Sei R eine zweistellige Relation auf A.

R ist reflexiv, wenn für alle $a \in A$ gilt:

$$Raa.$$

R ist irreflexiv, wenn für alle $a \in A$ gilt:

$$\text{nicht } Raa.$$

R ist symmetrisch, wenn für alle $a, b \in A$ gilt:

$$\text{wenn } Rab, \text{so } Rba.$$

R ist antisymmetrisch, wenn für alle $a, b \in A$ gilt:

$$\text{wenn } Rab \text{ und } Rba, \text{ so } a = b.$$

R ist konnex, wenn für alle $a, b \in A$ gilt:

$$Rab \text{ oder } Rba \text{ oder } a = b.$$

R ist transitiv, wenn für alle $a, b, c \in A$ gilt:

$$\text{wenn } Rab \text{ und } Rbc, \text{ so } Rac.$$

R ist eine partielle Ordnung, wenn R reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.

R ist eine totale oder lineare Ordnung, wenn R reflexiv, transitiv und antisymmetrisch und konnex ist.

R ist eine Äquivalenzrelation, wenn R reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.

$f : A^2 \to A$.

f ist kommutativ, wenn für alle $a, b \in A$ gilt:

$$f(a, b) = f(b, a).$$

f ist assoziativ, wenn für alle $a, b, c \in A$ gilt:

$$f(f(a, b), c) = f(a, f(b, c)).$$

"Vorrat" an Symbolen

Konstantensymbolen oder Konstanten: c_1,c_2,... $\qquad c, d$

für $n \geq 1$:

n-st. Funktionssymbole: f_1^n,f_2^n,... $\qquad f, g, h$

n-st. Relationsssymbole: R_1^n,R_2^n,... $\qquad R, P, Q$

Sei S eine Symbolmenge.

Eine S-Struktur ist ein Paar

$$\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{a})$$

bestehend aus

- einer nicht leeren Menge A, dem Träger, (Grundbereich, Universum von $\mathfrak{A}$;

- einer auf S definierten Abbildung $\mathfrak{a}$, die
  - für alle $n \geq 1$ jedem n-stelligen Relationssymbol $R \in S$ eine n-stellige Relation $\mathfrak{a}(R) \subseteq A^n$ zuordnet;
  - für alle $n \geq 1$ jedem n-stelligen Funktionssymbol $f \in S$ eine n-stellige Funktion $\mathfrak{a}(f) : A^n \to A$ zuordnet;
  - jedem Konstantensymbol $c \in S$ ein Element $\mathfrak{a}(c) \in A$ zuordnet.

Digraphen und Graphen. Sei $S = \{E\}$.

Digraphen "sind" S-Strukturen (G, E^G). G ist die Menge der Punkte und E^G die Menge der (gerichteten) Kanten.

Graphen "sind" S-Strukturen (G, E^G) mit symmetrischem und irreflexivem E^G.

Sei $\mathfrak{G} = (G, E^G)$ ein Digraph.

Eine Schleife ist eine Kante der Gestalt (a, a).

Der Digraph $\mathfrak{G}$ ist schleifenfrei, wenn er keine Schleifen enthält.

Ein Weg ist ein Tupel $(a_0, \ldots, a_m) \in G^{m+1}$ für ein $m \in \mathbb{N}$, so dass für $i = 1, \ldots, m$: $(a_{i-1}, a_i) \in E^G$. $(a_0, \ldots, a_m)$ ist dann ein Weg derLänge m von a_0 nach a_m.

Ein Pfad ist ein Weg, dessen Punkte paarweise verschieden sind.

Ein Zyklus ist ein Weg $(a_0, \ldots, a_m)$ mit $m \geq 1$ und $a_0 = a_m$.

Der Digraph $\mathfrak{G}$ ist azyklisch, wenn er keine Zyklen enthält.

Ein Kreis in einem Graphen ist ein Weg $(a_0, \ldots, a_m)$ der Länge $m \geq 3$ mit $a_m = a_0$ und $a_i \neq a_j$ für $1 \leq i < j \leq m - 1$.

Alphabet Σ_S der Sprache der ersten Stufe zur Symbolmenge S:

(a) Variable: v_1, v_2,. . . x, y, z

(b) Junktoren: $\neg$, $\wedge$, $\vee$

(c) Quantoren: $\forall$, $\exists$

(d) Gleichheitszeichen: $=$

(e) Hilfssymbole:), (, ,

(f) die Symbole in S.

Somit

$$\Sigma_S = \Sigma_0 \cup S,$$

wobei Σ_0 die Menge der in (a) bis (e) vorkommenden Symbole bezeichnet.

$$V := \{v_1, v_2, \ldots\}$$

ist die Menge der Variable.

Sei S eine Symbolmenge. S-Terme oder kurz Terme sind die Zeichenreihen über Σ_S, die im folgenden Kalkül ableitbar sind:

(T1) $\dfrac{}{x}$ (T2) $\dfrac{}{c}\ c \in S$ (T3) $\dfrac{t_1, \ldots, t_n}{f(t_1, \ldots, t_n)}\ f \in S$ n-st.

T^S = Menge der S-Terme.

Beispiel. Für $S = \{f_6^1, f_1^3, c_1, c_4\}$ ist

$$f_1^3(c_4, f_1^3(v_7, v_7, c_1), f_6^1(c_4))$$

ein S-Term.

Ableitung:

1	c_1	(T2)
2	c_4	(T2)
3	v_7	(T1)
4	$f_6^1(c_4)$	(T3) auf 2
5	$f_1^3(v_7, v_7, c_1)$	(T3) auf 3,3,1
6	$f_1^3(c_4, f_1^3(v_7, v_7, c_1), f_6^1(c_4))$	(T3) auf 2,5,4

Lemma. "An jeder Stelle in einem Term, an der kein Hilfssymbol steht, beginnt genau ein Term."

