1 Ehrenfeucht-Spiele

Definition 1.1 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ S-Strukturen, p Abbildung mit $\mathrm{df}(p) \subseteq A$, $\mathrm{bd}(p) \subseteq B$.
p ist ein *partieller Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$*, wenn

1. p ist injektiv;

2. p ist "homomorph", d.h.

   (a) für $P \in S$ n-stellig, $a_1, \dots, a_n \in \mathrm{df}(p)$:
   $$P^A a_1 \dots a_n \iff P^B p(a_1) \dots p(a_n);$$

   (b) für $f \in S$ n-stellig, $a, a_1, \dots, a_n \in \mathrm{df}(p)$:
   $$f^A(a_1 \dots a_n) = a \iff f^B(p(a_1) \dots p(a_n)) = p(a);$$

   (c) für $c \in S$ und $a \in \mathrm{df}(p)$:
   $$c^A = a \iff c^B = p(a).$$

$\mathrm{Part}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ sei die Menge der partiellen Isomorphismen von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$.

Im folgenden bezeichnen wir $a_1 \dots a_n$ oder manchmal auch $a_0 \dots a_{n-1}$ mit $\bar{a}$ oder $\overset{n}{a}$ und $p(a_1) \dots p(a_n)$ mit $p(\bar{a})$. Wir schreiben dann $\bar{a} \in A^n$ oder auch $\bar{a} \in A$.

Bemerkungen und Beispiele 1.2 *1) $p := \emptyset \in \mathrm{Part}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.*
2) Sei $p \in \mathrm{Part}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, $f \in S$ n-stellig, $a_1, \dots, a_n, f^A(\bar{a}) \in \mathrm{df}(p)$. Dann ist die Bedingung in 2(b) äquivalent zu
$$p(f^A(\bar{a})) = f^B(p(\bar{a})).$$
Entsprechend: Wenn $c^A \in \mathrm{df}(p)$, so ist die Bedingung in 2(c) äquivalent zu $p(c^A) = c^B$.

Somit: Ist $\mathrm{df}(p)$ der Träger einer Substruktur von $\mathcal{A}$, so
$$p : [\mathrm{df}(p)]^{\mathcal{A}} \cong [\mathrm{bd}(p)]^{\mathcal{B}}.$$
Etwas allgemeiner: Ist $t \in T_n^S$, $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathrm{df}(p)$ und $t'^{\mathcal{A}}[a_0 \dots a_{n-1}] \in \mathrm{df}(p)$ für jeden Teilterm t' von t, so
$$p(t^{\mathcal{A}}[a_0 \dots a_{n-1}]) = t^{\mathcal{B}}[p(a_0) \dots p(a_{n-1})].$$
3) Sei $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ S-Strukturen und $\overset{k}{a} \in A$, $\overset{k}{b} \in B$. Dann sind äquivalent:

(a) $\overset{k}{a} \mapsto \overset{k}{b} \in \mathrm{Part}(\mathcal{A},\mathcal{B})$;
(d.h. durch $p(a_i) = b_i$ für $i < k$ wird eine Abbildung p mit $p \in \mathrm{Part}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ definiert).

(b) Für alle $\psi \in \Delta_k^S$

$$\mathcal{A} \models \psi[\overset{k}{a}] \iff \mathcal{B} \models \psi[\overset{k}{b}],$$

wobei

$$\Delta_k^S := \{\psi \in L_k^S \mid \psi \text{ hat Gestalt } x = y, Rx_1 \dots x_r, fx_1 \dots x_n = y \text{ oder } c = y\}.$$

Beweis: Beachte für $i, j < k$ gilt

$$\begin{aligned} a_i = a_j &\iff \mathcal{A} \models v_i = v_j[\overset{k}{a}] \\ b_i = b_j &\iff \mathcal{B} \models v_i = v_j[\overset{k}{b}]. \end{aligned}$$

Dies zeigt unter der Voraussetzung (b), dass die Zuordnung in (a) wohldefiniert und injektiv ist; und unter der Voraussetzung (a), dass $\overset{k}{a} \mapsto \overset{k}{b}$ Formeln der Gestalt $x = y$ erhält. Die restlichen Behauptungen erhalten wir entsprechend aus den folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} R^A a_{i_1} \dots a_{i_r} &\iff \mathcal{A} \models Rv_{i_1} \dots v_{i_r}[\overset{k}{a}] \\ R^B b_{i_1} \dots b_{i_r} &\iff \mathcal{B} \models Rv_{i_1} \dots v_{i_r}[\overset{k}{b}] \\ f^A(a_{i_1} \dots a_{i_r}) = a_j &\iff \mathcal{A} \models fv_{i_1} \dots v_{i_r} = v_j[\overset{k}{a}] \\ f^B(b_{i_1} \dots b_{i_r}) = b_j &\iff \mathcal{B} \models fv_{i_1} \dots v_{i_r} = v_j[\overset{k}{b}] \\ c^A = a_j &\iff \mathcal{A} \models c = v_j[\overset{k}{a}] \\ c^B = b_j &\iff \mathcal{B} \models c = v_j[\overset{k}{b}]. \end{aligned}$$

4) Wenn $(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv (\mathcal{B}, \bar{b})$, so $\bar{a} \mapsto \bar{b} \in \mathrm{Part}(\mathcal{A},\mathcal{B})$.

Im folgenden seien
$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ S-Strukturen, $\bar{a} \in A^k$, $\bar{b} \in B^k$ und $m \in \mathbb{N}$.

Das *Ehrenfeucht-Spiel* $G_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$ wird von zwei Spielern, I und II, nach folgenden Regeln gespielt:

Jeder Spieler hat in einer Partie m Züge; gezogen wird abwechselnd, wobei Spieler I beginnt. In seinem i-ten Zug wählt I zunächst eine der beiden Strukturen und dann ein Element in ihr.

- Wählt I das Element r_i in $\mathcal{A}$, so muss II ein Element s_i in $\mathcal{B}$ wählen;
- Wählt I das Element s_i in $\mathcal{B}$, so muss II ein Element r_i in $\mathcal{A}$ wählen.

Nach m Zügen sind also Elemente $\bar{r} = r_1 \dots r_m$ in $\mathcal{A}$ und Elemente $\bar{s} = s_1 \dots s_m$ in $\mathcal{B}$ gewählt worden. Spieler II *gewinnt* die Partie, wenn $\bar{a}\bar{r} \mapsto \bar{b}\bar{s} \in \mathrm{Part}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Spieler II hat eine *Gewinnstrategie* für $G_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$, kurz: II gew. $G_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$, wenn es für ihn die Möglichkeit gibt, in jeder Partie so zu spielen, dass er gewinnt.

$G_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ bezeichne $G_m(\mathcal{A}, \emptyset, \mathcal{B}, \emptyset)$.

Bemerkung 1.3 *1) Wenn $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, so* II *gew. $G_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.*

2) Wenn II *gew. $G_{m+1}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ und $|A| \leq m$, so $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.*

Beweis: Zu 1): Gelte $\pi : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$. II wählt stets das π-Bild bzw. das π-Urbild der Wahl von I.

Zu 2): Sei $A = \{a_1, \dots, a_m\}$. Die folgende Partie spiele II nach seiner Gewinnstrategie. Für $i = 1, \dots, m$ wählt I im i-ten Zug das Element a_i; II antworte mit b_i. Dann ist $p : a_1 \dots a_m \mapsto b_1 \dots b_m \in \mathrm{Part}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Wäre $\mathrm{bd}(p) \neq B$, etwa $b \in B$, $b \notin \mathrm{bd}(p)$; dann wähle Spieler I im $(m+1)$-ten Zug das Element b, so gäbe es für II keine die partielle Isomorphie erhaltende Antwort im Widerspruch zur Voraussetzung. Daher $p : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$. $\square$

Das folgende Lemma ergibt sich unmittelbar aus der Definition des Spiels.

Lemma 1.4 *1) II gew. $G_0(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$ gdw. $\bar{a} \mapsto \bar{b} \in \mathrm{Part}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.*

2) Sei $m > 0$. Dann

$$\begin{array}{rcl} \text{II gew. } G_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b}) & \iff & \forall a \in A \exists b \in B : \text{ II gew. } G_{m-1}(\mathcal{A}, \bar{a}a, \mathcal{B}, \bar{b}b) \\ & \textit{und} & \forall b \in B \exists a \in A : \text{ II gew. } G_{m-1}(\mathcal{A}, \bar{a}a, \mathcal{B}, \bar{b}b). \end{array}$$

3) Ist $m' < m$ und II gew. $G_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$, so II gew. $G_{m'}(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$.

Lemma 1.5 *II gew. $G_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$. Dann gilt für termreduziertes $\varphi \in L_k^S$ mit* $\mathrm{qr}(\varphi) \leq m$

$$\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{B} \models \varphi[\bar{b}]. \tag{1}$$

Beweis: Induktion über m: Sei $m = 0$. Wegen II gew. $G_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$ gilt II gew. $G_0(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$ und somit gilt (1) für atomares termreduziertes $\varphi \in L_k^S$ (nach 1.2.3)) und daher auch für termreduziertes $\varphi \in L_k^S$ mit $\mathrm{qr}(\varphi) = 0$.

Sei $m > 0$. Die Menge der Formeln für die (1) gilt ist gegen $\neg$ und $\vee$ abgeschlossen. Sei nun $\varphi \in L_k^S$, $\mathrm{qr}(\varphi) \leq m$ und $\varphi = \exists x\psi$. Wegen $\models \exists x\psi \leftrightarrow \exists v_k \psi \frac{v_k}{x}$ können wir $\varphi = \exists v_k \psi$ annehmen. Gelte etwa $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}]$. Dann existiert $a \in A$ mit $\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}a]$. Nach Lemma 1.4.2) gibt es ein $b \in B$ mit II gew. $G_{m-1}(\mathcal{A}, \bar{a}a, \mathcal{B}, \bar{b}b)$. Da $\mathrm{qr}(\psi) \leq \mathrm{qr}(\varphi) - 1 \leq m - 1$ gilt nach Induktionsvoraussetzung $\mathcal{B} \models \psi[\bar{b}b]$ und somit $\mathcal{B} \models \varphi[\bar{b}]$. Die andere Richtung läuft entsprechend. $\square$

Wir wollen eine Umkehrung von Lemma 1.5 beweisen. Wir setzen im folgenden voraus, dass S endlich ist. Für eine S-Struktur $\mathcal{A}$, $\bar{a} \in A^k$ und $m \in \mathbb{N}$ geben wir eine Formel

$$\varphi_{\mathcal{A},\bar{a}}^m = \varphi_{\bar{a}}^m(v_0, \ldots, v_{k-1})$$

an, die festhält, wie sich $\bar{a}$ in $\mathcal{A}$ m-mal um 1 Element erweitern läßt und somit das Verhalten von $\bar{a}$ in Spielen der Gestalt $G_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \ldots)$ beschreibt; d.h. für jede Struktur $\mathcal{B}$ und $\bar{b} \in B^k$ soll gelten

$$\mathcal{B} \models \varphi_{\mathcal{A},\bar{a}}^m[\bar{b}] \iff \text{II gew. } G_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b}).$$

Für $\bar{a} = \emptyset$ schreiben wir auch $\varphi_{\mathcal{A}}^m$ für $\varphi_{\bar{a}}^m$. Wir definieren $\varphi_{\bar{a}}^m$ durch Induktion über m (gleichzeitig für alle Folgen in $\mathcal{A}$).

$$\varphi_{\bar{a}}^0 := \bigwedge \{\psi \in \Delta_k^S \mid \mathcal{A} \models \psi[\bar{a}]\} \wedge \bigwedge \{\neg\psi \mid \psi \in \Delta_k^S, \mathcal{A} \models \neg\psi[\bar{a}]\}$$

(Für das Folgende ist es unwichtig, dass $\varphi_\emptyset^0$ wegen $\Delta_0^S = \emptyset$ nicht definiert ist.) Für $m > 0$

$$\varphi_{\bar{a}}^m := \bigwedge_{a \in A} \exists v_k \varphi_{\bar{a}a}^{m-1} \wedge \forall v_k \bigvee_{a \in A} \varphi_{\bar{a}a}^{m-1}.$$

$\varphi_{\bar{a}}^m$ ist der *m-Isomrophietyp von $\bar{a}$ in $\mathcal{A}$.*

Lemma 1.6 *1)* $IT_k^m := \{\varphi^m_{\mathcal{B},\bar b} \mid \mathcal{B}$ *S-Struktur,* $\bar b \in B^k\}$ *ist endlich (und damit sind die obigen Konjunktionen und Disjunktionen endlich).*

2) $\varphi^m_{\bar a} \in L^S_k$*,* $\varphi^m_{\bar a}$ *ist termreduziert und* $\mathrm{qr}(\varphi^m_{\bar a}) = m$*.*

3) $\mathcal{A} \models \varphi^m_{\bar a}[\bar a]$*.*

4) $\mathcal{B} \models \varphi^0_{\bar a}[\bar b]$ *gdw* $\bar a \mapsto \bar b \in \mathrm{Part}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$*.*

Beweis: Zu 1): Der Beweis erfolgt durch Induktion über m (gleichzeitig für alle k). Für $m = 0$ gilt die Behauptung, da Δ^S_k endlich ist; für $m > 0$, da nach Induktionsvoraussetzung IT^{m-1}_{k+1} endlich ist.

