ea}}^{S_\infty}. \tag{4}$$

$\Rightarrow$: T stoppe nicht. Dann ist nach (1)(b) jedes Modell von ψ_T unendlich. Somit $\neg\psi_T \in \Psi_{\text{ea}}^{S_\infty}$.

$\Leftarrow$: Gelte $\neg\psi_T \in \Psi_{\text{ea}}^{S_\infty}$. Da $\mathfrak{A}_T \models \psi_T$ nach (1)(a), ist A_T unendlich und somit stoppt T nicht.

Wäre $\Psi_{\text{ea}}^{S_\infty}$ semi-entscheidbar, so wegen (4) auch

$$\{T \mid T \text{ stoppt nicht}\}.$$

Da auch

$$\{T \mid T \text{ stoppt}\}$$

semi-entscheidbar ist, wäre das Halteproblem entscheidbar, ein Widerspruch.

SYNTAX:

Alphabet

zusätzlich: für $n \geq 1$, n-stellige Relationsvariable

$$V_1^n, V_2^n, \ldots$$

Terme wie in der Logik der ersten Stufe;

Ausdruckskalkül zusätzliche Regeln:

$$\frac{}{Xt_1 \ldots t_r}\ X\ r\text{-st.} \qquad \frac{\varphi}{\forall X \varphi}, \qquad \frac{\varphi}{\exists X \varphi}$$

SEMANTIK:

Eine Belegung zweiter Stufe β in der Struktur $\mathfrak{A}$ ordnet jedem $x \in V$ ein Element $\beta(x) \in A$ zu und jeder n-stelligen Relationsvariable X eine n-stellige Relation $\beta(X)$ auf A, $\beta(X) \subseteq A^n$. $\mathfrak{I} := (\mathfrak{A}, \beta)$ ist dann eine Interpretation zweiter Stufe.

$$\mathfrak{I} \models Xt_1 \ldots t_r \iff \beta(X)\mathfrak{I}(t_1) \ldots \mathfrak{I}(t_r);$$

$\mathfrak{I} \models \forall X \varphi \iff$ f. a. n-stelligen Relationen R auf A: $\mathfrak{I}\frac{R}{X} \models \varphi$;

$\mathfrak{I} \models \exists X \varphi \iff$ ex. n-stellige Relation R auf A: $\mathfrak{I}\frac{R}{X} \models \varphi$.

Unvollständigkeit der Logik der zweiten Stufe.

Die Menge

$$\{\varphi \in \text{II-}L_0^{S_\infty} \mid \varphi \text{ ist allgemeingültig}\}$$

ist nicht semi-entscheidbar.

Beweis: Sei II-Allg.$^{S_\infty}$ die oben angegebene Menge. Für $\varphi \in L_0^{S_\infty}$ gilt:

φ im Endl. allgemeing. $\iff$ $(\varphi_{\text{unendl.}} \vee \varphi)$ allgemeing., d.h.

$$\varphi \in \Psi_{\text{ea}}^{S_\infty} \iff (\varphi_{\text{unendl.}} \vee \varphi) \in \text{II-Allg.}^{S_\infty}.$$

Satz von Fagin. Sei S endlich und K eine isomorphieabgeschlossene Klasse von endlichen S-Strukturen. Dann sind äquivalent:

1. K ist in NP.

2. K ist Σ_1^1-axiomatisierbar, d.h. es gibt ein $\varphi \in \text{II-}L_0^S$ der Gestalt

   $$\varphi = \exists X_1 \ldots \exists X_k \psi,$$

   wobei ψ keine Quantoren über Relationsvariable enthält mit

   $$K = \text{Mod}(\varphi).$$

Universelle Hornausdrücke sind Ausdrücke der Gestalt

$$\forall x_1 \ldots \forall x_m(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_s)$$

wobei jedes φ_i die Gestalt hat

1. ψ oder
2. $((\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_r) \rightarrow \psi)$ oder
3. $(\neg\psi_1 \vee \ldots \vee \neg\psi_r)$

mit atomaren ψ, ψ_j.