1. Für alle $t, t' \in T^S$:

$$t \text{ ist kein echtes Anfangsstück von } t'.$$

2. Seien $t \in T^S$, $1 \leq i \leq |t|$ und $t = uav$ mit $u, v \in \Sigma_S^*$, $a \in \Sigma_S$, $|w| = i - 1$ und $a \neq ($, $a \neq)$, $a \neq ,$. Dann gibt es genau ein $t' \in T^S$ mit

$$t = ut'v' \text{ für ein geeignetes } v' \in \Sigma_S^*.$$

Beweis. Zu (2): Sei $t \in T^S$, $1 \leq i \leq |t|$ und $t = uav$ wie oben.

Existenz von t': Induktion über den Termkalkül.

Eindeutigkeit von t': Wenn

$$t = ut'_1v'_1 \quad \text{und} \quad t = ut'_2v'_2 \quad \text{mit } t'_1 \neq t'_2,$$

so ist t'_1 ein echtes Anfangsstück von t'_2 oder t'_2 ein echtes Anfangsstück von t'_1, ein Widerspruch zu 1.

Eindeutige Zerlegbarkeit von Termen. Jeder S-Term ist entweder

1. eine Variable oder
2. eine Konstante in S oder
3. ein Term der Gestalt $f(t_1, \ldots, t_n)$ für ein n-stelliges $f \in S$ und $t_1, \ldots, t_n \in T^S$.

   Dabei sind f und $t_1, \ldots, t_n$ eindeutig bestimmt.

Sei $\mathfrak{A}$ eine S-Struktur. Eine Belegung β in $\mathfrak{A}$ (in A) ist eine Abbildung $\beta : V \to A$.

Eine S-Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ besteht aus einer S-Struktur $\mathfrak{A}$ und einer Belegung β in $\mathfrak{A}$.

Definition. Sei $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ eine S-Interpretation. Induktiv über den Aufbau der S-Terme definiert man den Wert $\mathfrak{I}(t)$ des Terms t bei $\mathfrak{I}$. Dabei ist $\mathfrak{I} \in A$.

$\mathfrak{I}(x) := \beta(x)$;

$\mathfrak{I}(c) := c^{\mathfrak{A}}$;

$\mathfrak{I}(f(t_1, \ldots, t_n)) := f^{\mathfrak{A}}(\mathfrak{I}(t_1), \ldots, \mathfrak{I}(t_n))$.

S-Ausdrücke oder S-Formeln der Sprache der ersten Stufe sind die Zeichenreihen über Σ_S^*, die man im folgenden Kalkül herleiten kann:

(A1) $\dfrac{}{t_1 = t_2}$ $\qquad t_1, t_2 \in T^S$

(A2) $\dfrac{}{Rt_1 \ldots t_r}$ $\qquad R \in S$ r-stellig$, t_1, \ldots, t_r \in T^S$

(A3) $\dfrac{\varphi}{\neg\varphi}$

(A4) $\dfrac{\varphi, \psi}{(\varphi \wedge \psi)}$

(A5) $\dfrac{\varphi, \psi}{(\varphi \vee \psi)}$

(A6) $\dfrac{\varphi}{\forall x \varphi}$

(A7) $\dfrac{\varphi}{\exists x \varphi}$

L^S Menge der S-Ausdrücke.

Beispiel. Für $S := \{\underset{2}{E}\}$ ist $\forall v_1 \exists v_5 E v_1 v_5$ ein S-Ausdruck.

1	Ev_1v_5	(A2)
2	$\exists v_5 E v_1 v_5$	(A7) auf 1
3	$\forall v_1 \exists v_5 E v_1 v_5$	(A6) auf 2

Eindeutige Zerlegbarkeit von Ausdücken. Jeder S-Ausdruck ist entweder ein Ausdruck der Gestalt

(1)	$t_1 = t_2$	oder	(2)	$Rt_1 \dots t_r$	oder
(3)	$\neg\varphi$	oder	(4)	$(\varphi \wedge \psi)$	oder
(5)	$(\varphi \vee \psi)$	oder	(6)	$\forall x\varphi$	oder
(7)	$\exists x\varphi$				

Dabei sind eindeutig bestimmt

$t_1, t_2 \in T^S$ in (1),

$R \in S$ und $t_1, \dots, t_r \in T^S$ in (2),

φ in (3),

φ und ψ in (4), (5),

x und φ in (6) und (7).

Ausdrücke der Gestalt (1) oder der Gestalt (2) sind

atomare S-Ausdrücke.

Für $t \in T^S$ oder $\varphi \in L^S$ sei var(t) bzw. var(φ) die Menge der in t bzw. φ vorkommenden Variablen.

Die Menge fr(φ) der in φ frei vorkommenden Variablen wird durch Induktion über dem Ausdruckskalkül definiert:

$$\text{fr}(\varphi) = \text{var}(\varphi), \text{ falls } \varphi \text{ atomar}$$

$$\text{fr}(\neg\varphi) = \text{fr}(\varphi)$$

$$\text{fr}((\varphi \wedge \psi)) = \text{fr}(\varphi) \cup \text{fr}(\psi)$$

$$\text{fr}((\varphi \vee \psi)) = \text{fr}(\varphi) \cup \text{fr}(\psi)$$

$$\text{fr}(\forall x\varphi) = \text{fr}(\varphi) \setminus \{x\}$$

$$\text{fr}(\exists x\varphi) = \text{fr}(\varphi) \setminus \{x\}$$

$$\begin{aligned}
&\text{fr}((\exists uRxu \wedge \exists y\forall x(Ryx \vee Ryu)))\\
&\quad= \text{fr}(\exists uRxu) \cup \text{fr}(\exists y\forall x(Ryx \vee Ryu))\\
&\quad= (\text{fr}(Rxu) \setminus \{u\}) \cup (\text{fr}(\forall x(Ryx \vee Ryu)) \setminus \{y\})\\
&\quad= (\{x,u\} \setminus \{u\}) \cup (\text{fr}((Ryx \vee Ryu)) \setminus \{y,x\})\\
&\quad= \{x\} \cup ((\text{fr}(Ryx) \cup \text{fr}(Ryu)) \setminus \{y,x\})\\
&\quad= \{x\} \cup ((\{y,x\} \cup \{y,u\}) \setminus \{y,x\})\\
&\quad= \{x\} \cup \{u\})\\
&\quad= \{x,u\}.
\end{aligned}$$