2) und 3) ergeben sich leicht durch Induktion über m und 4) gilt wegen 1.2.3). □

Lemma 1.7 *Sei* S *endlich,* $\mathcal{A}$*,* $\mathcal{B}$ *S-Strukturen,* $\bar a \in A^k$*,* $\bar b \in B^k$ *und* $m \in \mathbb{N}$*. Dann*

$$\mathcal{B} \models \varphi^m_{\bar a}[\bar b] \iff \text{II } \textit{gew. } G_m(\mathcal{A}, \bar a, \mathcal{B}, \bar b).$$

Beweis: Auch dieser Beweis erfolgt durch Induktion über m.

$$m = 0: \qquad \begin{aligned} \mathcal{B} \models \varphi^0_{\bar a}[\bar b] &\iff \bar a \mapsto \bar b \in \mathrm{Part}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \\ &\iff \text{II gew. } G_0(\mathcal{A}, \bar a, \mathcal{B}, \bar b) \quad (wegen 1.6.4)). \end{aligned}$$

Sei nun $m > 0$:

$$\begin{aligned} \text{II gew. } G_m(\mathcal{A}, \bar a, \mathcal{B}, \bar b) &\iff \forall a \in A \exists b \in B: \text{ II gew. } G_{m-1}(\mathcal{A}, \bar a a, \mathcal{B}, \bar b b) \\ &\quad\;\text{und} \quad \forall b \in B \exists a \in A: \text{ II gew. } G_{m-1}(\mathcal{A}, \bar a a, \mathcal{B}, \bar b b) \\ &\iff \forall a \in A \exists b \in B : \mathcal{B} \models \varphi^{m-1}_{\bar a a}[\bar b b] \\ &\quad\;\text{und} \quad \forall b \in B \exists a \in A : \mathcal{B} \models \varphi^{m-1}_{\bar a a}[\bar b b] \\ &\iff \mathcal{B} \models \bigwedge_{a \in A} \exists v_k \varphi^{m-1}_{\bar a a}[\bar b] \text{ und } \mathcal{B} \models \forall v_k \bigvee_{a \in A} \varphi^{m-1}_{\bar a a}[\bar b] \\ &\iff \mathcal{B} \models \varphi^m_{\bar a}[\bar b]. \end{aligned}$$

Lemma 1.8 (Lemma von Ehrenfeucht) *Sei* S *endlich,* $\mathcal{A}$*,* $\mathcal{B}$ *S-Strukturen,* $\bar a \in A^k$*,* $\bar b \in B^k$ *und* $m > 0$*. Dann sind äquivalent:*

1. II *gew.* $G_m(\mathcal{A}, \bar a, \mathcal{B}, \bar b)$.
2. $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\bar a}[\bar b]$.

3. *Für alle termreduzierten* $\varphi \in L_k^S$ *mit* $\mathrm{qr}(\varphi) \leq m$

$$\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}] \iff \mathcal{B} \models \varphi[\bar{b}].$$

Beweis: 3. nach 1. gilt da $\mathrm{qr}(\varphi)^m_{\mathcal{A},\bar{a}} \leq m$ und $\mathcal{A} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a}}[\bar{a}]$; 2. nach 1. wegen Lemma 1.7 und 1. nach 3. wegen Lemma 1.8. □

Für $k = 0$ erhalten wir:

Satz 1.9 (Satz von Ehrenfeucht) *Sei S endlich, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ S-Strukturen und $m > 0$. Dann sind äquivalent:*

1. II *gew.* $G_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.
2. $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A}}$.
3. $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$.

Hierbei bedeute $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$, dass $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ dieselben termreduzierten $\varphi \in L_0^S$ vom Quantorenrang $\leq m$ erfüllen.

Folgerung 1.10 *Sei S endlich, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ S-Strukturen. Dann sind äquivalent*

1. *Für alle m: II gew. $G_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.*
2. *Für alle $m > 0$: $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A}}$.*
3. $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Aus Bemerkung 1.3.2) und dem Satz von Ehrenfeucht erhalten wir:

Folgerung 1.11 *Sei S endlich, $\mathcal{A}$ S-Struktur und $|A| \leq m$: Dann gilt*

$$\text{für alle } \mathcal{B}\text{: } (\mathcal{B} \models \varphi^{m+1}_{\mathcal{A}} \iff \mathcal{A} \cong \mathcal{B}).$$

Folgerung 1.12 *Sei $\varphi \in L_k^S$ erfüllbar und termreduziert,* $\mathrm{qr}(\varphi) \leq m$, *$S$ o.B.d.A endlich. Dann*

$$\models \varphi \leftrightarrow \bigvee \{\varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a}} \mid \mathcal{A}\ S\text{-Struktur}, \bar{a} \in A^k, \mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}]\}.$$

Beweis: Gelte zunächst $\mathcal{B} \models \varphi[\bar{b}]$. Dann ist $\varphi^m_{\mathcal{B},\bar{b}}$ ein Element von $\{\dots\}$ und somit $\mathcal{B} \models \bigvee\{\dots\}[\bar{b}]$. Gelte nun $\mathcal{B} \models \bigvee\{\dots\}[\bar{b}]$. Dann gibt es $\mathcal{A}$ und $\bar{a}$ mit $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}]$ und $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\bar{a}}$. Nach dem Lemma von Ehrenfeucht gilt daher $\mathcal{B} \models \varphi[\bar{b}]$. $\square$

Da IT^m_k endlich ist, erhalten wir aus der letzten Folgerung unmittelbar:

Folgerung 1.13 *Seien S endlich und $m, k \in \mathbb{N}$. Dann gibt es bis auf logische Äquivalenz in L^S_k nur endlich viele termreduzierte Ausdücke vom Quantorenrang $\leq m$.*

2 Der Satz von Fraisse

Definition 2.1 Für $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $m \geq 0$ sei

$$K_m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \; := \; \{\bar{a} \mapsto \bar{b} \mid k \geq 0,\ \bar{a} \in A^k,\ \bar{b} \in B^k,\ \text{II gew. } G_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})\}.$$

Wegen Lemma 1.4 hat die Folge $(K_j(\mathcal{A}, \mathcal{B}))_{j \leq m}$ die Hin-Her Eigenschaften im Sinne der folgenden Definition:

Definition 2.2 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $m \geq 0$.

$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind *m-isomorph*, kurz: $\mathcal{A} \cong_m \mathcal{B}$, wenn es eine Folge $(I_j)_{j \leq m}$ gibt mit

- $I \subseteq \text{Part}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ für $j \leq m$; $I_m \neq \emptyset$;

(Hin) $\forall j < m \, \forall p \in I_{j+1} \, \forall a \in A \, \exists q \in I_j \, (q \supseteq p \text{ und } a \in \text{df}(q))$;

(Her) $\forall j < m \, \forall p \in I_{j+1} \, \forall b \in B \, \exists q \in I_j \, (q \supseteq p \text{ und } b \in \text{bd}(q))$;

Dann schreiben wir $(I_j)_{j \leq m} : \mathcal{A} \cong_m \mathcal{B}$ und sagen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind m-isomorph via $(I_j)_{j \leq m}$.

Bemerkung 2.3 *Seien S endlich, $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ S-Strukturen, $\bar{a} \in A^k$, und $\bar{b} \in B^k$. Dann sind äquivalent:*

1. *II gew. $G_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$.*
2. *$\bar{a} \mapsto \bar{b} \in K_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ und $(K_j)_{j \leq m} : \mathcal{A} \cong_m \mathcal{B}$.*
3. *Es gibt $(I_j)_{j \leq m}$ und $p \in I_m$ mit $(\bar{a} \mapsto \bar{b} \subseteq p$ und $(I_j)_{j \leq m} : \mathcal{A} \cong_m \mathcal{B}$.*

Beweis: 1. nach 2. gilt nach der Definition von K_j und Lemma 1.4; 2. nach 3. ist klar.

Zu 3. nach 1.: Man wähle $(I_j)_{j \leq m}$ gemäß 3. Wir geben eine Gewinnstrategie für Spieler II in $G_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$ an. II wähle in seinem i-ten Zug sein Element r_i bzw. s_i so, dass ein $q \in I_{m-i}$ existiert mit $\bar{a} r_1 \ldots r_i \mapsto \bar{b} s_1 \ldots s_i \subseteq q$. Wegen der Hin-Her Eigenschaften von $(I_j)_{j \leq m}$ ist dies stets möglich. $\square$

Für $k = 0$ erhalten wir:

Folgerung 2.4 *Für S-Strukturen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $m \geq 0$ sind äquivalent:*

1. *II gew.* $G_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.
2. $(K_j(\mathcal{A}, \mathcal{B}))_{j \leq m} : \mathcal{A} \cong_m \mathcal{B}$.
3. $\mathcal{A} \cong_m \mathcal{B}$.

Und falls S endlich ist und $m > 0$, so sind zusätzlich äquivalent:

4. $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$.
5. $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A}}$.

Satz 2.5 (Satz von Fraisse) *Ist S endlich, so*

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \iff \forall m \geq 0 : \ \mathcal{A} \cong_m \mathcal{B}.$$

Beispiel 2.6 Sei $S = \emptyset$, $\mathcal{A} = (A)$ und $\mathcal{B} = (B)$, $|A| \geq m$ und $|B| \geq m$. Dann $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$. Insbesondere gilt $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, wenn A und B unendlich sind.

Beweis: Wir setzen

$$I_j := \{p \in \mathrm{Part}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \mid |\mathrm{df}(p)| \leq m - j\}.$$

Da für $S = \emptyset$ partielle Isomorphismen gerade die injektiven partiellen Abbildungen sind, weist man leicht nach, dass $(I_j)_{j \leq m} : \mathcal{A} \cong_m \mathcal{B}$ und somit wegen 2.4, dass $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$. $\square$

Bevor wir weitere Beispiele angeben, führen wir einige Axiomensysteme ein:

Für $S = \{<\}$ bezeichne Σ_O das Axiomensystem für die Klasse der Ordnungen.

Dann ist Σ_{DO} ein Axiomensystem für die Klasse der *dichten Ordnungen*:

$$\Sigma_{\mathrm{DO}} := \Sigma_O \cup \{\forall x \exists y \ x < y, \ \forall x \exists y \ y < x, \forall x \forall y (x < y \to \exists z (x < z \wedge z < y))\}.$$

Es gilt $(\mathbb{Q}, <), (\mathbb{R}, <) \models \Sigma_{\mathrm{DO}}$ und $(\mathbb{Z}, <) \not\models \Sigma_{\mathrm{DO}}$.

Σ_{dkO} ist ein Axiomensystem für die Klasse der *diskreten Ordnungen*:

$$\begin{aligned}\Sigma_{\mathrm{dkO}} := \Sigma_O \cup \{&\forall x \exists y (x < y \wedge \forall z (x < z \to y \leq z)),\\ &\forall x \exists y (y < x \wedge \forall z (z < x \to z \leq y))\}.\end{aligned}$$

Es gilt $(\mathbb{Z},<) \models \Sigma_{\mathrm{dkO}}$ und $(\mathbb{N},<) \not\models \Sigma_{\mathrm{dkO}}$.

Sei $S = \{<, \min\}$. $\Sigma_{[\mathrm{dkO}}$ ist ein Axiomensystem für die Klasse der *linksberandeten diskreten Ordnungen*:

$$\begin{aligned}\Sigma_{[\mathrm{dkO}} := \Sigma_O \cup \{&\forall x \min \leq x,\ \forall x \exists y(x < y \wedge \forall z(x < z \rightarrow y \leq z)),\\ &\forall x(\neg x \equiv \min \rightarrow \exists y(y < x \wedge \forall z(z < x \rightarrow z \leq y)))\}.\end{aligned}$$

Es gilt $(\mathbb{N},<) \models \Sigma_{\mathrm{dkO}}$.

Für $S = \{<, \max\}$ sei entsprechend $\Sigma_{\mathrm{dkO}]}$ ein Axiomensystem für die Klasse der *rechtsberandeten diskreten Ordnungen* und für $S = \{<, \min, \max\}$ sei $\Sigma_{[\mathrm{dkO}]}$ ein Axiomensystem für die Klasse der *berandeten diskreten Ordnungen.*

Linksberandete, rechtsberandete und berandete diskreten Ordnungen werden auch in der Symbolmenge $S = \{<\}$ betrachtet. Dann ist etwa

$$\begin{aligned}\Sigma_{[\mathrm{dkO}} := \Sigma_O \cup \{&\exists x \forall y\, x \leq y,\ \forall x \exists y(x < y \wedge \forall z(x < z \rightarrow y \leq z)),\\ &\forall x(\exists y\, y < x \rightarrow \exists y(y < x \wedge \forall z(z < x \rightarrow z \leq y)))\}.\end{aligned}$$

Wir kommen nun zur Definition der Summe von Ordnungen: Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models \Sigma_O$, also $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Ordnungen. Dann ist die *Summe von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$* die Struktur

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} \ := \ ((A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\}), <),$$

wobei

$$\begin{aligned}(c,i) < (d,j) \quad \Longleftrightarrow \quad & \phantom{\text{oder }}(i = 0 \text{ und } j = 1)\\ & \text{oder } (i = j = 0 \text{ und } c <^A d\\ & \text{oder } (i = j = 1, \text{ und } c <^B d).\end{aligned}$$

Dann ist $\mathcal{A} + \mathcal{B} \models \Sigma_{\mathcal{O}}$. Wenn $\mathcal{A} + \mathcal{B} \models \Sigma_{\mathrm{DO}}$, so $\mathcal{A} + \mathcal{B} \models \Sigma_{\mathrm{DO}}$. Wenn $\mathcal{A} + \mathcal{B} \models \Sigma_{\mathrm{dkO}}$, so $\mathcal{A} + \mathcal{B} \models \Sigma_{\mathrm{dkO}}$.

Beispiele 2.7 1) (Dichte Ordnungen) Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models \Sigma_{\mathrm{DO}}$, also seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ dichte Ordnungen. Dann gilt für

$$I := \{p \in \mathrm{Part}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \mid \mathrm{df}(p) \text{ endlich}\}$$

und für jedes $m \in \mathbb{N}$: $(I)_{j \leq m} : \mathcal{A} \cong_m \mathcal{B}$. Insbesondere gilt: $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, also etwa $(\mathbb{R},<) \equiv (\mathbb{Q},<)$ und $(\mathbb{R},<) + (\mathbb{Q},<) \equiv (\mathbb{Q},<)$.

Beweis: Da $p = \emptyset$ gilt $I \neq \emptyset$. Zur Her-Eigenschaft: Sei $p \in I$, $b \in B$ und $\mathrm{df}(p) = \{a_1, \ldots, a_k\}$. Aufgrund der Dichtheit von $\mathcal{A}$ gibt es in A ein Element, das in der Ordnung $\mathcal{A}$ zu $a_1, \ldots, a_k$ dieselbe Stellung hat wie b in der Ordnung $\mathcal{B}$ zu $p(a_1), \ldots, p(a_k)$. Die Abbildung $p \cup \{(a, b)\}$ ist eine Erweiterung von p, die b im Bildbereich hat und in I liegt. Analog weist man die Hin-Eigenschaft nach, wobei man dann von der Dichtheit von $\mathcal{B}$ Gebrauch macht. $\square$

2) (Diskrete Ordnungen) Zunaechst definieren wir den Abstand zwischen zwei Elementen in einer beliebigen Ordnung. Sei $\mathcal{A} \models \Sigma_{\mathrm{O}}$, also sei $\mathcal{A}$ eine Ordnung. Für $a, b \in A$ sei der *Abstand* $d(a, b)$ *zwischen* a *und* b gegeben durch:

$$d(a, b) := |\{a' \mid a \leq a' < b \text{ oder } b \leq a' < b\}|.$$

Somit ist $d(11, 6) = d(6, 11) = 5$ in $(\mathbb{Z}, <)$, $d(6, 11) = \infty$ in $(\mathbb{R}, <)$ und $d((0, 0), (5, 1) = \infty$ in $(\mathbb{Z}, <) + (\mathbb{Z}, <)$.