Satz. Sei Erf Φ und φ ein universeller Hornausdruck mit $\Phi \models \varphi$. Dann $\mathfrak{J}^\Phi \models \varphi$.

Beweis: Nach Bem 2 (b), Seite 50, gilt für atomares ψ:

$$\mathfrak{J}^\Phi \models \psi \iff \Phi \models \psi. \tag{5}$$

Dies zeigt die Beh. für φ der Gestalt 1.

Gelte $\Phi \models ((\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_r) \rightarrow \psi)$ mit atomaren ψ, ψ_j. Gelte $\mathfrak{J}^\Phi \models (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_r)$, dann wegen (5): $\Phi \models \psi_1, \ldots, \Phi \models \psi_r$, also $\Phi \models \psi$. Wieder nach (5): $\mathfrak{J}^\Phi \models \psi$.

Gelte $\Phi \models (\neg\psi_1 \vee \ldots \vee \neg\psi_r)$. Wenn nicht $\mathfrak{J}^\Phi \models (\neg\psi_1 \vee \ldots \vee \neg\psi_r)$, so $\mathfrak{J}^\Phi \models \psi_j$ und wegen (5) damit $\Phi \models \psi_j$ für $j = 1, \ldots, r$. Also $\Phi \models (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_r)$. Wegen $(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_r) \equiv \neg(\neg\psi_1 \vee \ldots \vee \neg\psi_r)$, waere somit Φ nicht erfüllbar.

Satz. Sei Erf Φ und φ ein universeller Hornausdruck mit $\Phi \models \varphi$. Dann $\mathfrak{I}^{\Phi} \models \varphi$.

Gilt die Beh. für $\varphi := \varphi_1$ und für $\varphi := \varphi_2$, so auch für $\varphi := (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$.

Somit gilt die Beh. für alle quantorenfreien, universellen Hornausdrücken.

Sei nun

$$\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_m \psi,$$

wobei ψ ein quantorenfreier, universeller Hornausdrck ist. Wenn $\Phi \models \varphi$, so für alle $t_1, \ldots, t_m$

$$\Phi \models \psi \frac{t_1 \ldots t_m}{x_1 \ldots x_m}$$

und somit nach dem bereits Bewiesenem

$$\mathfrak{I}^{\Phi} \models \psi \frac{t_1 \ldots t_m}{x_1 \ldots x_m}$$

Wegen Bem. (2)(d), Seite 50, daher

$$\mathfrak{I}^{\Phi} \models \forall x_1 \ldots \forall x_m \psi.$$

Bemerkung. Sei $\Phi \subseteq L^S$ erfüllbar. Kommt $=$ in Φ nicht vor, so für alle $t_1, t_2 \in T^S$:

$$\text{wenn } \Phi \models t_1 = t_2, \text{ so } t_1 = t_2.$$

Beweis: Wegen des Endlichkeitssatzes koennen wir annehmen, dass Φ endlich ist. Dann gibt es ein Θ mit $\Phi \subseteq \Theta \subseteq L^S$, so dass

$$\mathfrak{I}^\Theta \models \Phi$$

(wegen Seite 53, Lemma 1 und 2 und Satz von Henkin). Es gilt $T^\Theta = \{\mathfrak{I}^\Theta(t) \mid t \in T^S\}$. Nach Aufgabe 5, Blatt 10, gilt für die Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ mit:

(1) $A := T^S$;

(2) für n-stelliges $f \in S$ und $t_1, \ldots, t_n \in T^S$:

$$f^{\mathfrak{A}}(t_1, \ldots, t_n) \quad := \quad f(t_1, \ldots, t_n);$$

(3) für $c \in S$: $c^{\mathfrak{A}} := c$;