S-Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$, $x_1, \ldots, x_m$ paarweise verschiedene Variable, $a_1, \ldots, a_m \in A$

$$\mathfrak{I}\frac{a_1 \ldots a_m}{x_1 \ldots x_m} := (\mathfrak{A}, \beta\frac{a_1 \ldots a_m}{x_1 \ldots x_m}),$$

wobei $\beta\frac{a_1 \ldots a_m}{x_1 \ldots x_m}$ die Belegung in $\mathfrak{A}$ ist mit

$$\beta\frac{a_1 \ldots a_m}{x_1 \ldots x_m}(y) := \begin{cases} a_i & y = x_i \\ \beta(y) & y \neq x_1, \ldots, y \neq x_m \end{cases}$$

$S = \{\underset{2}{g}\}$, $\quad \mathfrak{R} = (\mathbb{R}, \cdot)$, $\quad \mathfrak{I} = (\mathfrak{R}, \beta)$ mit $\beta = \begin{cases} n & n \text{ ungerade} \\ -n & \text{sonst} \end{cases}$

$$\begin{aligned} & \mathfrak{I} \models \neg\exists v_1 g(v_1, v_1) = v_2 \\ \iff \quad & \text{nicht } \mathfrak{I} \models \exists v_1 g(v_1, v_2) = v_2 \\ \iff \quad & \text{nicht ex. } r \in \mathbb{R} : \ \mathfrak{I}\frac{r}{v_1} \models g(v_1, v_1) = v_2 \\ \iff \quad & \text{nicht ex. } r \in \mathbb{R} : \ \mathfrak{I}\frac{r}{v_1}(g(v_1, v_1)) = \mathfrak{I}\frac{r}{v_1}(v_2) \\ \iff \quad & \text{nicht ex. } r \in \mathbb{R} : \ r \cdot r = -2. \end{aligned}$$

Somit $\mathfrak{I} \models \neg\exists v_1 g(v_1, v_1) = v_2$.

Entsprechend: $\mathfrak{I} \models \neg\exists v_{116} g(v_{116}, v_{116}) = v_2$.

Dagegen: $\mathfrak{I} \not\models \neg\exists v_1 g(v_1, v_1) = v_3$, da
$\mathfrak{I} \models \exists v_1 g(v_1, v_1) = v_3$.

$\Phi \in L^S$, $\varphi, \psi \in L^S$

1. $\mathfrak{I}$ S-Interpretation

   $\mathfrak{I}$ Modell von Φ, $\mathfrak{I} \models \Phi$, gdw für alle $\chi \in \Phi : \mathfrak{I} \models \chi$.

2. ψ folgt aus Φ, $\Phi \models \psi$, gdw

   für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$: wenn $\mathfrak{I} \models \Phi$, so $\mathfrak{I} \models \psi$.

   $\Phi = \{\varphi\}$ dann auch $\varphi \models \psi$ statt $\Phi \models \psi$.

3. φ ist erfüllbar, Erf φ, gdw es gibt eine Interpretation, die φ erfüllt.

   Φ ist erfüllbar, Erf Φ, gdw es gibt eine Interpretation, die Φ erfüllt.

4. φ ist allgemeingültig, $\models \varphi$, gdw $\emptyset \models \varphi$

   gdw für alle $\mathfrak{I}$: $\mathfrak{I} \models \varphi$.

5. φ und ψ logisch äquivalent, $\varphi \equiv \psi$, gdw $\models \varphi \leftrightarrow \psi$

   gdw für alle $\mathfrak{I}$: ($\mathfrak{I} \models \varphi$ gdw $\mathfrak{I} \models \psi$).

Koinzidenzlemma. S, S_1, S_2 Symbolmengen, $S \subseteq S_1 \cap S_2$.

Für $j = 1, 2$ sei $\mathfrak{I}_j := (\mathfrak{A}_j, \beta_j)$ eine S_j-Interpretation.

Gelte $\mathfrak{A}_1 \upharpoonright S = \mathfrak{A}_2 \upharpoonright S$ (d.h. $A_1 = A_2$ und $k^{\mathfrak{A}_1} = k^{\mathfrak{A}_2}$ für $k \in S$).

Dann

1. Für $t \in T^S$:

   wenn $\beta_1 \upharpoonright \mathrm{var}(t) = \beta_2 \upharpoonright \mathrm{var}(t)$, so $\mathfrak{I}_1(t) = \mathfrak{I}_2(t)$.

2. Für $\varphi \in L^S$:

   wenn $\beta_1 \upharpoonright \mathrm{fr}(\varphi) = \beta_2 \upharpoonright \mathrm{fr}(\varphi)$, so ($\mathfrak{I}_1 \models \varphi$ gdw $\mathfrak{I}_2 \models \varphi$).

Beweis. zu 2): $\varphi := Rt_1 \ldots t_r$:

$$\begin{array}{lcll}
\mathfrak{I}_1 \models Rt_1 \ldots t_r & \iff & R^{\mathfrak{A}_1}\mathfrak{I}_1(t_1) \ldots \mathfrak{I}_1(t_r) & \\
& \iff & R^{\mathfrak{A}_1}\mathfrak{I}_2(t_1) \ldots \mathfrak{I}_2(t_r) & \text{(wegen 1)} \\
& \iff & R^{\mathfrak{A}_2}\mathfrak{I}_2(t_1) \ldots \mathfrak{I}_2(t_r) & \text{(wegen } R^{\mathfrak{A}_1} = R^{\mathfrak{A}_2}\text{)} \\
& \iff & \mathfrak{I}_2 \models Rt_1 \ldots t_r. &
\end{array}$$

$S = \{\underset{2}{R}\}$; $x := v_1$, $y := v_2$, $z := v_3$.