Für $j \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$d_j(a, b) := \begin{cases} d(a, b), & \text{wenn } d(a, b) < 2^j \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir kommen nun zu den diskreten Ordnungen.

a) ("Unberandete" diskrete Ordnungen) Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models \Sigma_{\mathrm{dkO}}$ und $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt $(I_j)_{j \leq m} : \mathcal{A} \cong_m \mathcal{B}$, wobei

$$I_j := \{p \in \mathrm{Part}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \mid \mathrm{df}(p) \text{ endlich und } p \text{ erhält } d_j\text{-Abstände}\}.$$

Dabei *erhält* p *die* d_j*-Abstände*, wenn

$$\forall a, a' \in \mathrm{df}(p) : \ d_j(a, a') = d_j(p(a), p(a')).$$

Somit gilt $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. Insbesondere $(\mathbb{Z}, <) \equiv (\mathbb{Z}, <) + (\mathbb{Z}, <)$.

b) (Linksberandete diskrete Ordnungen) Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models \Sigma_{[\mathrm{dkO}}$ und $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt $(I_j)_{j \leq m} : \mathcal{A} \cong_m \mathcal{B}$, wobei

$$I_j := \{p \in \mathrm{Part}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \mid \mathrm{df}(p) \text{ endlich}, \min{}^A \in \mathrm{df}(p), p \text{ erhält } d_j\text{-Abstände}\}.$$

Somit gilt $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. Insbesondere $(\mathbb{N}, <, 0) \equiv ((\mathbb{N}, <) + (\mathbb{Z}, <), (0, 0))$. Und damit $(\mathbb{N}, <) \equiv (\mathbb{N}, <) + (\mathbb{Z}, <)$.

c) (Berandete diskrete Ordnungen) Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models \Sigma_{[\text{dkO}]}$, $m \geq 1$ und $|A|, |B| > 2^m$. Dann gilt $(I_j)_{j \leq m} : \mathcal{A} \cong_m \mathcal{B}$, wobei

$I_j := \{p \in \text{Part}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \mid \text{df}(p)$ endlich, $\min^A, \max^A \in \text{df}(p)$, p erhält d_j-Abstände$\}$.

Somit gilt $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$.

Beweis: Die Beweise von a), b) und c) sind ähnlich; wir beschränken uns auf den Fall c).

$I_m \neq \emptyset$: Da $d_m(\min^A, \max^A) = d_m(\min^B, \max^B) = \infty$, liegt der partielle Isomorphismus $\{(\min^A, \min^B), (\max^A, \max^B)\}$ in I_m.

Zur Hin-Eigenschaft: Sei $j < m$, $p \in I_{j+1}$, $a \in A$, $a \notin \text{df}(p)$. Sei etwa $\text{df}(p) = \{a_1, \ldots, a_k\}$ mit

$$\min^A = a_1 < \ldots < a_k = \max^A.$$

Setze $b_1 := p(a_1), \ldots, b_k := p(a_k)$. Wir wählen i mit $a_i < a < a_{i+1}$. Wenn $d_j(a_i, a) < \infty$, so wählen wir b mit $b_i < b < b_{i+1}$ und $d_j(a_i, a) = d_j(b_i, b)$. Ein solches b existiert, da $d_j(b_i, b_{i+1}) = \infty$ oder $d_j(b_i, b_{i+1}) < \infty$ und dann

$$d_j(b_i, b_{i+1}) = d_{j+1}(b_i, b_{i+1}) = d_{j+1}(a_i, a_{i+1}) > d_j(a_i, a).$$

Wenn $d_j(a_i, a) = \infty$ und $d_j(a, a_{i+1}) < \infty$, so wählen wir b mit $b_i < b < b_{i+1}$ und $d_j(a, a_{i+1}) = d_j(b, b_{i+1})$.

Wenn $d_j(a_i, a) = d_j(a, a_{i+1}) = \infty$, so

$$d(a_i, a_{i+1}) = d(a_i, a) + d(a, a_{i+1}) \geq 2^j + 2^j = 2^{j+1}.$$

Somit $d_{j+1}(a_i, a_{i+1}) = \infty$ und daher $d_{j+1}(b_i, b_{i+1}) = \infty$, also

$$d(b_i, b_{i+1}) \geq 2^{j+1}.$$

Wir wählen b mit $b_i < b < b_{i+1}$ und $d(b_i, b) = 2^j$. Dann

$$d_j(b_i, b) = d_j(b, b_{i+1}) = \infty.$$

In den drei Fällen: $p \cup \{(a, b)\} \in I_j$. $\square$

Definition 2.8 Seien $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}_0$ Klassen von S-Strukturen mit $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}_0$.

- $\mathcal{K}$ ist *axiomatisierbar*, wenn ex. $\Phi \subseteq L_0^S$ mit $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Phi)$.
- $\mathcal{K}$ ist *endlich axiomatisierbar*, wenn ex. $\varphi \in L_0^S$ mit $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\varphi)$.
- $\mathcal{K}$ ist *axiomatisierbar relativ zu* $\mathcal{K}_0$, wenn ex. $\Phi \subseteq L_0^S$ mit $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Phi) \cap \mathcal{K}_0$.
- $\mathcal{K}$ ist *endlich axiomatisierbar relativ zu* $\mathcal{K}_0$, wenn ex. $\varphi \in L_0^S$ mit $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\varphi) \cap \mathcal{K}_0$, also mit $\mathcal{K} = \{\mathcal{A} \in \mathcal{K}_0 \mid \mathcal{A} \models \varphi\}$.

Bemerkung 2.9 *1) $\mathcal{K}$ Klassen von S-Strukturen. Wenn existieren S-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$, $\mathcal{B} \notin \mathcal{K}$ und $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, so ist $\mathcal{K}$ nicht axiomatisierbar.*

2) Sei S endlich und seien $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}_0$ Klassen von S-Strukturen mit $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}_0$. Dann ist $\mathcal{K}$ nicht endlich axiomatiserbar [relativ zu $\mathcal{K}_0$] gdw zu jedem m gibt es $\mathcal{A}, \mathcal{B}\, [\in \mathcal{K}_0]$ mit $\mathcal{A} \cong_m \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$ und $\mathcal{B} \notin \mathcal{K}$.

Beweis: Zu 1): Wäre $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Phi)$, so $\mathcal{A} \models \Phi$ und $\mathcal{B} \not\models \Phi$ im Widerspruch zu $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Zu 2): Wir setzen zunächst die rechte Seite voraus und nehmen an, dass $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\varphi)$ mit (o.B.d.A) termreduzierten φ. Sei $m := \mathrm{qr}(\varphi)$. Nach Voraussetzung gibt es $\mathcal{A}, \mathcal{B}[\in \mathcal{K}_0]$ mit $\mathcal{A} \cong_m \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$ und $\mathcal{B} \notin \mathcal{K}$. Somit $\mathcal{A} \models \varphi$ und $\mathcal{B} \not\models \varphi$ im Widerspruch zu $\mathcal{A} \cong_m \mathcal{B}$.

Wir nehmen nun an, die rechte Seite sei nicht erfüllt. Dann

$$\text{für alle } \mathcal{A}, \mathcal{B}: \qquad \text{wenn } \mathcal{A} \in \mathcal{K} \text{ und } \mathcal{A} \cong_m \mathcal{B}, \text{ so } \mathcal{B} \in \mathcal{K}. \tag{2}$$

Dann gilt aber $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\bigvee\{\varphi_{\mathcal{A}}^m \mid \mathcal{A} \in \mathcal{K}\})$: Die Inklusion $\subseteq$ gilt, da $\mathcal{A} \models \varphi_{\mathcal{A}}^m$ für jedes $\mathcal{A}$. Für $\supseteq$ nehmen wir an, dass $\mathcal{B} \models \bigvee\{\dots\}$. Dann existiert $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$ mit $\mathcal{B} \models \varphi_{\mathcal{A}}^m$. Somit $\mathcal{A} \cong_m \mathcal{B}$ und daher $\mathcal{B} \in \mathcal{K}$ wegen (2).

Folgerung 2.10 *1) Sei S endlich. Dann ist*

$$\{\mathcal{A} \ S\text{-Struktur} \mid A \text{ endlich}, |A| \text{ gerade}\}$$

nicht endlich axiomatiserbar relativ zur Klasse der endlichen S-Strukturen.

2) Sei $S = \{<\}$. Dann ist

$$\{\mathcal{A} \ S\text{-Struktur} \mid \mathcal{A} \text{ Ordnung}, A \text{ endlich}, |A| \text{ gerade}\}$$

ist nicht endlich axiomatiserbar relativ zur Klasse der endlichen Ordnungen.

Beweis: Zu 1): Sei $\mathcal{K}$ die angegebene Klasse. Für gegebenes m seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ S-Strukturen mit $A = \{1, \ldots, 2 \cdot m\}$ und $B = \{1, \ldots, 2 \cdot m + 1\}$. Dann ist $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$, $\mathcal{A} \cong_m \mathcal{B}$ (nach 2.6) und $\mathcal{B} \notin \mathcal{K}$.

Zu 2): Der Beweis verläuft entsprechend, wobei wir jetzt 2.7.2)c) verwenden. $\square$

3 Partielle Isomorphie

Definition 3.1 $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind *partiell isomorph via* I, kurz: $I : \mathcal{A} \cong_{\text{part}} \mathcal{B}$, wenn

- $I \subseteq \text{Part}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$; $I \neq \emptyset$;

(Hin) $\forall p \in I \, \forall a \in A \, \exists q \in I \, (q \supseteq p$ und $a \in \text{df}(q))$;

(Her) $\forall p \in I \forall b \in B \, \exists q \in I \, (q \supseteq p$ und $b \in \text{bd}(q))$;

$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind *partiell isomorph*, kurz: $\mathcal{A} \cong_{\text{part}} \mathcal{B}$, wenn existiert I mit $I : \mathcal{A} \cong_{\text{part}} \mathcal{B}$.

Lemma 3.2 *1) Wenn* $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ *so* $\mathcal{A} \cong_{\text{part}} \mathcal{B}$.
Wenn $\pi : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ *so* $\{\pi\} : \mathcal{A} \cong_{\text{part}} \mathcal{B}$.

2) Wenn $\mathcal{A} \cong_{\text{part}} \mathcal{B}$, *so* $\mathcal{A} \cong_m \mathcal{B}$ *für alle* $m \geq 0$ *und somit* $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.
Wenn $I : \mathcal{A} \cong_{\text{part}} \mathcal{B}$ *und* $m \geq 0$, *so* $(I)_{j \leq m} : \mathcal{A} \cong_m \mathcal{B}$.

Satz 3.3 *Wenn* $\mathcal{A} \cong_{\text{part}} \mathcal{B}$ *und* A, B *höchstens abzählbar, so* $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.
Ist $I : \mathcal{A} \cong_{\text{part}} \mathcal{B}$, *sind* A, B *höchstens abzählbar und ist* $p_0 \in I$, *so existiert* $\pi \supseteq p_0$ *mit* $\pi : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

Beweis: Sei $p_0 \in I$, $A = \{a_0, a_1, \dots\}$ und $B = \{b_0, b_1 \dots\}$. Durch wiederholte Anwendung der Hin-Her Eigenschaft erhält man

$$p_1, p_2, \dots \qquad \in I$$

mit

$$p_0 \subseteq p_1 \subseteq p_2 \subseteq \dots$$

und

$$a_0 \in \text{df}(p_1), \; b_0 \in \text{bd}(p_2), \; a_1 \in \text{df}(p_3), \; b_1 \in \text{bd}(p_4), \dots$$

Für $\pi := \bigcup_{i \geq 0} p_i$ gilt dann: $\pi : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$. $\square$

Bemerkungen und Beispiele 3.4 *1) Sind* $\mathcal{A}$ *und* $\mathcal{B}$ *dichte Ordnungen, so* $\mathcal{A} \cong_{\text{part}} \mathcal{B}$*. Nach 2.7.2)a) gilt nämlich* $I : \mathcal{A} \cong_{\text{part}} \mathcal{B}$ *für* $I := \{p \in \mathrm{Part}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \mid \mathrm{df}(p)$ *endlich*$\}$.

Folgerung (Satz von Cantor). *Je zwei abzählbare dichte Ordnungen sind isomorph; somit ist jede dichte Ordnung zur Ordnung* $(\mathbb{Q}, <)$ *isomorph.*

2) $(\mathbb{Z}, <) \not\cong_{\text{part}} (\mathbb{Z}, <) + (\mathbb{Z}, <)$*, aber* $(\mathbb{Z}, <) \cong_m (\mathbb{Z}, <) + (\mathbb{Z}, <)$ *für alle* $m \in \mathbb{N}$.

3) Wenn $I : \mathcal{A} \cong_{\text{part}} \mathcal{B}$ *und* $p_0 \in I$*, dann gilt* $I(p_0) : \mathcal{A} \cong_{\text{part}} \mathcal{B}$ *wobei* $I(p_0) := \{p \in I \mid p_0 \subseteq p\}$*. Ist* $\bar{a} \mapsto \bar{b} \subseteq p_0$*, so* $I(p_0) : (\mathcal{A}, \bar{a}) \cong_{\text{part}} (\mathcal{B}, \bar{b})$ *und wegen 3.2.2):* $(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv (\mathcal{B}, \bar{b})$.

4) Gelte $I : \mathcal{A} \cong_{\text{part}} \mathcal{B}$*, seien* $t \in T_k^S$*,* $\bar{a} \in A^k$ *und* $p \in I$*. Wenn* $\bar{a}, t^{\mathcal{A}}[\bar{a}] \in \mathrm{df}(p)$*, so*

$$p(t^{\mathcal{A}}[\bar{a}]) = t^{\mathcal{B}}[p(\bar{a})].$$

Beweis: Zu 2): Wäre $(\mathbb{Z}, <) \cong_{\text{part}} (\mathbb{Z}, <) + (\mathbb{Z}, <)$, so $(\mathbb{Z}, <) \cong (\mathbb{Z}, <) + (\mathbb{Z}, <)$ nach dem vorangehenden Satz, im Widerspruch zur Tatsache, dass $(\mathbb{Z}, <) + (\mathbb{Z}, <)$, aber nicht $(\mathbb{Z}, <)$, Elemente a und b enthält mit $d(a, b) = \infty$.