(4) für n-stelliges $R \in S$ und $t_1, \ldots, t_n \in T^S$:

$$R^{\mathfrak{A}} t_1 \ldots t_n \quad :\text{gdw} \quad R^{\mathfrak{T}^\Theta} \mathfrak{I}^\Theta(t_1) \ldots \mathfrak{I}^\Theta(t_n)$$

(5) $\beta(x) := x$

und alle $\psi \in L^S$ ohne Gleichheitszeichen:

$$\mathfrak{I} \models \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{I}^\Theta \models \psi.$$

Insbesondere, $\mathfrak{I} \models \Phi$. Nach Vor. daher

$$\mathfrak{I} \models t_1 = t_2.$$

Wegen $\mathfrak{I}(t_1) = t_1$ und $\mathfrak{I}(t_2) = t_2$ somit

$$t_1 = t_2.$$

Im folgendem enthalte S stets ein Konstantensymbol.

Eine S-Struktur $\mathfrak{A}$ ist eine Herbrandstruktur, wenn

(1) $A := T_0^S$;
(2) für n-stelliges $f \in S$ und $t_1, \ldots, t_n \in T_0^S$:

$$f^{\mathfrak{A}}(t_1, \ldots, t_n) \quad := \quad f(t_1, \ldots, t_n);$$

(3) für $c \in S$: $c^{\mathfrak{A}} := c$.

Man beachte: $t^{\mathfrak{A}} = t$ fur $t \in T_0^S$.

Satz. Sei $\Phi \subseteq L_0^S$ erfüllbare Menge universeller Hornsätze ohne $=$. Dann ist $\mathfrak{T}_0^{\Phi}$, die Substruktur von $\mathfrak{T}^{\Phi}$, deren Träger aus den Termen in T_0^S besteht, ein Herbrandmodell von Φ, (d.h. eine Herbrandstruktur, die Modell von Φ ist). Für jedes weitere Herbrandmodell $\mathfrak{A}$ von Φ und jedes Relationssymbol $R \in S$:

$$R^{\mathfrak{T}_0^{\Phi}} \subseteq R^{\mathfrak{A}}.$$

$\mathfrak{T}_0^{\Phi}$ ist das minimale Herbrandmodell von Φ.

Satz. Sei $\Phi \subseteq L_0^S$ eine erfüllbar Menge von universellen Hornausdrücken ohne $=$. Für jeden Satz

$$\exists x_1 \ldots \exists x_m(\psi_0 \wedge \ldots \wedge \psi_s)$$

mit atomaren ψ_i sind äquivalent:

(1) $\Phi \models \exists x_1 \ldots \exists x_m(\psi_0 \wedge \ldots \wedge \psi_s)$.

(2) $\mathfrak{T}_0^\Phi \models \exists x_1 \ldots \exists x_m(\psi_0 \wedge \ldots \wedge \psi_s)$.

(3) Es gibt $t_1, \ldots, t_m \in T_0^S$ mit $\Phi \models (\psi_0 \wedge \ldots \wedge \psi_s)\frac{t_1 \ldots t_m}{x_1 \ldots x_m}$.

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2) und (3) $\Rightarrow$ (1) sind klar.

(2) $\Rightarrow$ (3): Nach (2) ex. $t_1, \ldots, t_m \in T_0^S$ mit

$$\mathfrak{T}_0^\Phi \models (\psi_0 \wedge \ldots \wedge \psi_s)\frac{t_1 \ldots t_m}{x_1 \ldots x_m},$$

also für $i = 1, \ldots, s$

$$\mathfrak{T}_0^\Phi \models \psi_i\frac{t_1 \ldots t_m}{x_1 \ldots x_m}$$

und weil $\psi_i\frac{t_1 \ldots t_m}{x_1 \ldots x_m}$ atomar ist, daher

$$\Phi \models \psi_i\frac{t_1 \ldots t_m}{x_1 \ldots x_m}.$$

Somit

$$\Phi \models (\psi_0 \wedge \ldots \wedge \psi_s)\frac{t_1 \ldots t_m}{x_1 \ldots x_m}.$$

$$\mathrm{At}^S_{\neq} = \{\varphi \mid \varphi \in L^S \text{ atomar, ohne } =\}$$
$$Q^S_{\neq} = \{\varphi \mid \varphi \in L^S \text{ quantorenfrei, ohne } =\}$$