R reflexiv:

$$\varphi_{\text{refl}} := \forall x Rxx$$

R irreflexiv:

$$\varphi_{\text{irrefl}} := \forall x \neg Rxx$$

R symmetrisch:

$$\varphi_{\text{symm}} := \forall x \forall y (Rxy \to Ryx)$$

R antisymmetrisch:

$$\varphi_{\text{antisymm}} := \forall x \forall y (Rxy \to \neg Ryx)$$

R konnex:

$$\varphi_{\text{konnex}} := \forall x \forall y (Rxy \vee x = y \vee Ryx)$$

R transitiv:

$$\varphi_{\text{transitiv}} := \forall x \forall y \forall z ((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz)$$

Die Modelle von

$$\Phi_{\text{pOrd}} := \{\varphi_{\text{refl}}, \varphi_{\text{antisymm}}, \varphi_{\text{transitiv}}\}$$

sind die partiellen Ordnungen.

Die Modelle von

$$\Phi_{\text{Ord}} := \{\varphi_{\text{refl}}, \varphi_{\text{antisymm}}, \varphi_{\text{transitiv}}, \varphi_{\text{konnex}}\}$$

sind die Ordnungen.

Die Modelle von

$$\Phi_{\text{Äqui}} := \{\varphi_{\text{refl}}, \varphi_{\text{symm}}, \varphi_{\text{transitiv}}\}$$

sind die Äquivalenzstrukturen (Äquivalenzrelationen).

$S = \{\underset{2}{E}\}$

Die Modelle von

$$\Phi_{\text{Graph}} := \{\varphi_{\text{symm}}, \varphi_{\text{irrefl}}\} \qquad !$$

sind die Graphen.

Die Modelle von

$$\Phi_{\text{Digraph}} := \emptyset$$

sind die Digraphen.

Die Modelle von

$$\Phi_{\text{Digraph}} \cup \{\forall x \neg Exx\}$$

sind die schleifenlosen Digraphen.

$S = \{+, \cdot, 0, 1\}$

Die Modelle von

$$\Phi_{\text{Kp}}: \quad \begin{array}{ll} \forall x \forall y \forall z (x + y) + z = x + (y + z) & \forall x\, x + 0 = x \\ \forall x \forall y \forall z (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) & \forall x\, x \cdot 1 = x \\ \forall x \exists y\, x + y = 0 & \forall x (\neg x = 0 \rightarrow \exists y\, x \cdot y = 1) \\ \forall x \forall y\, x + y = y + x & \forall x \forall y\, x \cdot y = y \cdot x \\ \neg 0 = 1 \quad \forall x \forall y \forall z\, x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) & \end{array}$$

sind die Körper.

K Klasse endlicher Strukturen, $\Phi \subseteq L^S$. Das Model-Checking Problem:

MC(K,Φ)	*Input:*	Struktur $\mathfrak{A} \in K$, Satz $\psi \in \Phi$
	Frage:	$\mathfrak{A} \models \psi$?

$$\mathfrak{D} \models \exists x \underbrace{(\underline{K}x \wedge \exists y(\underline{F}y \wedge Lxy \wedge Acy))}_{\varphi}$$

Das Auswertungsproblem:

AUS(K,Φ)	*Input:*	Struktur $\mathfrak{A} \in S$, $n \geq 1$, $\psi \in \Phi \cap L_n^S$
	Problem:	Berechne $\{(a_1, \ldots, a_n) \mid \mathfrak{A} \models \psi[a_1, \ldots, a_n]\}$.

$$\{k \mid \mathfrak{D} \models \varphi[k]\}$$

Bemerkung. Sei $S = \emptyset$ und $\mathfrak{A}$ eine S-Struktur mit mindestens 2 Elementen. Für $n \geq 1$ sei $x_n := v_{2\cdot n-1}$ und $y_n := v_{2\cdot n}$. Die Abbildung * : QAA $\to L^S$ sei induktiv wie folgt definiert:

$$\begin{array}{lcl} X_i^* & := & x_i = y_i \\ \neg\alpha\ ^* & := & \neg\ \alpha^* \\ (\alpha \wedge \beta)^* & := & (\alpha^* \vee \beta^*) \\ (\alpha \vee \beta)^* & := & (\alpha^* \vee \beta^*) \\ \exists X_i \alpha\ ^* & := & \exists x_i \exists y_i \alpha^* \\ \forall X_i \alpha\ ^* & := & \forall x_i \forall y_i \alpha^* \end{array}$$

Dann gilt für jeden Satz $\alpha \in$ QAA:

$$\alpha \text{ ist allgemeingültig} \iff \mathfrak{A} \models \alpha^*.$$

Somit

$$\text{QBSAT} \leq_{\text{pol}} \text{MC}(\mathfrak{A}, L^S) \ (:= \text{MC}(\{\mathfrak{A}\}, L^S)).$$

Da QBSAT PSPACE-hart ist, erhalten wir:

Folgerung. Für jedes S und jede Klasse K von S-Strukturen, die eine Struktur mit mindestens zwei Elementen enthält, ist MC(K,L^S) PSPACE-hart.

Ist ESTR(S) die Klasse aller endlichen S-Strukturen, so gilt sogar:

MC(ESTR,L^S) ist PSPACE-vollständig.

Die Breite br(φ) eines Ausdrucks φ ist definiert durch:

$$\text{br}(\varphi) := \max\{|\text{fr}(\psi)| \mid \psi \text{ Subformel von } \varphi\}.$$

Satz. Es gibt ein $c \in \mathbb{N}$ und einen Algorithmus, der für jede endliche Struktur $\mathfrak{A}$ und jeden Satz φ entscheidet, ob

$$\mathfrak{A} \models \varphi$$

in Zeit $\leq c \cdot |\varphi| \cdot ||\mathfrak{A}||^{\text{br}(\varphi)+1}$.