Zu 3): Die Behauptung ergeben sich, wenn wir $I(p_0) \subseteq \mathrm{Part}((\mathcal{A}, \bar{a}), (\mathcal{B}, \bar{b}))$ zeigen: Aus $q \in I$ und $\bar{a} \mapsto \bar{b} \subseteq q$ folgt unmittelbar $q \in \mathrm{Part}((\mathcal{A}, \bar{a}), (\mathcal{B}, \bar{b}))$.

Zu 4): Sei $t_1, \ldots, t_m$ eine Liste aller Teilterme von t. Durch k-malige Anwendung der Hin-Eigenschaft erhalten wir $q \in I$ mit $q \supseteq p$ und $t_1^{\mathcal{A}}[\bar{a}], \ldots, t_k^{\mathcal{A}}[\bar{a}] \in \mathrm{df}(p)$. Dann gilt nach 1.2.2)

$$p(t^{\mathcal{A}}[\bar{a}]) = q(t^{\mathcal{A}}[\bar{a}]) = t^{\mathcal{B}}[q(\bar{a})] = t^{\mathcal{B}}[p(\bar{a})].$$

$\square$

4 Substrukturen, Einbettungen

Definition 4.1 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ S-Strukturen.
$\mathcal{A}$ ist eine *Substruktur* von $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}$ eine *Erweiterung* von $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, gdw.

1. $A \subseteq B$;
2. für $R \in S$ n-stellig: $R^{\mathcal{A}} = R^{\mathcal{B}} \cap A^n$;
3. für $f \in S$ n-stellig: $f^{\mathcal{A}} = f^{\mathcal{B}}|A^n$;
4. für $c \in S$: $c^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{B}}$.

Wir wiederholen die Definition von S-abgeschlossen:

Definition 4.2 Sei $\mathcal{B}$ eine S-Struktur und $A_0 \subseteq B$. A_0 ist *S-abgeschlossen* gdw. $A_0 \neq \emptyset$ und A_0 "abgeschlossen gegen Funktionen und Konstanten" ist, d.h.

> wenn $f \in S$, $\bar{a} \in A_0$, so $f^{\mathcal{B}}(\bar{a}) \in A_0$;
> wenn $c \in S$, so $c^{\mathcal{B}} \in A_0$.

Bemerkungen und Beispiele 4.3 *1. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, $\bar{a} \in A^n$*

(a) Wenn $t \in T_n^S$, so: $t^{\mathcal{A}}[\bar{a}] = t^{\mathcal{B}}[\bar{a}]$.

(b) Wenn $\varphi \in L_n^S$ quantorenfrei, so: $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}] \iff \mathcal{B} \models \varphi[\bar{a}]$.

2. Sei $S = \{\circ, e\}$. Dann $(\mathbb{N}, +, 0) \subseteq (\mathbb{Z}, +, 0)$.

3. Sei $S = \{\circ, ^{-1}, e\}$ und $\mathcal{G}$ eine Gruppe. Dann gilt für alle $\mathcal{U}$:

$$\mathcal{U} \subseteq \mathcal{G} \iff \mathcal{U} \text{ Untergruppe von } \mathcal{G}.$$

4. Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Dann ist A ist S-abgeschlossen in $\mathcal{B}$.

5. Sind $\mathcal{B}$ eine S-Struktur und $A_0 \subseteq B$ S-abgeschlossen, dann gibt es genau ein $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ und $A = A_0$.

6. Sei $\mathcal{B}$ eine S-Struktur mit relationalem S. Dann ist jede nichtleere Teilmenge von B der Träger einer Substruktur von $\mathcal{B}$.

7. *Sei $\mathcal{B}$ eine S-Struktur und $X \subseteq B$. S enthalte Konstantensymbole oder $X \neq \emptyset$. Dann ist*

$$\{t^{\mathcal{B}}[\bar{a}] \mid n \in \mathbb{N}, \bar{a} \in A^n, t \in T_n^S\}$$

der Träger der kleinsten Substruktur von $\mathcal{B}$, die X umfaßt, die von X in $\mathcal{B}$ erzeugte Substruktur. *Sie wird mit $[X]^{\mathcal{B}}$ bezeichnet. Sind X und S höchstens abzählbar, so ist auch (der Träger von) $[X]^{\mathcal{B}}$ höchstens abzählbar.*

Beweis: Zu 7: Wir setzen

$$A := \{t^{\mathcal{B}}[\bar{a}] \mid n \in \mathbb{N}, \bar{a} \in A^n, t \in T_n^S\}.$$

$X \subseteq A$: Für $a \in X$ gilt $v_0^{\mathcal{B}}[a] \in A$.

Sei $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$, $X \subseteq C$. Zu zeigen ist: $A \subseteq C$. Sei hierzu $a \in A$. Dann gibt es, $n \in \mathbb{N}$, $\bar{a} \in X$, $t \in T_n^S$ mit $a = t^{\mathcal{B}}[\bar{a}]$. Dann $t^{\mathcal{B}}[\bar{a}] = t^{\mathcal{C}}[\bar{a}] \in C$.

Wir zeigen, dass A S-abgeschlossen ist und damit Träger einer Substruktur von $\mathcal{B}$: Für $c \in S$ ist $c^{\mathcal{B}} \in A$. Sei $f \in S$ etwa 2-stellig und $t_1^{\mathcal{B}}[\bar{a}_1], t_2^{\mathcal{B}}[\bar{a}_2] \in A$ mit $t_1 \in T_{n_1}^S$ und $t_2 \in T_{n_2}^S$. Wir setzen $t_2' := t_2 \frac{v_{n_1} \ldots v_{n_1+n_2-1}}{v_0 \;\; \ldots \;\; v_{n_2-1}}$ und $t := f t_1 t_2'$. Dann gilt

$$A \ni t^{\mathcal{B}}[\bar{a}_1, \bar{a}_2] = f^{\mathcal{B}}(t_1^{\mathcal{B}}[\bar{a}_1, \bar{a}_2], {t'}_2^{\mathcal{B}}[\bar{a}_1, \bar{a}_2]) = f^{\mathcal{B}}(t_1^{\mathcal{B}}[\bar{a}_1], t_2^{\mathcal{B}}[\bar{a}_2]).$$

Die Abbildung

$$\rho : \bigcup_{n \geq 0} (T_n^S \times X^n) \to A$$

mit $\rho(t, \bar{a}) = t^{\mathcal{B}}[\bar{a}]$ ist surjektiv. Somit ist mit X und S auch A höchstens abzählbar. $\square$

Definition 4.4 Ein Ausdruck ist *universell* oder ein *Allausdruck* (*existentiell* oder ein *Existenzausdruck*), wenn er aus atomaren, negiert atomaren Ausdrucken, den Junktoren $\wedge$ und $\vee$ und dem Allquantor (Existenquantor) gewonnen werden kann.

Lemma 4.5 1. *Für φ sind äquivalent:*

- *φ ist logisch äquivalent zu einem Allausdruck.*
- *φ ist logisch äquivalent zu einem Ausdruck der Gestalt $\forall x_1 \dots \forall x_n \psi$ mit quantorenfreiem ψ.*

2. *φ ist logisch äquivalent zu einem Allausdruck gdw $\neg\varphi$ ist logisch äquivalent zu einem Existenzausdruck. φ ist logisch äquivalent zu einem Existenzausdruck gdw $\neg\varphi$ ist logisch äquivalent zu einem Allausdruck.*

Satz 4.6 *Gelte $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n) \in L^S$ und $\bar{a} \in A^n$. Dann*

Ist φ universell und $\mathcal{B} \models \varphi[\bar{a}]$,so $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}]$.
Ist φ existentiell und $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}]$,so $\mathcal{B} \models \varphi[\bar{a}]$.

Insbesondere: Ist φ ein Allsatz und $\mathcal{B} \models \varphi$, so $\mathcal{A} \models \varphi$.Ist φ ein Existenzsatz und $\mathcal{A} \models \varphi$, so $\mathcal{B} \models \varphi$.

Definition 4.7 1. X erzeugt $\mathcal{B}$ *gdw* $[X]^{\mathcal{B}} = \mathcal{B}$.

2. $\mathcal{B}$ *ist* endlich erzeugt *gdw. es existiert ein endliches X mit $[X]^{\mathcal{B}} = \mathcal{B}$.*

Satz 4.8 *Sei φ ein Allsatz. Dann*

$$\mathcal{B} \models \varphi \iff \varphi \text{ gilt in allen endlich erzeugten Substrukturen von } \mathcal{B}.$$

Beweis: $\Rightarrow$: Wegen Satz 4.6.
$\Leftarrow$: Wegen Lemma 4.5 können wir annehmen, dass

$$\varphi = \forall v_0 \dots \forall v_{n-1} \psi$$

mit quantorenfreiem ψ. Wir nehmen an, dass $\mathcal{B} \not\models \varphi$. dann gibt es $\bar{a} \in B^n$ mit $\mathcal{B} \models \neg\psi[\bar{a}]$. Wir setzen $X := \{a_0, \dots, a_{n-1}\}$ (bzw. $X := \{a\}$ für ein beliebiges Element $a \in B$, falls $n = 0$ ist). Dann ist $[X]^{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{B}$ und 4.3 gilt daher $[X]^{\mathcal{B}} \models \neg\psi[\bar{a}]$, somit $[X]^{\mathcal{B}} \not\models \forall v_0 \dots \forall v_{n-1} \psi$, ein Widerspruch zur Voraussetzung. □

Definition 4.9 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ S-Strukturen.

- $\pi : A \to B$ ist *(algebraische) Einbettung* von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$, $\pi : \mathcal{A} \overset{a}{\to} \mathcal{B}$, wenn es $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ mit $\pi : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}'$ gibt.

- $\mathcal{A}$ ist *(algebraisch) einbettbar* in $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} \overset{a}{\to} \mathcal{B}$, wenn π mit $\pi : \mathcal{A} \overset{a}{\to} \mathcal{B}$ existiert.

Bemerkung 4.10 *1. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ gdw $\mathrm{id}_A : \mathcal{A} \overset{a}{\to} \mathcal{B}$.*

2. Wenn $\mathcal{A} \overset{a}{\to} \mathcal{B}$, etwa $\pi : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}'$ mit $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$, dann gibt es $\mathcal{C}$ und π' mit

$$\mathcal{C} \supseteq \mathcal{A},\ \pi' : \mathcal{C} \cong \mathcal{B} \quad \textit{und} \quad \pi' \supseteq \pi.$$

Somit: $\mathcal{A}$ ist in $\mathcal{B}$ einbettbar gdw $\mathcal{B}$ ist isomorph zu einer Erweiterung von $\mathcal{A}$.

3. Sei $\mathcal{A}$ eine S-Struktur und $\Sigma \subseteq L_0^S$. Dann sind äquivalent:

(a) $\mathcal{A}$ ist algebraisch einbettbar in ein Modell von Σ.

(b) Es gibt eine Erweiterung von $\mathcal{A}$, die Modell von Σ ist.

4. $\pi : \mathcal{A} \overset{a}{\to} \mathcal{B}$, $\varphi \in L_n^S$ existentiell, $\bar{a} \in A$. Wenn $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}]$ so $\mathcal{B} \models \varphi[\pi(\bar{a})]$. Insbesondere: Wenn $\mathcal{A} \overset{a}{\to} \mathcal{B}$, φ Existenzsatz und $\mathcal{A} \models \varphi$ so $\mathcal{B} \models \varphi$.

5. Für S-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ und $\pi : A \to B$ sind äquivalent:

(a) $\pi : \mathcal{A} \overset{a}{\to} \mathcal{B}$.

(b) $\pi \in \mathrm{Part}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Beweis: zu 3: $(a) \Rightarrow (b)$: Gelte $\mathcal{A} \overset{a}{\to} \mathcal{B}$ mit $\mathcal{B} \models \Sigma$. Wegen 2. gibt es $\mathcal{C}$ mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$, $\mathcal{C} \cong \mathcal{B}$; daher $\mathcal{C} \models \Sigma$. $(b) \Rightarrow (a)$ gilt wegen 1.

zu 4: Sei $\pi : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$. Wenn $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}]$ so $\mathcal{B}' \models \varphi[\pi(\bar{a})]$ und wegen 4.6 daher $\mathcal{B} \models \varphi[\pi(\bar{a})]$.

zu 5: $(a) \Rightarrow (b)_{\surd}$. $(b) \Rightarrow (a)$: $\pi(A) := \{\pi(a) \mid a \in A\}$ ist S-abgeschlossen in $\mathcal{B}$, d.h. ist Träger einer Substruktur $\mathcal{B}_0$. Somit $\pi : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$. $\square$

Mit $(a_i)_{i \in I}$ bzw. $(a_i)_I$ bezeichnen wir die *Folge* $f : I \to A$ in A (oder in $\mathcal{A}$) mit $f(i) = a_i$. $(a_i)_I$ ist eine *Aufzählung* von A, wenn $A = \{a_i \mid i \in I\}$. Ist $\mathcal{A}$ eine S-Struktur und $(a_i)_I$ eine Folge in $\mathcal{A}$, so bezeichne $(\mathcal{A}, (a_i)_I)$ die $S_I := S \cup \{c_i \mid i \in I\}$-Struktur mit S-Redukt $\mathcal{A}$ und $c_j^{(\mathcal{A},(a_i)_I)} = a_j$ für $j \in I$. Hierbei sind die c_i neue, paarweise verschiedene Konstanten.

Die *kanonische* Aufzählung erhalten wir für $I = A$, $f = \mathrm{id}_A$. $(\mathcal{A}, (a)_{a \in A})$ ist die zugehörige S_A-Struktur.

6. *Ist* $\pi : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ *bzw.* $\pi : \mathcal{A} \stackrel{a}{\to} \mathcal{B}$, $(a_i)_I$ *Folge in* A, *so* $\pi : (\mathcal{A}, (a_i)_I) \cong (\mathcal{B}, (\pi(a_i))_I)$ *bzw.* $\pi : (\mathcal{A}, (a_i)_I) \stackrel{a}{\to} (\mathcal{B}, (\pi(a_i))_I)$.