Sei

$$\pi : \mathrm{At}^S_{\neq} \to \mathrm{AV}$$

injektiv. Die kanonische Erweiterung von π auf $Q^S_{\neq}$ werde wiederum mit π bezeichnet: $\pi : Q^S_{\neq} \to \mathrm{AA}$

Bemerkung. Für $\Phi \subseteq Q^S_{\neq}$ und $\psi \in Q^S_{\neq}$:

1. Erf Φ gdw Erf $\pi(\Phi)$.
2. $\Phi \models \psi$ gdw $\pi(\Phi) \models \pi(\psi)$.

Beweis: Sei $\mathfrak{I} \models \Phi$. Wir definieren eine Belgung b: Für $p \in \mathrm{var}(\Phi)$, etwa $p = \pi(Rt_1 \ldots t_r)$,

$$b(p) := \begin{cases} 1, \text{wenn } \mathfrak{I} \models Rt_1 \ldots t_r \\ 0, \text{wenn } \mathfrak{I} \models \neg Rt_1 \ldots t_r. \end{cases}$$

Die Belegung b erfülle $\pi(\Phi)$. Dann gilt $\mathfrak{I} \models \Phi$ für $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ mit:

(1) $A := T^S$;
(2) $f^{\mathfrak{A}}(t_1, \ldots, t_n) := f(t_1, \ldots, t_n)$
(3) für $c \in S$: $c^{\mathfrak{A}} := c$;
(4) $\beta(x) := x$
(5) $R^{\mathfrak{A}}(t_1 \ldots t_r)$ gdw $b(\pi(Rt_1 \ldots t_r)) = 1$.

$S = \{\underset{2}{R}, \underset{1}{Q}, \underset{1}{g}, c\}$.

$$\varphi = \forall x \forall y ((Rxy \vee Qx) \wedge \neg Rg(x)x \wedge \neg Qy)$$

$$\{\varphi\}^t = \{((Rt_1t_2 \vee Qt_1) \wedge \neg Rg(t_1)t_1 \wedge \neg Qt_2) \mid t_1, t_2 \in T_0^S\}$$

$\mathfrak{K}_\varphi$ enthält die (π-Bilder der) folgenden Klauseln. Für $t_1, t_2 \in T_0^S$:

$$\{Rt_1t_2, Qt_1\}, \qquad \{\neg Rg(t_1)t_1\}, \qquad \{\neg Qt_2\}$$

Definition. Eine Umbenennung ist eine Substitution σ mit $\sigma(x) \in V$ für alle $x \in V$.

Ausdrücke φ und ψ sind unifizierbar, wenn es eine Substitution σ gibt mit

$$\varphi^\sigma = \psi^\sigma.$$

σ ist dann ein Unifikator von φ und ψ.

Lemma über den Unifikator. Seien φ und ψ atomare Ausdrücke der Gestalt

$$\varphi = Rt_1 \dots t_r \qquad \text{und} \qquad \psi = Rs_1 \dots s_r$$

Der folgende Unifikationsalgorithmus, entscheidet, ob φ und ψ unifizierbar ist, und liefert ggf. einen allgemeinen Unifikator, d.h. einen Unifikator σ von φ und ψ mit:

> Ist τ ein Unfikator von φ und ψ, so existiert eine Substitution η mit $\tau = \sigma\eta$.

(1) Setze $i := 0$ und $\sigma_0 := \mathrm{id}$.

(2) Ist $\varphi^{\sigma_i} = \psi^{\sigma_i}$, stoppe mit Antwort "ja" und Ausgabe σ_i.