Folgerung. Für jeden Satz φ gibt es ein polynomielles Verfahren, das entscheidet, ob

$$\mathfrak{A} \models \varphi.$$

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ S-Strukturen

1. (a) $\pi : A \to B$, π ist Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach (auf) $\mathfrak{B}$, $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, wenn

   (1) π ist bijektiv;

   (2) Für jedes $R \in S, R$ r-stellig, $a_1, \ldots, a_r \in A$:

   $$R^{\mathfrak{A}} a_1 \ldots a_r \iff R^{\mathfrak{B}} \pi(a_1) \ldots \pi(a_r);$$

   (3) Für jedes $f \in S, f$ r-stellig, $a_1, \ldots, a_r \in A$:

   $$\pi(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_r)) = f^{\mathfrak{B}}(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_r));$$

   (4) Für $c \in S$:

   $$\pi(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}.$$

   (b) $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind isomorph, $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, gdw. ex. π mit $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

2. $\pi : A \to B$, π ist starker Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ gdw π erfüllt (2), (3) und (4).

3. $\pi : A \to B$, π Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ gdw π erfüllt (3), (4) und

   (2') für $R \in S, R$ r-stellig, $a_1, \ldots, a_r \in A$,

   wenn $R^{\mathfrak{A}} a_1 \ldots a_r$, so $R^{\mathfrak{B}} \pi(a_1) \ldots \pi(a_r)$.

Schreibweisen: $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ Isomorphismus (starker Homomorphismus, Homomorphismus).

Sei S relational. Ein Ausdruck $\varphi \in L_m^S$ der Gestalt

$$\varphi = (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_s) \tag{1}$$

mit atomaren $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ ohne $=$ heißt conjunctive query (konjunktive Anfrage).

Ist φ wie eben in L_m^S, so sei $\mathfrak{A}_\varphi$ die (!) S-Struktur mit

$$\begin{array}{rcl} A_\varphi & := & \{v_1, \ldots, v_m\} \\ R^{\mathfrak{A}_\varphi} y_1 \ldots y_r & \iff & \text{es gibt } i \text{ mit } \varphi_i = R y_1 \ldots y_r \end{array}$$

Dann $\mathfrak{A}_\varphi \models \varphi[v_1, \ldots, v_m]$ und somit $\mathfrak{A}_\varphi \models \exists v_1 \ldots \exists v_m \varphi$.

Bemerkung 1. Sei $1 \leq \ell \leq m$. Ist $\mathfrak{B}$ eine S-Struktur und $b_1, \ldots, b_\ell \in B$, so sind äquivalent:

1. $\mathfrak{B} \models \exists v_{\ell+1} \ldots \exists v_m \varphi[b_1, \ldots, b_\ell]$;
2. ex. $\pi : \mathfrak{A}_\varphi \to \mathfrak{B}$ Hom. mit $\pi(v_1) = b_1, \ldots, \pi(v_\ell) = b_\ell$.

Beweis: Gelte $\mathfrak{B} \models \exists v_{\ell+1} \ldots \exists v_m \varphi[b_1, \ldots, b_\ell]$, etwa

$$\mathfrak{B} \models (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_s)[b_1, \ldots, b_m].$$

Definiere $\pi : A_\varphi \to B$ durch $\pi(v_i) := b_i$ für $i = 1, \ldots, m$.

Wenn $R^{\mathfrak{A}_\varphi} v_{i_1} \ldots v_{i_r}$, so ex. j mit $\varphi_j = R v_{i_1} \ldots v_{i_r}$. Somit $\mathfrak{B} \models R v_{i_1} \ldots v_{i_r}[b_1, \ldots, b_m]$, d.h. $R^{\mathfrak{B}} b_{i_1} \ldots b_{i_r}$.

Sei umgekehrt $\pi : \mathfrak{A}_\varphi \to \mathfrak{B}$ ein Homomorphismus mit $\pi(v_1) = b_1, \ldots, \pi(v_\ell) = b_\ell$. Sei $b_i := \pi(v_i)$ für $i = \ell + 1, \ldots, m$. Da

$$\mathfrak{A}_\varphi \models (\varphi_1 \wedge \ldots \varphi_s)[v_1, \ldots, v_m],$$

gilt nach Homomorphielemma (s.u.)

$$\mathfrak{B} \models (\varphi_1 \wedge \ldots \varphi_s)[\pi(v_1), \ldots, \pi(v_m)]$$

und damit $\mathfrak{B} \models \exists v_{\ell+1} \ldots \exists v_m \varphi[b_1, \ldots, b_\ell]$.

Folgerung. Für konjunktive Anfrage $\varphi, \psi \in L^S$ sind äquivalent:

1. $\models (\varphi \rightarrow \psi)$;

2. für alle S-Strukturen $\mathfrak{A}$: $\varphi^{\mathfrak{A}} \subseteq \psi^{\mathfrak{A}}$;

3. $\mathfrak{A}_\varphi \models \psi[v_1, \ldots, v_m]$;

4. id : $A_\psi \rightarrow A_\varphi$ ist Homom. von $\mathfrak{A}_\psi$ auf $\mathfrak{A}_\varphi$.

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2): klar; (2) $\Rightarrow$ (3) wegen $\mathfrak{A}_\varphi \models \varphi[v_1, \ldots, v_m]$.
(3) $\Rightarrow$ (4) wegen Bemerkung 1.