Definition 4.11 Sei $(a_i)_I$ Aufzählung von $\mathcal{A}$.

$$D_a(\mathcal{A}; (a_i)_I) \quad := \quad \{\varphi \in L_0^{S_I} \mid \varphi \text{ atomar oder negiert atomar, } (\mathcal{A}, (a_i)_I) \models \varphi\}$$

heißt das *algebraische Diagramm* von $\mathcal{A}$ bzgl. $(a_i)_I$. Für die kanonische Aufzählung schreiben wir auch $D_a(\mathcal{A})$ für $D_a(\mathcal{A}; (a)_{a\in A})$ und sprechen von *dem algebraischen Diagramm* von $\mathcal{A}$.

Satz 4.12 *Die Modelle des algebraischen Diagramms von* $\mathcal{A}$ *sind die Erweiterungen von* $\mathcal{A}$*; genauer: Sei* $\mathcal{A}$ *eine* S*-Struktur und* $(a_i)_I$ *Aufzählung von* $\mathcal{A}$*; dann sind für jede* S*-Struktur* $\mathcal{B}$ *äquivalent:*

1. $\mathcal{A} \stackrel{a}{\to} \mathcal{B}$.

2. *Für eine geeignete Folge* $(b_i)_I$ *in* $\mathcal{B}$: $(\mathcal{B}, (b_i)_I) \models D_a(\mathcal{A}; (a_i)_I)$.

Dabei ist $\pi(a_i) = b_i$ *jeweils eine Definition des gesuchten Objekts.*

Beweis: $1 \Rightarrow 2$: Sei $\pi : \mathcal{A} \stackrel{a}{\to} \mathcal{B}$. Wir setzen $b_i := \pi(a)$. Dann $\pi : (\mathcal{A}; (a_i)_I) \stackrel{a}{\to} (\mathcal{B}, (b_i)_I)$ und wegen $(\mathcal{A}, (a_i)_I) \models D_a(\mathcal{A}; (a_i)_I)$ gilt $(\mathcal{B}, (b_i)_I) \models D_a(\mathcal{A}; (a_i)_I)$.

$2 \Rightarrow 1$: Definiere $\pi : A \to B$ durch $\pi(a_i) := b_i$. Nach Vor. gilt $(\mathcal{B}, (b_i)_I) \models \varphi$ für $\varphi \in D_a(\mathcal{A}; (a_i)_I)$. Mit $\varphi := c_i = c_j$ bzw. $\varphi := \neg c_i = c_j$ erhalten wir, daß π wohldefiniert bzw. injektiv ist. Etwa mit $\varphi := fc_{i_1} \ldots c_{i_n} = c_i$ gewinnen wir $f^{\mathcal{B}}(b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}) = b_i$ aus $f^{\mathcal{A}}(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) = a_i$. Somit $\pi \in \mathrm{Part}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ und nach 5. daher $\pi : \mathcal{A} \stackrel{a}{\to} \mathcal{B}$. $\square$

Satz 4.13 $\mathcal{A}$ *S-Struktur,* $S \subseteq S'$, $\Sigma \subseteq L_0^{S'}$. *Äquivalent sind:*

1. *Es gibt eine Erweiterung von* $\mathcal{A}$*, die Modell von* Σ *ist, genauer: Es gibt eine* S'*-Struktur* $\mathcal{B}$ *mit* $\mathcal{B} \models \Sigma$ *und* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}|S$.

2. $\mathcal{A}$ *erfüllt alle* S*-Allsätze, die aus* Σ *folgen.*

Lemma 4.14 1. $c_0, \ldots, c_{n-1} \in S$, $\mathcal{A}$ *S-Struktur,* $\psi \in L_0^S$. *Dann*

$$\mathcal{A} \models \psi \quad gdw \quad \mathcal{A} \models \psi\frac{v_0 \ldots v_{n-1}}{c_0 \ldots c_{n-1}}[c_0^{\mathcal{A}}, \ldots, c_{n-1}^{\mathcal{A}}].$$

2. $S_0 \subseteq S$, $c_0, \dots, c_{n-1} \in S \setminus S_0$, $\Sigma \subseteq L_0^{S_0}$, $\psi \in L_0^S$.

$$\textit{Wenn } \Sigma \models \psi, \textit{ so } \Sigma \models \forall v_0 \dots \forall v_{n-1} \psi \frac{v_0 \dots v_{n-1}}{c_0 \dots c_{n-1}}.$$

Beweis: (von Satz 4.13) 1. $\Rightarrow$ 2.: Gelte $\mathcal{B} \models \Sigma$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}|S$. Sei $\varphi \in L_0^S$ universell und $\Sigma \models \varphi$. Dann $\mathcal{B} \models \varphi$, $\mathcal{B}|S \models \varphi$, $\mathcal{A} \models \varphi$.

2. $\Rightarrow$ 1.: Nach Satz 4.12 genügt zu zeigen

$$\text{Erf } \Sigma \cup D_a(\mathcal{A}).$$

Wenn nicht, so gibt es nach dem Endlichkeitssatz $\varphi_1, \dots, \varphi_s \in D_a(\mathcal{A})$ mit

$$\text{nicht Erf } \Sigma \cup \{\varphi_1, \dots, \varphi_s\}.$$

Setze $\varphi := (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_s)$. Dann $\Sigma \models \neg\varphi$ und $(\mathcal{A}, (a)_{a \in A}) \models \varphi$. Seien $c_{a_0}, \dots, c_{a_{n-1}}$ die Konstanten aus $\{c_a \mid a \in A\}$ in φ. Dann gilt für den Allsatz $\chi := \forall v_0 \dots \forall v_{n-1} \neg\varphi \frac{v_0 \dots v_{n-1}}{c_0 \dots c_{n-1}}$ wegen des Lemmas einerseits $\Sigma \models \chi$ andererseits mit $(\mathcal{A}, (a)_{a \in A}) \models \varphi \frac{v_0 \dots v_{n-1}}{c_0 \dots c_{n-1}}[a_0, \dots, a_{n-1}]$ auch $\mathcal{A} \models \exists v_0 \dots \exists v_{n-1} \varphi \frac{v_0 \dots v_{n-1}}{c_0 \dots c_{n-1}}$ und somit $\mathcal{A} \models \neg\chi$. 2. ist also verletzt.

Satz 4.15 *$\mathcal{A}$ S-Struktur, $S \subseteq S'$, $S' \setminus S$ relational, $\Sigma \subseteq L_0^{S'}$ Menge von Allsätzen. Dann sind äquivalent:*

1. *$\mathcal{A}$ hat eine S'-Expansion, die Modell von Σ ist.*
2. *$\mathcal{A}$ erfüllt alle S-Allsätze, die aus Σ folgen.*

Beweis: 1. $\Rightarrow$ 2.: Mit 1. ist 1. in Satz 4.13 erfüllt und damit 2.

Gelte nun 2. Nach Satz 4.13 git es eine S'-Struktur $(\mathcal{B}, (P^B)_{P \in S' \setminus S})$ mit

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \quad \text{und} \quad (\mathcal{B}, (P^B)_{P \in S' \setminus S}) \models \Sigma.$$

Folgerung 4.16 *Zu jedem S-Satz φ der 2. Stufe der Gestalt*

$$\exists X_1 \dots \exists X_k \chi$$

mit universellem χ ohne Quantoren der 2. Stufe gibt es eine Menge $\Phi \subseteq L_0^S$ von Allsätzen mit $\mathrm{Mod}(\varphi) = \mathrm{Mod}(\Phi)$.

Da Σ eine Menge von Allsätzen ist, gilt dann $(\mathcal{A}, (P^A)_{P \in S' \setminus S}) \models \Sigma$ mit $P^A := P^B \cap B^n$ für n-stelliges P. $\square$

Satz 4.17 *1. $\mathcal{A}$ S-Struktur, $S \subseteq S'$, $\Sigma \subseteq L_0^{S'}$: Wenn sich jede endlich erzeugte Substruktur von $\mathcal{A}$ in ein Modell von Σ einbetten lässt, so auch $\mathcal{A}$.*

2. $\mathcal{A}$ S-Struktur, $S \subseteq S'$, $S' \setminus S$ relational, $\Sigma \subseteq L_0^{S'}$ Menge von Allsätzen: Wenn jede endlich erzeugte Substruktur von $\mathcal{A}$ eine Expansion besitzt, die Modell von Σ ist, so hat auch $\mathcal{A}$ eine solche Expansion.

Beweis: Wegen Satz 4.13 bzw. Satz 4.15 ist für jeden S-Allsatz φ mit $\Sigma \models \varphi$ zu zeigen: $\mathcal{A} \models \varphi$. Da φ ein Allsatz ist, gilt nach Voraussetzung und Satz sasub1: jede endlich erzeugte Substruktur von $\mathcal{A}$ ist Modell von φ. Wegen Satz 4.8 ist daher $\mathcal{A} \models \varphi$. $\square$

Beispiele 4.18 1) $\mathcal{A}$ ein kommutativer Ring mit 1, Σ Körperaxiome; universeller Allsatz: $\forall x \forall y (x \cdot y = 0 \to (x = 0 \vee y = 0))$.

2) $S = \{P\}$, P zweistellig, $\mathcal{A}$ S-Struktur, $S' = \{P, <\}$, $\Sigma := \{$"$<$ Ordnung", $\forall x \forall y (Pxy \to x < y)\}$. $\mathcal{A}$ (oder P^A) ist *zu Ordnung fortsetzbar* gdw es ex. $<^A$: $(A, P^A, <^A) \models \Sigma$.

Bemerkung. P^A ist zu einer Ordnung fortsetzbar gdw für alle $k \geq 1$: $(A, P^A) \models \varphi_k$, wobei

$$\varphi_k := \forall x_1 \ldots \forall x_k \neg (Px_1x_2 \wedge Px_2x_3 \wedge \ldots \wedge Px_{k-1}x_k \wedge Px_kx_1).$$

Beweis: $\Rightarrow$: Wegen Satz 4.15, da φ_k aus Σ folgt.

$\Leftarrow$: Wegen Satz 4.17 genügt der Nachweis für endliches A. Induktion über $k := |A|$.

k=1: Wegen $(A, P^A) \models \varphi_1$ ist $P^A = \emptyset$. Wir setzen $<^A = \emptyset$.

$k-1 \Rightarrow k$: Es gibt $a \in A$ mit: $\forall b \in A$ nicht P^Aab. (Sonst gibt es für beliebiges $a_0 \in A$ Elemente $a_1, \ldots, a_k$ mit

$$P^A a_0 a_1, \ldots, P^A a_{k-1} a_k$$

Dann gibt es $i < j$ mit $a_i = a_j$, ein Widerspruch zu $(A, P^A) \models \varphi_{j-i}$.) Für $B := A \setminus \{a\}$ existiert nach Induktionsvoraussetzung eine Ordnung $<^B$ auf

B, die $P^A \cap B^2$ fortsetzt; $<^A := <^B \cup \{(b,a) \mid b \in B\}$ ist dann eine P^A fortsetzende Ordnung auf A. $\square$

3) Ordenbare Gruppen. Wir wiederholen einige Begriffe aus der Gruppntheorie. Wir betrachten Gruppen zur Symbolmenge $S_{\mathrm{Grp}} = \{\circ, ^{-1}, e\}$.

Eine Gruppe $\mathcal{G}$ ist *torsionsfrei*, wenn

$$\text{für alle } n > 0\text{:}\;\; \mathcal{G} \models \forall x \forall y (x^n = y^n \to x = y),$$

im Fall einer abelschen Gruppe also wenn

$$\text{für alle } n > 0\text{:}\;\; \mathcal{G} \models \forall x \forall y (x^n = e \to x = e).$$

$\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, +, -, 0)$ und $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, +, -, 0)$ sind torsionsfrei, während $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot, ^{-1}, 1)$ nicht torsionsfrei ist. Jede endliche Gruppe (mit mehr als einem Element) ist nicht torsionsfrei.

Eine Gruppe $\mathcal{G}$ ist *ordenbar*, wenn existiert $<^G \subseteq G \times G$ mit: $(\mathcal{G}, <^G)$ ist eine geordnete Gruppe, d.h. $(\mathcal{G}, <^G) \models \Sigma_{\mathrm{Ord}}$ und

$$(\mathcal{G}, <^G) \models \forall x \forall y \forall z (x < y \to (z \circ x < z \circ y \wedge x \circ z < y \circ z).$$

$(\mathcal{Z}, <)$ und $(\mathcal{Q}, <)$ sind geordnete Gruppen. $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot, ^{-1}, 1)$ ist nicht ordenbar. Es gilt nämlich:

- Ist $\mathcal{G}$ ordenbar, so ist $\mathcal{G}$ torsionsfrei.

Ist nämlich $(\mathcal{G}, <)$ eine geordnete Gruppe und $a, b \in G$, etwa $a < b$, so erhält man nacheinander $x^2 < x \circ y < y^2$, $x^3 < x^2 \circ y < y^3$ und allgemein durch Induktion: $x^n < y^n$.

- Sind $(\mathcal{G}_1, <_1)$ und $(\mathcal{G}_2, <_2)$ geordnete Gruppen, so ist $(G_1 \times G_2, <)$ eine geordnete Gruppe, wobei

$$(a_1, a_2) < (b_1, b_2) \text{ gdw } (a_1 <_1 b_1 \text{ oder } (a_1 = b_1 \text{ und } a_2 <_2 b_2)).$$

Wir verwenden den folgenden

Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen. Jede endlich erzeugte abelsche Gruppe $\mathcal{G}$ ist (isomorph zu einem) Produkt von zyklischen Gruppen unendlicher Ordnung und von zyklischen Gruppen von Primzahlpotenz:

$$\mathcal{G} \cong \mathcal{Z} \times \ldots \times \mathcal{Z} \times \mathcal{Z}_{p_1^{k_1}} \times \ldots \times \mathcal{Z}_{p_r^{k_r}}.$$

Bemerkung. Eine abelsche Gruppe ist ordenbar gdw sie torsionsfrei ist.