(3) Man bestimme die erste Stelle, an denen sich φ^{σ_i} und ψ^{σ_i} unterscheiden. Es seien $\S_1$ und $\S_2$ die Zeichen an dieser Stelle in φ^{σ_i} bzw. in ψ^{σ_i}.

(4) Sind beide, $\S_1$ und $\S_2$, Konstantensymbole oder Funktionssymbole, so stoppe mit Antwort "nein".

(5) Einer der beiden Zeichen $\S_1$ und $\S_2$, etwa $\S_1$ ist eine Variable x. Man bestimme den (!) Term t, der in ψ mit $\S_2$ beginnt.

(6) Wenn $x \in \mathrm{var}(t)$, so stoppe mit Antwort "nein".

(7) Setze $\sigma_{i+1} := \sigma_i \frac{t}{x}$ und $i := i + 1$. Gehe zu (2).

However, most PROLOG implementations have a different solution to the efficiency problem. Since the occur check is the main cause of the problem, it is simply omitted! From a theoretical viewpoint this is a disaster . . .

Satz über die pränexe Normalform für die monadische zweite Stufe. Zu jedem Ausdruck in $M\text{-}L^S$ läßt sich ein logisch äquivalenter in pränexer Normalform angeben, bei dem alle Quantoren über Mengenvariablen vor allen Quantoren über Individuenvariablen stehen.

Σ endliches Alphabet.

$S(\Sigma) = \{\underset{2}{N}\} \cup \{\underset{1}{P_a} \mid a \in \Sigma\}$.

Für $w \in \Sigma^+ (= \Sigma^* \setminus \{\lambda\})$ sei die Wortstruktur $\mathfrak{B}_w$ zu w gegeben durch

$$\mathfrak{B}_w := (\{1, \ldots, |w|\}, N^w, (P_a^w)_{a \in \Sigma}),$$

wobei

$$N^w ij \iff j = i + 1$$

und für $w = a_1 \ldots a_n$

$$P_a^w i \iff a_i = a.$$

Es gibt einen Satz $\varphi_W \in M\text{-}L^{S(\Sigma)}$ mit: Für alle endlichen $S(\Sigma)$-Strukturen $\mathfrak{A}$ gilt

$$\mathfrak{A} \models \varphi_W \iff \text{ex. } w \in \Sigma^+ \text{: } \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}_w.$$

Satz (Automaten = monadische zweite Stufe).

Σ Alphabet,

1. Zu jedem Automaten $\mathbb{A}$ läßt sich effektiv ein $\varphi \in M\text{-}L_0^{S(\Sigma)}$ angeben mit: Für alle Wörter $w \in \Sigma^+$

$$\mathbb{A} \text{ akzeptiert } w \iff \mathfrak{B}_w \models \varphi.$$

2. Zu jedem $\varphi \in M\text{-}L_0^{S(\Sigma)}$ läßt sich effektiv ein Automat $\mathbb{A}$ angeben mit: Für alle Wörter $w \in \Sigma^+$

$$\mathbb{A} \text{ akzeptiert } w \iff \mathfrak{B}_w \models \varphi.$$

$\mathbb{A} \sim \varphi$: Für alle Wörter $w \in \Sigma^+$

$$\mathbb{A} \text{ akzeptiert } w \iff \mathfrak{B}_w \models \varphi.$$

$X \subseteq Y$ sei Abkürzung für

$$\forall z(Xz \rightarrow Yz)$$

$\mathsf{Singl}(X)$ sei Abkürzung für

$$\exists y(Xy \wedge \forall z(Xz \rightarrow z = y))$$

$\mathsf{Suc}(X, Y)$ sei Abkürzung für

$$\mathsf{Singl}(X) \wedge \mathsf{Singl}(Y) \wedge \forall x \forall y((Xx \wedge Yy) \rightarrow Nxy)$$

$X \subseteq P_a$ sei Abkürzung für

$$\forall x(Xx \rightarrow P_a x)$$