Isomorphie- und Homomorphielemma. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ S-Str

1. Wenn $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, so für alle $\varphi \in L_0^S$:
$$\mathfrak{A} \models \varphi \iff \mathfrak{B} \models \varphi.$$
2. Ist $\mathfrak{B}$ ein starkes homomorphes Bild von $\mathfrak{A}$, d.h. ex. ein starker Homom. von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{B}$, so gilt für alle gleichheitsfreien $\varphi \in L_0^S$:
$$\mathfrak{A} \models \varphi \iff \mathfrak{B} \models \varphi.$$
3. Ist $\mathfrak{B}$ ein homom. Bild von $\mathfrak{A}$, d.h. ex. ein Homom. von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{B}$, so gilt für alle $\varphi \in L_0^S$ ohne $\neg$:
$$\text{wenn } \mathfrak{A} \models \varphi, \text{ so } \mathfrak{B} \models \varphi.$$

Beweis: Sei $\pi : A \to B$ die entsprechende Abbildung. Dann zeigen wir:

(i) Für alle $n \geq 1$, $a_1, \dots, a_n \in A$, $t \in T_n^S$:
$$\pi(t^{\mathfrak{A}}[a_1, \dots, a_n]) = t^{\mathfrak{B}}[\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)].$$

(ii) Ist π ein Isomorphismus, so für alle $n \geq 1$, $a_1, \dots, a_n \in A$, $\varphi \in L_n^S$:
$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \iff \mathfrak{B} \models \varphi[\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)].$$

(iii) Ist π ein starker Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{B}$, so für alle $n \geq 1$, $a_1, \dots, a_n \in A$, $\varphi \in L^S$ ohne $=$:
$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \iff \mathfrak{B} \models \varphi[\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)].$$

(iv) Ist π ein Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{B}$, so für alle $n \geq 1$, $a_1, \dots, a_n \in A$, $\varphi \in L^S$ ohne $\neg$:
$$\text{wenn } \mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n], \text{ so } \mathfrak{B} \models \varphi[\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)].$$

Zu (i): Induktion über t:

$t = v_j$: $\pi(v_j^{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots, a_n]) = \pi(a_j) = v_j^{\mathfrak{B}}[\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)]$.

$t = f(t_1, \ldots, t_r)$: $\qquad \pi(f(t_1, \ldots, t_r)^{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots, a_n])$
$= \pi(f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots, a_n], \ldots, t_r^{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots, a_n]))$
$= f^{\mathfrak{B}}(\pi(t_1^{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots, a_n]), \ldots, \pi(t_r^{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots, a_n]))$ (f Homom.)
$= f^{\mathfrak{B}}(t_1^{\mathfrak{B}}[\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)], \ldots, t_r^{\mathfrak{B}}[\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)])$ (Ind.Vor.)
$= f(t_1, \ldots, t_r)^{\mathfrak{B}}[\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)]$.

Zu (ii), (iii), (iv): $t_1 = t_2$:

$$\begin{array}{cl}
 & \mathfrak{A} \models t_1 = t_2[a_1, \ldots, a_n] \\
\Longleftrightarrow & t_1^{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots, a_n] = t_2^{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots, a_n] \\
* & \pi(t_1^{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots, a_n]) = \pi(t_2^{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots, a_n]) \\
 & \qquad (* = \Longleftrightarrow \text{ wenn } \pi \text{ inj.; } * = \Downarrow \text{ sonst}) \\
\Longleftrightarrow & t_1^{\mathfrak{B}}[\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)] = t_2^{\mathfrak{B}}[\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)] \quad \text{(wegen (i))} \\
\Longleftrightarrow & \mathfrak{B} \models t_1 = t_2[\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)].
\end{array}$$

$Rt_1 \ldots t_r$:

$$\begin{array}{cl}
 & \mathfrak{A} \models Rt_1 \ldots t_r[a_1, \ldots, a_n] \\
\Longleftrightarrow & R^{\mathfrak{A}} t_1^{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots, a_n] \ldots t_r^{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots, a_n] \\
* & R^{\mathfrak{B}} \pi(t_1^{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots, a_n]) \ldots \pi(t_r^{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots, a_n]) \\
 & (* = \Longleftrightarrow \text{, wenn } \pi \text{ starker Hom.; } * = \Downarrow\text{, wenn } \pi \text{ Hom.)} \\
\Longleftrightarrow & R^{\mathfrak{B}} t_1^{\mathfrak{B}}[\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)] \ldots t_r^{\mathfrak{B}}[\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)] \text{ (weg. (i))} \\
\Longleftrightarrow & \mathfrak{B} \models Rt_1 \ldots t_r[\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)].
\end{array}$$

Sei $\varphi \in L_n^S$ und $\varphi = \exists x \psi$. O.B.d.A. (s.u.) $x = v_{n+1}$, also $\psi = \psi(v_1, \ldots, v_{n+1})$.

$$\begin{array}{ll} & \mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \\ \Longleftrightarrow & \text{ex. } a \in A\text{: } \mathfrak{A} \models \psi[a_1, \ldots, a_n, a] \\ * & \text{ex. } a \in A\text{: } \mathfrak{B} \models \psi[\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n), \pi(a)] \text{ (Ind.vor.)} \\ \Longleftrightarrow & \text{ex. } b \in B\text{: } \mathfrak{B} \models \psi[\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n), b] \quad \text{(da } \pi \text{ surjektiv)} \\ \Longleftrightarrow & \mathfrak{B} \models \varphi[\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)]. \end{array}$$

Bemerkung. Sei $\mathfrak{B}$ eine S-Struktur und $A_0 \supseteq B$. Dann existiert eine S-Struktur $\mathfrak{A}$ mit

$A = A_0$ und $\mathfrak{B}$ ist ein starkes homom. Bild von $\mathfrak{A}$.