Beweis: Sei $\mathcal{G}$ abelsch und torsionsfrei. Wegen Satz 4.17 genügt es, zu zeigen, daß jede endlich erzeugte Untergruppe $\mathcal{H}$ ordenbar ist. Nach dem Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen gilt

$$\mathcal{H} \cong \mathcal{Z} \times \ldots \times \mathcal{Z} \times \mathcal{G}_1 \times \ldots \times \mathcal{G}_r$$

für geeignete endliche Gruppen $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_r$. Da mit $\mathcal{G}$ auch $\mathcal{H}$ torsionsfrei ist, gilt $r = 0$. Somit ist $\mathcal{H}$ ordenbar. $\square$

4) Divisible Gruppen. Eine Gruppe $\mathcal{G}$ ist *divisibel*, wenn

$$\text{für alle } n > 0\text{: } \mathcal{G} \models \forall x \exists y\, x = y^n$$

$\mathcal{Q}$ ist eine divisble Gruppe. Für jede Primzahl p ist $\mathcal{Z}(p^\infty) := (\mathbb{Z}(p^\infty), \cdot, ^{-1}, 1)$ divisibel, wobei

$$Z(p^\infty) := \{a \in \mathbb{C} \mid \exists k \in \mathbb{N} : a^{p^k} = 1\}.$$

Es gilt $\mathcal{Z} \xrightarrow{a} \mathcal{Q}$ und $\mathcal{Z}_{p^k} \xrightarrow{a} \mathcal{Z}(p^\infty)$.

Bemerkung. Jede abelsche Gruppe läßt sich in eine divisible Gruppe einbetten.

Beweis: Wegen Satz 4.17 genügt es die Behauptung für endlich erzeugte abelsche Gruppen $\mathcal{H}$ zu zeigen. Da für geeignete Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$,

$$\mathcal{H} \cong \mathcal{Z} \times \ldots \times \mathcal{Z} \times \mathcal{Z}_{p_1^{k_1}} \times \ldots \times \mathcal{Z}_{p_r^{k_r}}$$

gilt

$$\mathcal{H} \xrightarrow{a} \mathcal{Q} \times \ldots \times \mathcal{Q} \times \mathcal{Z}(p_1^\infty) \times \ldots \times \mathcal{Z}(p_r^\infty).$$

$\square$

Durch Ersetzung von freien Variablen durch Konstante lassen sich einige Ergebnisse für Sätze auf Formeln übertragen; so lautet etwa eine Version von Satz 4.13 für Formeln:

Satz 4.19 *$\Sigma \subseteq L_0^S$, $\varphi \in L_n^S$, $\mathcal{A}$ S-Struktur, $\bar{a} \in A$: Äquivalent sind:*

1. *Es gibt $\mathcal{B}$ ($\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \models \Sigma$ und $\mathcal{B} \models \varphi[\bar{a}]$).*

2. *Für allle universellen* $\psi \in L_n^S$ *mit* $\Sigma \models \varphi \to \psi$*:* $\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}]$.

Definition 4.20 $\mathcal{K}$ Klasse von S-Strukturen.
$\mathcal{K}$ ist gegen *Substrukturen abgeschlossen*, wenn $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$ aus $\mathcal{B} \in \mathcal{K}$ und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ folgt. $\mathcal{K}$ ist gegen *Erweiterungen abgeschlossen*, wenn $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$ aus $\mathcal{B} \in \mathcal{K}$ und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ folgt.

Satz 4.21 *Für eine axiomatisierbare Klasse* $\mathcal{K}$ *sind äquivalent:*

1. $\mathcal{K}$ *ist gegen Substrukturen abgeschlossen.*

2. $\mathcal{K}$ *hat ein Axiomensystem, das aus Allsätzen besteht.*

Die Richtung 2. $\Rightarrow$ 1. ist klar und 1. $\Rightarrow$ 2. ergibt ich aus dem folgenen Lemma für $\Sigma_0 := \emptyset$ und $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma_1)$.

Lemma 4.22 $\Sigma_0, \Sigma_1 \subseteq L_0^S$. *Gelte*

wenn $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models \Sigma_0$*,* $\mathcal{B} \models \Sigma_1$ *und* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$*, so* $\mathcal{A} \models \Sigma_1$.

Dann existiert eine Menge Σ *von Allsätzen mit* $\mathrm{Mod}(\Sigma_0 \cup \Sigma_1) = \mathrm{Mod}(\Sigma_0 \cup \Sigma)$.

Beweis: Wir setzen

$$\Sigma \ := \ \{\varphi \in L_0^S \mid \varphi \text{ Allsatz}, \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \models \varphi\}.$$

Dann $\mathrm{Mod}(\Sigma_0 \cup \Sigma_1) \subseteq \mathrm{Mod}(\Sigma_0 \cup \Sigma)$. Sei $\mathcal{A} \models \Sigma_0 \cup \Sigma$. Nach Satz 4.13 gibt es $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ und $\mathcal{B} \models \Sigma_0 \cup \Sigma_1$. Nach Voraussetzung gilt dann $\mathcal{A} \models \Sigma_1$, d.h. $\mathcal{A} \models \Sigma_0 \cup \Sigma_1$. □

Lemma 4.23 (Endlichkeitslemma) $I \neq \emptyset$, $\forall i \in I : \Psi^i \neq \emptyset$. *Gelte*

$$\Phi \models \psi \leftrightarrow \bigvee_{i \in I} \bigwedge \Psi^i.$$

Dann gibt es ein endliches $I_0 \subseteq I$*,* $I_0 \neq \emptyset$*, und für* $i \in I_0$ *endliche* $\Psi_0^i \subseteq \Psi^i$*,* $\Psi_0^i \neq \emptyset$ *mit*

$$\Phi \models \psi \leftrightarrow \bigvee_{i \in I_0} \bigwedge \Psi_0^i.$$

Beweis: Sei $i \in I$. Nach Voraussetzung $\Phi \cup \Psi^i \models \psi$. Nach Endlichkeitssatz existiert $\Psi_0^i \subseteq \Psi^i$ endlich, o.B.d.A. $\Psi_0^i \neq \emptyset$, $\Phi \cup \Psi_0^i \models \psi$. Dann $\Phi \models \bigwedge \Psi_0^i \to \psi$ und für jedes $I_1 \subseteq I$, $I_1 \neq \emptyset$,

$$(*) \qquad \Phi \models \bigvee_{i \in I_1} \bigwedge \Psi_0^i \to \psi.$$

Weiterhin gilt nach Voraussetzung

$$\Phi \models \psi \to \bigvee_{i \in I} \bigwedge \Psi_0^i.$$

Insbesondere: Nicht Erf $\Phi \cup \{\psi\} \cup \{\neg \bigwedge \Psi_0^i \mid i \in I\}$. Nach dem Endlichkeitsatz existiert endliches $I_0 \subseteq I$, $I_0 \neq \emptyset$, mit

$$\Phi \models \psi \to \bigvee_{i \in I_0} \bigwedge \Psi_0^i.$$

Für $I_1 = I_0$ liefert $(*)$ die Behauptung. $\square$

Folgerung 4.24 *$\Psi \neq \emptyset$.*

1. *(I einelementig) Wenn $\Phi \models \psi \leftrightarrow \bigwedge \Psi$, so existiert endliches $\Psi_0 \subseteq \Psi$, $\Psi_0 \neq \emptyset$, $\Phi \models \psi \leftrightarrow \bigwedge \Psi_0$.*

2. *(Ψ_i einelementig) Wenn $\Phi \models \psi \leftrightarrow \bigvee \Psi$, so existiert endliches $\Psi_0 \subseteq \Psi$, $\Psi_0 \neq \emptyset$, $\Phi \models \psi \leftrightarrow \bigvee \Psi_0$.*

Satz 4.25 *$\Sigma \subseteq L_0^S$, $\varphi \in L_n^S$. Gelte: ("φ ist in Modellen von Σ gegen Substrukturen abgeschlossen") Wenn $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models \Sigma$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, $\bar{a} \in A^n$ und $\mathcal{B} \models \varphi[\bar{a}]$, so $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}]$. Dann gibt es ein universelles $\psi \in L_n^S$ mit $\Sigma \models \varphi \leftrightarrow \psi$.*

Beweis: Nach Lemma 4.22 (für Formeln) gibt es eine Menge $\Psi \subseteq L_n^S$ von universellen Ausdrücken mit $\Sigma \models \varphi \leftrightarrow \bigwedge \Psi$. Jetzt ergibt sich die Behauptung aus der vorangehenden Folgerung. $\square$

Beachte für eine Klasse $\mathcal{K}$ gilt: $\mathcal{K}$ ist gegen Erweiterungen abgeschlossen gdw $\mathcal{K}^c$ ist gegen Substrukturen abgeschlossen; hierbei ist

$$\mathcal{K}^c := \{\mathcal{A}\ S\text{-Struktur} \mid \mathcal{A} \notin \mathcal{K}\}.$$

Satz 4.26 *1. Ist $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\chi)$ gegen Erweiterungen abgeschlossen, so existiert existentielles $\psi \in L_0^S$ mit $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\psi)$.*

2. Sei $\Sigma \subseteq L_0^S$, $\varphi \in L_n^S$. Gelte

$$\textit{Wenn } \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}\ \mathcal{A}, \mathcal{B} \models \Sigma,\ \bar{a} \in A^n \textit{ und } \mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}], \textit{ so } \mathcal{B} \models \varphi[\bar{a}].$$

Dann gibt es existentielles $\psi \in L_n^S$ mit $\Sigma \models \varphi \leftrightarrow \psi$.

Beweis: etwa 1.: $\mathcal{K}^c = \mathrm{Mod}(\neg\chi)$ ist gegen Substrukturen abgeschlossen. Daher existiert nach Satz 4.19 ein universelles ψ_0 mit $\mathcal{K}^c = \mathrm{Mod}(\psi_0)$. $\neg\psi_0$ ist logisch äquivalent zu existentiellem ψ und $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\psi)$. □

5 Ultraprodukte

Definition 5.1 $I \neq \emptyset$.

1. Für $i \in I$ sei A_i eine Menge.

$$\Pi_I A_i \quad := \quad \{a \mid a : I \to \bigcup_I A_i, \forall i \in I : a(i) \in A_i\}$$

   ist das *Produkt* der Mengen A_i. Für $a \in \Pi_I A_i$ schreiben wir auch $\langle a(i) | i \in I \rangle$.

2. Für $i \in I$ sei $\mathcal{A}_i$ eine S-Struktur. Das *Produkt* $\mathcal{A}$ der Strukturen $\mathcal{A}_i$, $\mathcal{A} := \Pi_I \mathcal{A}_i$, ist die S-Struktur mit:

   - $A := \Pi_I A_i$.
   - Für $c \in S$: $c^{\mathcal{A}} := \langle c^{\mathcal{A}_i} | i \in I \rangle$.
   - Für $f \in S$, $a_1, \ldots, a_n \in A$:

$$f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) := \langle f^{\mathcal{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i)) | i \in I \rangle.$$

   - Für $R \in S$, $a_1, \ldots, a_n \in A$:

$$R^{\mathcal{A}} a_1, \ldots, a_n \text{ gdw } \forall i \in I : R^{\mathcal{A}_i} a_1(i), \ldots, a_n(i).$$

   Wenn $\forall i, j \in I : \mathcal{A}_i = \mathcal{A}_j = \mathcal{B}$, so schreiben wir auch $\mathcal{B}^I$ für $\Pi_I \mathcal{B}$. $\mathcal{B}^I$ ist die *Potenz* von $\mathcal{B}$ zum Exponenten I.

Bemerkung 5.2 *Seien $I, \mathcal{A}_i$ und $\mathcal{A}$ wie eben. Dann gilt für $t \in T_n^S$ und $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$:*

$$t^{\mathcal{A}}[a_0, \ldots, a_{n-1}] =< t^{\mathcal{A}_i}[a_0(i), \ldots, a_{n-1}(i)] | i \in I >$$

Der Beweis erfolgt durch Induktion über t.

Beispiel 5.3 $I = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = (\mathbb{Q}, <)^{\mathbb{N}}$. Dann $(q_0, q_1, \ldots) <^{\mathcal{A}} (r_0, r_1, \ldots)$ gdw $\forall n \in \mathbb{N} : q_n < r_n$. $<^{\mathcal{A}}$ ist keine Ordnung, da etwa weder $(0, 0, \ldots) <^{\mathcal{A}} (0, 1, 0, 0, \ldots)$ noch $(0, 1, 0, 0, \ldots) <^{\mathcal{A}} (0, 0, \ldots)$.

Definition 5.4 $I \neq \emptyset$, $E \subseteq P(I)$.

1. E hat die *endliche Durchschnittseigenschaft*, ede E, gdw $E \neq \emptyset$ und $\forall k \geq 0,\ X_0, \ldots, X_k \in E:\ X_0 \cap \ldots X_k \neq \emptyset$

2. E *Filter* auf I gdw (*a*) $\emptyset \notin E,\ E \neq \emptyset$.
   (*b*) Wenn $X \in E$ und $X \subseteq Y \subseteq I$, so $Y \in E$.
   (*c*) Wenn $X, Y \in E$, so $X \cap Y \in E$.

3. E *Ultrafilter* auf I gdw (a), (b), (c) und
   (d) $\forall X \subseteq I (X \in E$ oder $(I \setminus X) \in E$.

Bemerkungen und Beispiele 5.5 1. Jeder Ultrafilter ist ein Filter.

2. Jeder Filter hat die ede.

3. Ist I unendlich, so ist

$$F_{\mathrm{ce}}(I) \quad := \quad \{X \subseteq I \mid I \setminus X \text{ endlich}\}$$

   der *Filter der coendlichen Mengen.*

4. Wenn ede E, so ist

$$F_E \quad := \quad \{X \subseteq I \mid \exists k \geq 0,\ X_0, \ldots, X_k \in E : X_0 \cap \ldots X_k \subseteq X\}$$

   ist ein Filter, der *von E erzeugte Filter*. Es gilt

   - $E \subseteq F_E$.
   - Wenn F Filter und $E \subseteq F$, so $F_E \subseteq F$.

5. Wenn ede E und $X \subseteq I$, so ede $E \cup \{X\}$ oder ede $E \cup \{(I \setminus X)\}$. Insbesondere: Ist F ein Filter und $X \subseteq I$, so gibt es einen Filter F' mit $(F \subseteq F'$ und $(X \in F'$ oder $(I \setminus X) \in F'))$.

6. Für einen Filter F sind äquivalent:

   (a) F Ultrafilter.

   (b) $\forall X \subseteq I$ (entweder $X \in F$ oder $(I \setminus X) \in F$).

   (c) F ist ein maximaler Filter: Für alle Filter F' auf I: wenn $F \subseteq F'$, so $F = F'$.

   (d) $\forall X, Y \subseteq I$ (wenn $X \cup Y \in F$, so $(X \in F$ oder $Y \in F)$).

7. Für $X_0 \subseteq I$, $X_0 \neq \emptyset$, ist $F(X_0) := \{X \subseteq I \mid X_0 \subseteq X\}$ ein Filter. $F(X_0)$ ist ein Ultrafilter gdw X_0 einelementig.

Beweis: zu 2: Für einen Filter F und $X_0, \ldots, X_k \in F$ gilt $X_0 \cap \ldots \cap X_k \in E$ und somit $X_0 \cap \ldots \cap X_k \neq \emptyset$.

zu 4: $\emptyset \notin F_E$, sonst gibt es $X_0, \ldots, X_k \in E$ mit $X_0 \cap \ldots \cap X_k = \emptyset$, ein Widerspruch zu ede E. Wegen $E \subseteq F_E$ gilt $F_E \neq \emptyset$. Wenn $X, Y \in E$, etwa $X_0 \cap \ldots \cap X_k \subseteq X$ und $Y_0 \cap \ldots \cap Y_l \subseteq Y$ mit $X_i, Y_j \in E$. Somit $X_0 \cap \ldots \cap X_k \cap Y_0 \cap \ldots \cap Y_k \subseteq X \cap Y$, somit $X \cap Y \in F_E$.

zu 5: Sonst gibt es $X_0, \ldots, X_k, Y_0, \ldots, Y_l$ mit $X_0 \cap \ldots \cap X_k \cap X = \emptyset$ und $Y_0 \cap \ldots \cap Y_l \cap (I \setminus X) = \emptyset$. Dann ist $X_0 \cap \ldots \cap X_k \cap Y_0 \cap \ldots \cap Y_l = \emptyset$.

zu 6: $(a) \Rightarrow (b)$: Wegen (a) gilt $X \in F$ oder $(I \setminus X) \in F$. Wären $X, (I \setminus X) \in F$, so $\emptyset = X \cap (I \setminus X) \in F$, ein Widerspruch.

$(b) \Rightarrow (c)$: Sei $F \subseteq F'$. Ist $X \in (F' \setminus F)$, so nach (b), $(I \setminus X) \in F \subseteq F'$. Somit $\emptyset = X \cap (I \setminus X) \in F'$, ein Widerspruch.

$(c) \Rightarrow (d)$: Sei $X \cup Y \in F$. Wenn $X \notin F$, so gibt es (wegen 5) einen Filter $F' \supseteq F$ mit $X \in F'$ oder $(I \setminus X) \in F'$. Nach (c), $F' = F$. Somit $(I \setminus X) \in F$. Damit $Y \supseteq (I \setminus X) \cap (X \cup Y) \in F$ und somit $Y \in F$.

$(d) \Rightarrow (a)$: Sei $X \subseteq I$. Da $X \cup (I \setminus X) \in F$, gilt wegen (d): $X \in F$ oder $(I \setminus X) \in F$.

zu 7: $F(X_0)$ ist ein Filter wegen 4. für $E := \{X_0\}$. Für einelementiges X_0 handelt es sich um einen Ultrafilter wegen 6.(b). Ist X_0 mindestens zweielementig, etwa $X_0 = X \cup Y$ mit $\emptyset \neq X \neq X_0$ und $\emptyset \neq Y \neq X_0$. Dann $X \cup Y \in F(X_0)$, aber $X \notin F(X_0)$, $Y \notin F(X_0)$. Somit ist $F(X_0)$ kein Ultrafilter. □

Definition 5.6 Sei U ein Ultrafilter.

$$\begin{array}{lll} U \text{ ist } \textit{frei} & \text{gdw} & \forall i \in I : \{i\} \notin U \\ & \text{gdw} & \text{für alle endlichen } X \subseteq I : X \notin U \\ & \text{gdw} & F_{\text{ce}}(I) \subseteq U. \end{array}$$

Ist U nicht frei, so ist U ein *Hauptultrafilter*.

Satz 5.7 (Ultrafiltertheorem) *Jeder Filter – und damit auch jede Menge mit der ede – läßt sich zu einem Ultrafilter erweitern.*

Beweis: Sei F ein Filter auf I. Wegen **??** gilt

$(*)$ $\forall X_1, \ldots, X_k \subseteq I$ gibt es einen Filter $F' \supseteq F$ mit für alle $k = 1, \ldots, n$ $(X_k \in F$ oder $(I \setminus X_k) \in F)$.

Wir setzen $S_{\mathrm{BA}} := \{\cap, \cup, \sim, 0, 1\}$ und $S := S_{\mathrm{BA}} \cup \{R\} \cup \{c_X \mid X \subseteq I\}$ mit einstelligem R. Sei $\mathcal{A}$ die S-Struktur $\mathcal{A} := (\mathcal{P}(I), F, (X)_{X \subseteq I})$, wobei $\mathcal{P}(I) := (P(I), \cap, \cup, \sim, \emptyset, I)$. Für $S' := S \cup \{Q\}$ mit einstelligem Q sei Σ die folgende Menge von S'-Sätzen:

$$\forall x(Rx \to Qx)$$
$$\neg Q0$$
$$\forall x \forall y((Qx \wedge x \cap y = x) \to Qy)$$
$$\forall x \forall y((Qx \wedge Qy) \to Qx \cap y)$$
$$Qc_x \vee Qc_{(I \setminus X)} \quad \text{für } X \subseteq I.$$

Es genügt zu zeigen

$$(+) \qquad \mathrm{Erf}\ D_a(\mathcal{A}) \cup \Sigma.$$

Dann existiert nämlich $(\mathcal{B}, R^B, (c_X^B)_{X \subseteq I}, Q^B) \models \Sigma$ mit $(\mathcal{B}, R^B, (c_X^B)_{X \subseteq I}) \supseteq (\mathcal{P}(I), F, (X)_{X \subseteq I})$. Da Σ eine Menge von Allsätzen ist, gilt dann $(\mathcal{P}(I), F, (X)_{X \subseteq I}, U) \models \Sigma$, wobei $U := Q^B \cap P(I)$ ein Ultrafilter ist.

Nach dem Endlichkeitssatz ist die Satzmenge in $(+)$ erfüllbar, denn zu jeder endlichen Teimenge existiert wegen $(*)$ ein Modell der Gestalt $(\mathcal{P}(I), F, (X)_{X \subseteq I}, F')$. $\square$

Folgerung 5.8 *1. Ist I unendlich, so gibt es einen freien Ultrafilter auf I.*

2. Ist I endlich, so ist jeder Ultrafilter nicht frei (also ein Hauptultrafilter).

Im folgenden sei stets $I \neq \emptyset$, für $i \in I$, $A_i \neq \emptyset$ bzw. $\mathcal{A}_i$ eine S-Struktur.

$\sim_F$ sei die folgende zweistellige Relation auf $\Pi_I A_i$.

$$a \sim_F \quad \text{gdw} \quad X_{a=b} := \{i \mid a(i) = b(i)\} \in F.$$

Lemma 5.9 *1. $\sim_F$ ist eine Äquivalenzrelation.*

2. $\sim_F$ ist verträglich mit $f^{\Pi_I \mathcal{A}_i}$ für jedes $f \in S$, d.h. wenn $a_1 \sim_F b_1, \ldots, a_n \sim_F b_n$, so $f^{\Pi_I \mathcal{A}_i}(a_1, \ldots, a_n) \sim_F f^{\Pi_I \mathcal{A}_i}(b_1, \ldots, b_n)$.

3. *$\sim_F$ ist verträglich mit $R^{\Pi_I \mathcal{A}_i}$ für jedes $R \in S$, d.h. wenn $a_1 \sim_F b_1, \ldots,$ $a_n \sim_F b_n$, so $\{i \mid R^{\mathcal{A}_i} a_1(i) \ldots a_n(i)\} \in F$ gdw $\{i \mid R^{\mathcal{A}_i} b_1(i) \ldots b_n(i)\} \in F$.*

Beweis: zu 1.: Wegen $X_{a=a} = I \in F$ ist $\sim_F$ reflexiv, wegen $X_{a=b} = X_{b=a}$ symmetrisch, und wegen $X_{a=c} \subseteq X_{a=b} \cap X_{b=c}$ transitiv.

2. und 3. gelten wegen $X_{a_1=b_1} \cap \ldots \cap X_{a_n=b_n} \subseteq \{i \mid f^{\mathcal{A}_i}(a_1(i), \ldots) = f^{\mathcal{A}_i}(b_1(i), \ldots)\}$ und $X_{a_1=b_1} \cap \ldots \cap X_{a_n=b_n} \subseteq \{i \mid R^{\mathcal{A}_i} a_1(i), \ldots \text{ gdw } R^{\mathcal{A}_i} b_1(i), \ldots\}$.

□

Wir setzen:

$a_F := \{b \in \Pi_I A_i \mid b \sim_F a\}$, die Äquivalenzklasse von a bzgl. $\sim_F$.

$\Pi_I A_i / F := \{a_F \mid a \in \Pi_I A_i\}$, das *reduzierte Produkt* der A_i nach F.

$(\mathcal{A} :=)\ \Pi_I \mathcal{A}_i / F$, das *reduzierte Produkt* der $\mathcal{A}_i$ nach F sei die S-Struktur mit Träger $A := \Pi_I A_i / F$ und

$$\begin{array}{rcl} c^{\mathcal{A}} & := & c^{\Pi_I \mathcal{A}_i}{}_F \, (= \langle c_i^{\mathcal{A}_i} \mid i \in I\rangle_F). \\ f^{\mathcal{A}}(a_{1F}, \ldots, a_{nF}) & := & f^{\Pi_I \mathcal{A}_i}(a_1, \ldots, a_n)_F = \langle f^{\mathcal{A}_i}(a_1(i), \ldots) \mid i \in I\rangle_F \\ R^{\mathcal{A}} a_{1F} \ldots a_{nF} & \text{gdw} & \{i \mid R^{\mathcal{A}_i} a_1(i) \ldots a_n(i)\} \in F. \end{array}$$

Ist F Ultrafilter, so ist $\Pi_I \mathcal{A}_i / F$ das *Ultraprodukt* der $\mathcal{A}_i$ nach F. Wenn $\forall i, j \in I$: $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_j = \mathcal{B}$, so ist $\mathcal{B}^I / F$ die *reduzierte Potenz* bzw. *Ultrapotenz* von $\mathcal{B}$ nach F.

Beispiele 5.10 1. Ist $F = \{I\}$, so $a \sim_F b$ gdw $a = b$: Daher $\Pi_I \mathcal{A}_i / F \cong \Pi_I \mathcal{A}_i$ via $a_F \mapsto a$.

2. Wenn $X_0 \subseteq I$, $X_0 \neq \emptyset$, $F := F(X_0) = \{Y \mid X_0 \subseteq Y\}$, so $a \sim_F b$ gdw $a|X_0 = b|X_0$. Und $\Pi_I \mathcal{A}_i / F \cong \Pi_{X_0} \mathcal{A}_i$ via $a_F \mapsto a|X_0$. Insbesondere haben wir für $X_0 = \{i_0\}$: $\Pi_I \mathcal{A}_i / F(\{i_0\}) \cong \mathcal{A}_{i_0}$.

3. Sei $F := F_{\mathrm{ce}}(\mathbb{N})$, $\mathcal{A} := (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)^{\mathbb{N}}_F$. Dann

$$\begin{array}{rcl} (q_0, q_1, \ldots) \sim_F (r_0, r_1, \ldots) & \text{gdw} & \{n \mid q_n = r_n\} \in F \\ & \text{gdw} & \exists m \forall n \geq m : q_n = r_n \\ (q_0, q_1, \ldots)_F <^{\mathcal{A}} (r_0, r_1, \ldots)_F & \text{gdw} & \exists m \forall n \geq m : q_n < r_n \\ (q_0, q_1, \ldots)_F \cdot (r_0, r_1, \ldots)_F & = & (q_0 \cdot r_0, q_1 \cdot r_1, \ldots)_F. \end{array}$$

Somit gilt für $a, b \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $a = (0,1,0,1,\dots)$, $b = (1,0,1,0,\dots)$

$$a_F \neq b_F, \quad \text{nicht } a_F <^{\mathcal{A}} b_F, \quad \text{nicht } b_F <^{\mathcal{A}} a_F$$

und $a_F \cdot b_f = 0^{\mathcal{A}}$, obwohl weder $a_F = 0^{\mathcal{A}}$ noch $b_F = 0^{\mathcal{A}}$, da weder die Menge der geraden noch die Menge der ungeraden Zahlen zu F gehören. Dies ist bei Ultrafiltern nicht möglich; in der Tat ist nach dem folgendem Satz das Ultraprodukt von Körpern wieder ein Körper.

Satz 5.11 (Łos) *U Ultrafilter auf I, $\forall i \in I : \mathcal{A}_i$ S-Struktur, $\mathcal{A} = \Pi_I \mathcal{A}_i / U$. Dann*

1. *Für alle $\varphi \in L_0^S$:*

$$\Pi_I \mathcal{A}_i / U \models \varphi \quad gdw \quad \{i \mid \mathcal{A}_i \models \varphi\} \in U.$$

   Insbesondere: Wenn $\forall i \in I$ $\mathcal{A}_i \models \varphi$, so $\Pi_I \mathcal{A}_i / U \models \varphi$.

2. *Sei $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_{n-1} \in \Pi_I A_i$.*

   (a) *Für $t \in T_n^S$:*

$$t^{\mathcal{A}}[a_{0U}, \dots, a_{n-1U}] = t^{\Pi_I \mathcal{A}_i}[a_0, \dots, a_{n-1}]_U = \langle t^{\mathcal{A}_i}[a_0(i), \dots, a_{n-1}(i)] | i \in I \rangle_U$$

   (b) *Für $\varphi \in L_n^S$:*

$$\Pi_I \mathcal{A}_i / U \models \varphi[a_{0U}, \dots, a_{n-1U}] \quad gdw \quad \{i \mid \mathcal{A}_i \models \varphi[a_0(i), \dots, a_{n-1}(i)]\} \in U.$$

Für reduzierte Produkte gilt 2(a) und 1. und 2(b) jeweils nur für atomares φ.