Beweis: Sei $b_0 \in B$ beliebig. Definiere $\pi : A_0 \to B$ durch

$$\pi(a) := \begin{cases} a & \text{für } a \in B \\ b_0 & \text{für } a \in A_0 \setminus B \end{cases}$$

Definiere S-Struktur $\mathfrak{A}$ mit $A = A_0$ so, dass $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ starker, surjektiver Homom., d.h. durch die folgenden Festlegungen

$$\begin{array}{rcl} R^{\mathfrak{A}} a_1 \dots a_r & \iff & R^{\mathfrak{B}} \pi(a_1) \dots \pi(a_r) \\ f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_r) & := & f^{\mathfrak{B}}(\pi(a_1), \dots, \pi(a_r)) \\ c^{\mathfrak{A}} & := & c^{\mathfrak{B}}. \end{array}$$

Dann ist etwa

$$\begin{array}{rcl} \pi(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_r)) & = & \pi(f^{\mathfrak{B}}(\pi(a_1), \dots, \pi(a_r))) \text{ (Def. von } f^{\mathfrak{A}}) \\ & = & f^{\mathfrak{B}}(\pi(a_1), \dots, \pi(a_r)) \text{ (Def. von } \pi). \end{array}$$

Folgerung. Sei $\Phi \subseteq L_0^S$ ohne $=$ und $m \geq 1$. Hat Φ ein Modell, dessen Träger genau m Elemente hat, so hat Φ auch ein Modell mit genau $m+1$ Elementen (genauer: in jeder Mächtigkeit $\geq m$ hat Φ ein Modell).

Φ_{BA}:

$\forall x \forall y \; x \sqcap y = y \sqcap x$	$\sqcap$ kommutat.
$\forall x \forall y \forall z \; (x \sqcap y) \sqcap z = x \sqcap (y \sqcap z)$	$\sqcap$ assoziat.
$\forall x \forall y \; x \sqcup y = y \sqcup x$	$\sqcup$ kommutat.
$\forall x \forall y \forall z \; (x \sqcup y) \sqcup z = x \cup (y \sqcup z)$	$\sqcup$ assoziat.
$\forall x \forall y \forall z \; x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$	distributiv
$\forall x \forall y \forall z \; x \sqcup (y \sqcap z) = (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$	distributiv
$\forall x \forall y \; (x \sqcup y) \sqcap y = y$	Absorption
$\forall x \forall y \; (x \sqcap y) \sqcup y = y$	Absorption
$\forall x \; x \sqcap 1 = x$	1 neutral bei $\sqcap$
$\forall x \; x \sqcup 0 = x$	0 neutral bei $\sqcup$
$\forall x \forall y \; x \sqcap \sim x = 0$	Komplementgesetz
$\forall x \forall y \; x \sqcup \sim x = 1$	Komplementgesetz.

Ψ_E:

$\forall x Exx$, $\forall x \forall y (Exy \rightarrow Eyx)$, $\forall x \forall y \forall z ((Exy \wedge Eyz) \rightarrow Eyz)$

$\forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2 ((Ex_1y_1 \wedge Ex_2y_2) \rightarrow E(x_1 \sqcap x_2)\,(y_1 \sqcap y_2))$

$\forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2 ((Ex_1y_1 \wedge Ex_2y_2) \rightarrow E(x_1 \sqcup x_2)\,(y_1 \sqcup y_2))$

$\forall x \forall y (Exy \rightarrow E \sim x \sim y)$

Sind

$$(\forall x \exists y (Exy \vee Eyx) \wedge (\exists y (Exy \vee Eyx) \vee Eyz))$$

und

$$(\forall x \neg \forall y \neg (Exy \vee Eyx) \wedge (\exists y (Exy \vee Eyx) \vee Eyz))$$

logisch äquivalent?

Ersetzungslemma. (Intuitiv: Ersetzt man in φ einen Teilausdruck ψ durch einen zu ψ logisch äquivalenten Ausdruck, so erhält man einen zu φ logisch äquivalenten Ausdruck.)

Gelte $\varphi_1 \equiv \psi_1$ und $\varphi_2 \equiv \psi_2$; dann

$\neg\varphi_1 \equiv \neg\psi_1$,

$(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \equiv (\psi_1 \wedge \psi_2)$, $\quad (\varphi_1 \vee \varphi_2) \equiv (\psi_1 \vee \psi_2)$,

$\forall x \varphi_1 \equiv \forall x \psi_1$, $\quad \exists x \varphi_1 \equiv \exists x \psi_1$

Für eine totale Belegung b sei b_{sub} die Belegung

$$b_{\mathsf{sub}}(X) := \begin{cases} b(\gamma_i) & \text{falls } X = Y_i \text{ und } i \in \{1, \ldots, n\} \\ b(X) & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir zeigen:

$$\text{für alle } \delta \in \mathsf{AA}: \quad b(\delta \frac{\gamma_1 \ldots \gamma_n}{Y_1 \ldots Y_n}) = b_{\mathsf{sub}}(\delta). \tag{2}$$

S-Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$, $x_1, \ldots, x_m$ paarweise verschiedene Variable, $a_1, \ldots, a_m \in A$

$$\mathfrak{I}\frac{a_1 \ldots a_m}{x_1 \ldots x_m} := (\mathfrak{A}, \beta\frac{a_1 \ldots a_m}{x_1 \ldots x_m}),$$

wobei $\beta\frac{a_1 \ldots a_m}{x_1 \ldots x_m}$ die Belegung in $\mathfrak{A}$ ist mit

$$\beta\frac{a_1 \ldots a_m}{x_1 \ldots x_m}(y) := \begin{cases} a_i & y = x_i \\ \beta(y) & y \neq x_1, \ldots, y \neq x_m \end{cases}$$

also für Terme $t_1, \ldots, t_m$:

$$\mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_1) \ldots \mathfrak{I}(t_m)}{x_1 \ldots x_m}(y) = \begin{cases} \mathfrak{I}(t_i) & y = x_i \\ \mathfrak{I}(y) & y \neq x_1, \ldots, y \neq x_m \end{cases}$$

Eine Abbildung $\sigma : V \to T^S$ ist eine Substitution, wenn $\{x \mid \sigma(x) \neq x\}$ endlich ist. Ist dann $\{x \mid \sigma(x) \neq x\} \subseteq \{x_1, \ldots, x_m\}$ mit paarweise verschiedenen x_i und ist $\sigma(x_1) = t_1, \ldots, \sigma(x_m) = t_m$, so schreiben wir für σ auch

$$\frac{t_1 \ldots t_m}{x_1 \ldots x_m}.$$

Ist $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ eine S-Interpretation und σ eine Substitution, so sei $\mathfrak{I}^\sigma := (\mathfrak{A}, \mathfrak{I} \circ \sigma)$.

Somit:

Ist $\sigma(x) = t$, so $\mathfrak{I}^\sigma(x) = \mathfrak{I} \circ \sigma(x) = \mathfrak{I}(t)$.

Ist $\sigma(x) = x$, so $\mathfrak{I}^\sigma(x) = \mathfrak{I} \circ \sigma(x) = \mathfrak{I}(x)$.

Ist daher $\sigma = \dfrac{t_1 \ldots t_m}{x_1 \ldots x_m}$, so $\mathfrak{I}^\sigma = \mathfrak{I}\dfrac{\mathfrak{I}(t_1) \ldots \mathfrak{I}(t_m)}{x_1 \ldots x_m}$

Substitutionslemma. Für jede Substitution $\sigma : V \to T^S$, jeden Term $t \in T^S$ und jeden Ausdruck $\varphi \in L^S$ definieren wir

$$t^\sigma \quad \text{und} \quad \varphi^\sigma,$$

sodass für alle S-Interpretationen $\mathfrak{I}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{I}(t^\sigma) & = & \mathfrak{I}^\sigma(t) \\ \mathfrak{I} \models \varphi^\sigma & \iff & \mathfrak{I}^\sigma \models \varphi; \end{array}$$

also

$$\mathfrak{I}(t\frac{t_1 \ldots t_m}{x_1 \ldots x_m}) \quad = \quad \mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_1) \ldots \mathfrak{I}(t_m)}{x_1 \ldots x_m}(t)$$

$$\mathfrak{I} \models \varphi\frac{t_1 \ldots t_m}{x_1 \ldots x_m} \quad \iff \quad \mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_1) \ldots \mathfrak{I}(t_m)}{x_1 \ldots x_m} \models \varphi.$$

Weiterhin gilt:

$$\varphi\frac{x}{x} = \varphi.$$

Beweis:

$$\begin{array}{llll}
t = x : & t^\sigma & := & \sigma(x) \\
t = c : & t^\sigma & := & c \\
t = f(t_1, \ldots, t_n) : & t^\sigma & := & f(t_1^\sigma, \ldots, t_n^\sigma) \\
\varphi = t_1 = t_2 : & \varphi^\sigma & := & t_1^\sigma = t_2^\sigma \\
\varphi = Rt_1 \ldots t_n : & \varphi^\sigma & := & Rt_1^\sigma \ldots t_n^\sigma \\
\varphi = \neg\psi : & \varphi^\sigma & := & \neg\ \psi^\sigma \\
\varphi = (\psi \wedge \chi) : & \varphi^\sigma & := & (\psi^\sigma \wedge \chi^\sigma) \\
\varphi = (\psi \vee \chi) : & \varphi^\sigma & := & (\psi^\sigma \vee \chi^\sigma)
\end{array}$$

$$\varphi = \underset{\forall}{\exists} x\psi : \quad \varphi^\sigma \;:=\; \underset{\forall}{\exists} u \; \psi \frac{\sigma(y_1) \quad \ldots \quad \sigma(y_r) \quad u}{y_1 \quad \ldots \quad y_r \quad x}$$

Dabei sind $y_1, \ldots, y_r$ paarweise verschieden mit

$$\{y_1, \ldots, y_r\} \;:=\; \{y \mid y \in \mathrm{fr}(\underset{\forall}{\exists} x\psi) \text{ und } y \neq \sigma(y)\}$$

und

$$u := \begin{cases} x, & \text{falls } x \notin \mathrm{var}(\sigma(y_1) \cup \ldots \cup \sigma(y_r)) \\ \text{die erste Variable, die in } \\ \psi, \sigma(y_1), \ldots, \sigma(y_r) \\ \text{nicht vorkommt,} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bemerkungen. 1)

$$y \in \mathrm{fr}(\varphi\frac{t_1 \dots t_m}{x_1 \dots x_m}) \iff (y \in \mathrm{fr}(\varphi) \text{ und } \; y \neq x_1, \dots, y \neq x_m)$$
$$\text{oder ex. } i \text{ mit } (y \in \mathrm{var}(t_i) \text{ und } x_i \in \mathrm{fr}(\varphi).$$

2) (gebundene Umbenennung) Wenn $y \notin \mathrm{fr}(\exists x\varphi)$, so

$$\exists x\varphi \equiv \exists y\varphi\frac{y}{x}.$$

Beweis von 2: Wenn $y = x$, dann Beh. klar.

Sei $y \neq x$ und somit $y \notin \mathrm{fr}(\varphi)$.

Sei $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{I} \models \exists y \; \varphi\frac{y}{x} \\
\iff \quad & \text{ex. } a \in A: \;\; \mathfrak{I}\frac{a}{y} \models \varphi\frac{y}{x} \\
\iff \quad & \text{ex. } a \in A: \;\; (\mathfrak{I}\frac{a}{y})\frac{\mathfrak{I}\frac{a}{y}(y)}{x} \models \varphi \qquad \text{(Sub.lem.)} \\
\iff \quad & \text{ex. } a \in A: \;\; \mathfrak{I}\frac{a \;\, a}{y \;\, x} \models \varphi \qquad (\text{da } y \neq x) \\
\iff \quad & \text{ex. } a \in A: \;\; \mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi \qquad (\text{da } y \notin \mathrm{fr}(\varphi) \text{ und Koin.lem.}) \\
\iff \quad & \mathfrak{I} \models \exists x\varphi.
\end{aligned}$$

3) (endliche Quantoren) Sei y die erste Variable, die in $\{x, \varphi\}$ nicht vorkommt. Wir setzen

$$\exists^{\geq 2} x \varphi := \exists x \exists y (\varphi \wedge \varphi \frac{y}{x} \wedge \neg y = x).$$

Dann gilt für jede Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$:

$$\mathfrak{I} \models \exists^{\geq 2} x \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad |\{a \in A \mid \mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi\}| \geq 2.$$