Beweis: Zu 2(a): Induktion über den Aufbau von t:
$t = v_k$: $v_k^{\mathcal{A}}[a_{0U}, \dots, a_{n-1U}] = a_{kU} = (v_k^{\Pi_I \mathcal{A}_i}[a_0, \dots, a_{n-1}])_U$.
$t = c$: $c^{\mathcal{A}} = (c^{\Pi_I \mathcal{A}_i})_U$.
$t = f t_1 \dots t_k$:

$$\begin{aligned}
&t^{\mathcal{A}}[a_{0U}, \dots, a_{n-1U}] = f^{\mathcal{A}}(t_1^{\Pi_I \mathcal{A}_i}[a_0, \dots, a_{n-1}]_U, \dots, t_k^{\Pi_I \mathcal{A}_i}[a_0, \dots, a_{n-1}]_U) \\
&= f^{\mathcal{A}}(t_1^{\Pi_I \mathcal{A}_i}[a_0, \dots, a_{n-1}], \dots, t_k^{\Pi_I \mathcal{A}_i}[a_0, \dots, a_{n-1}]) && \text{nach Ind.vor.} \\
&= (f^{\Pi_I \mathcal{A}_i}(t_1^{\Pi_I \mathcal{A}_i}[a_0, \dots, a_{n-1}], \dots, t_k^{\Pi_I \mathcal{A}_i}[a_0, \dots, a_{n-1}]))_U && \text{nach Def. von } f^{\mathcal{A}} \\
&= (t^{\Pi_I \mathcal{A}_i}[a_0, \dots, a_{n-1}]))_U.
\end{aligned}$$

Zu 2(b): Induktion über den Aufbau von φ:

$\varphi = t_1 = t_2$:

$$\begin{array}{ll}
& \mathcal{A} \models t_1 = t_2[a_0, \ldots, a_{n-1}]_U \\
\iff & t_1^{\mathcal{A}}[a_{0U}, \ldots, a_{n-1U}] = t_2^{\mathcal{A}}[a_{0U}, \ldots, a_{n-1U}] \\
\iff & \{i \in I \mid t_1^{\mathcal{A}_i}[a_0(i), \ldots, a_{n-1}(i)] = t_2^{\mathcal{A}_i}[a_0(i), \ldots, a_{n-1}(i)]\} \in U \\
& \text{ nach Def. von } \sim_U \text{ und wegen } 2(\text{a}) \\
\iff & \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models t_1 = t_2[a_0(i), \ldots, a_{n-1}(i)]\} \in U
\end{array}$$

$\varphi = Rt_1 \ldots t_k$:

$$\begin{array}{ll}
& \mathcal{A} \models Rt_1 \ldots t_k[a_0, \ldots, a_{n-1}]_U \\
\iff & R^{\mathcal{A}} t_1^{\mathcal{A}}[a_{0U}, \ldots, a_{n-1U}] \ldots t_k^{\mathcal{A}}[a_{0U}, \ldots, a_{n-1U}] \\
\iff & \{i \in I \mid R^{\mathcal{A}_i} t_1^{\mathcal{A}}[a_0(i), \ldots, a_{n-1}(i)] \ldots t_k^{\mathcal{A}}[a_0(i), \ldots, a_{n-1}(i)]\} \in U \\
& \text{ nach Def. von } R^{\mathcal{A}} \text{ und wegen } 2(\text{a}) \\
\iff & \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models Rt_1 \ldots t_k[a_0(i), \ldots, a_{n-1}(i)]\} \in U
\end{array}$$

$\varphi = \neg\psi$:

$$\begin{array}{ll}
& \mathcal{A} \models \neg\psi[a_0, \ldots, a_{n-1}]_U \\
\iff & \text{nicht } \mathcal{A} \models \psi[a_{0U}, \ldots, a_{n-1U}] \\
\iff & \text{nicht } \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models \psi[a_0(i), \ldots, a_{n-1}(i)]\} \in U \quad \text{nach Ind.vor.} \\
\iff & \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models \neg\psi[a_0(i), \ldots, a_{n-1}(i)]\} \in U \quad \text{da } U \text{ Ultrafilter}
\end{array}$$

$\varphi = (\psi \vee \chi)$:

$$\begin{array}{ll}
& \mathcal{A} \models (\psi \vee \chi)[a_{0U}, \ldots, a_{n-1U}] \\
\iff & \mathcal{A} \models \psi[a_{0U}, \ldots, a_{n-1U}] \text{ oder } \mathcal{A} \models \chi[a_{0U}, \ldots, a_{n-1U}] \\
\iff & X := \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models \psi[a_0(i), \ldots, a_{n-1}(i)]\} \in U \\
& \text{oder } Y := \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models \chi[a_0(i), \ldots, a_{n-1}(i)]\} \in U \quad \text{nach Ind.vor.} \\
\iff & X \cup Y \in U \quad \text{da } U \text{ Ultrafilter} \\
\iff & \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models (\psi \vee \chi)[a_0(i), \ldots, a_{n-1}(i)]\} \in U \text{ da } U \text{ Ultrafilter}
\end{array}$$

$\varphi = \exists v_n \psi$:

$$\begin{array}{ll}
& \mathcal{A} \models \exists v_n \psi[a_{0U}, \ldots, a_{n-1U}] \\
\iff & \text{ex. } a \in \Pi_I \mathcal{A}_i : \mathcal{A} \models \psi[a_{0U}, \ldots, a_{n-1U}, a_U] \\
\iff & \text{ex. } a \in \Pi_I \mathcal{A}_i : \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models \psi[a_0(i), \ldots, a_{n-1}(i), a(i)]\} \in U \quad \text{nach Ind.vor.} \\
\iff & X := \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models \exists v_n \psi[a_0(i), \ldots, a_{n-1}(i)]\} \in U
\end{array}$$

Bei der letzten Äquivalenz ist die Richtung von oben nach unten klar. Für die andere Richtung definieren wir $a \in \Pi_I \mathcal{A}_i$ so, dass für $i \in X$ gilt

$$\mathcal{A}_i \models \psi[a_0(i), \ldots, a_{n-1}(i), a(i)]$$

(für $i \notin I$ sei $a(i)$ beliebig).

Bemerkungen und Beispiele 5.12 1) Jede axiomatisierbare Klasse $\mathcal{K}$ ist gegen Ultraprodukte abgeschlossen; d.h. für alle I, $\mathcal{A}_i \in \mathcal{K}$ und Ultrafilter U gilt: $\Pi_I \mathcal{A}_i / U \in \mathcal{K}$

Ist nämlich $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$, so gilt $\mathcal{A}_i \models \varphi$ für $\varphi \in \Sigma$ und jedes $i \in I$ $\mathcal{A}_i \models \varphi$. Somit $\Pi_I \mathcal{A}_i / U$ nach dem Satz von Łos.

2) Sei U ein freier Ultrafilter auf I und sei $\varphi \in L_0^S$. Ist $\{i \mid \mathcal{A}_i \not\models \varphi\}$ endlich, so $\Pi_I \mathcal{A}_i / U \models \varphi$. (Zum Beweis beachte, daß $\{i \mid \mathcal{A}_i \models \varphi\} \in F_{\mathrm{ce}}(I) \subseteq U$).

3) Sei $\Sigma = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots\}$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{A}_n \models (\varphi_0 \wedge \ldots \wedge \varphi_n)$. Für jeden freien Ultrafilter auf $\mathbb{N}$ gilt dann $\Pi_{\mathbb{N}} \mathcal{A}_n / U \models \Sigma$.

Zum Beweis: Für $k \in \mathbb{N}$ ist $\{n \mid \mathcal{A}_n \not\models \varphi_k\} \subseteq \{n \mid n < k\}$. Die Behauptung ergibt sich somit aus 2).

4) Ist U ein freier Ultrafilter auf I und $\forall n \in \mathbb{N} : \{i \mid |A_i| < n\}$ endlich, so ist $\Pi_I A_i / U$ unendlich. (Wende 2) auf $\varphi_{\geq n}$ an.)

5) Eine Gruppe $\mathcal{G}$ ist *periodisch*, wenn $\forall a \in G \exists n \geq 1$: $a^n = e$, d.h. wenn jedes Element endliche Ordnung besitzt. Ist U ein freier Ultrafilter auf der Menge P der Primzahlen, so ist $\Pi_P \mathcal{Z}_p / U$ unendlich, torsionsfrei und damit nicht periodisch. Somit ist die Klasse der periodischen Gruppen nicht axiomatisierbar.

Beweis: $\Pi_P \mathcal{Z}_p / U$ ist torsionsfrei: Sei nämlich $a \in \Pi Z_p$ und $n \geq 1$ und $a_U{}^n = e$. Dann

$$\Pi_P \mathcal{Z}_p / U \models x^n = e[a_U],$$

nach dem Satz von Łos somit

$$\{p \in P \mid \mathcal{Z}_p \models x^n = e[a(p)]\} \in U,$$

und daher

$$\{p \in P \mid p|n \text{ oder } a(p) = e\} \in U.$$

Da U ein Ultrafilter ist, gilt $\{p \in P \mid p|n\} \in U$ oder $\{p \in P \mid a(p) = e\} \in U$. Da U frei ist, ist die erste Menge nicht in U. Somit $a_U = e$. □

6) Die Klasse der torsionsfreien Gruppen ist axiomatisierbar aber nicht endlich axiomatisierbar. (Wäre Mod(φ) die Klasse der torsionsfreien Gruppen, so wäre $\Pi_P \mathcal{Z}_p/U \models \varphi$, obwohl $\{p \in P \mid \mathcal{Z}_p \models \varphi\} = \emptyset$.)

7) Sei $\Sigma \in L_0^S$. Zu jedem endlichen $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ existiere ein $i \in I$ mit $\mathcal{A}_i \models \Sigma_0$. Dann gibt es einen Ultrafilter auf I mit $\Pi_I \mathcal{A}_i/U \models \Sigma$.

Beweis: Für $\varphi \in \Sigma$ setze $X_\varphi := \{i \mid \mathcal{A}_i \models \varphi\}$ und $E := \{X_\varphi \mid \varphi \in \Sigma\}$. E hat ede: Sind $\varphi_0, \ldots, \varphi_k \in \Sigma$, so wähle i mit $\mathcal{A}_i \models \{\varphi_0, \ldots, \varphi_k\}$. Dann $i \in X_{\varphi_0} \cap \ldots \cap X_{\varphi_k}$. Für jeden Ultrafilter U mit $E \subseteq U$ gilt $\Pi_I \mathcal{A}_i/U \models \Sigma$.$\square$

8) Ist jede endliche Teimenge von $\Sigma \subseteq L_0^S$ erfüllbar, so auch Σ. (Zum Beweis setzen wir $I := \{\Sigma_0 \subseteq \Sigma \mid \Sigma_0 \text{ endlich}\}$ und wählen für $i \in I$, $i = \Sigma_0$ ein Modell $\mathcal{A}_i$ von Σ_0. Die Beahauptung folgt dann aus 7).)

9) ("In Produkten von Körper entsprechen Ideale Filtern und maximale Ideale Ultrafiltern") Für $i \in I$ sei $\mathcal{A}_i$ ein Körper. Sei J ein Ideal im Ring $\Pi_I \mathcal{A}_i$. Für $a, b \in \Pi_I A_i$ definiere $\sim_J$ durch

$$a \sim_J b \quad \text{gdw} \quad b - a \in J.$$

Sei die Nullmenge 0_a von a gegeben durch $0_a := \{i \mid a(i) = 0\}$.

(a) Ist J ein Ideal in $\Pi_I \mathcal{A}_i$ und $J \neq \Pi_I A_i$, so ist $F_J := \{0_a \mid a \in J\}$ ein Filter und $\Pi_I \mathcal{A}_i/J = \Pi_I \mathcal{A}_i/F_J$. Es gilt für $d \in \Pi_I A_i$:

$$(*) \qquad d \in J \quad \text{gdw} \quad 0_d \in F_J.$$

Wir zeigen zunächst $(*)$. "$\Rightarrow$" folgt unmittelbar aus der Definition von F_J. Zu "$\Leftarrow$": Sei $0_d \in F_J$, etwa $0_d = 0_a$ mit $a \in J$. Dann ist

$$d = (<0 \mid i \in 0_a> \cup <\frac{d(i)}{a(i)} \mid i \notin 0_a>) \cdot a \in J$$

.

F_J ist Filter, da

- $\emptyset \notin F_J$: Da $1 \notin J$, gilt $\emptyset = 0_1 \notin F_J$ wegen $(*)$.
- $I \in F_J$: Da $0 \in J$ gilt $0_0 = I \in F_J$.
- Wenn $X \in F_J$, $X \subseteq Y$, so $Y \in F_J$: Wähle $a \in J$ mit $X = 0_a$. Für $b := <0 \mid i \in Y> \cup <1 \mid i \notin Y>$ gilt $b \cdot a \in J$ und somit $Y = 0_{b \cdot a} \in F_J$.

- Wenn $X, Y \in F_J$, so $X \cap Y \in F_J$: Wähle $a, b \in J$ mit $X = 0_a$ und $Y = 0_b$. Setze $c := <1 \mid i \in 0_a> \cup <0 \mid i \notin 0_a>$. Dann $a + c \cdot b \in J$ und somit $0_{a+c\cdot b} \in F_J$. Wir zeigen noch, daß $0_{a+c\cdot b} = 0_a \cap 0_b$. Die Inklusion $0_{a+c\cdot b} \supseteq 0_a \cap 0_b$ ist klar. Sei nun $i \in 0_{a+c\cdot b}$. Dann $i \in 0_a$, da sonst $a(i) \neq 0$, $c(i) = 0$ und somit $(a + c \cdot b)(i) \neq 0$, ein Widerspruch. Also ist $a(i) = 0$ und $c(i) = 1$. Daher $b(i) = (a + c \cdot b)(i) = 0$, somit auch $i \in 0_b$.

Schließlich zeigen wir, daß $\sim_J = \sim_{F_J}$ und damit: $\Pi_I \mathcal{A}_i / J = \Pi_I \mathcal{A}_i / F_J$. Es gilt für $a, b \in \Pi_I A_i$:

$$\begin{aligned} a \sim_{F_J} b \quad & \text{gdw} \quad \{i \mid a(i) = b(i)\} \in F_J \\ & \text{gdw} \quad 0_{b-a} \in F_J \\ & \text{gdw} \quad b - a \in J \quad (\text{wegen } (*)) \\ & \text{gdw} \quad a \sim_J b. \end{aligned}$$

(b) Ist F ein Filter auf I, so ist $J_F := \{a \mid 0_a \in F\}$ ein von $\Pi_I A_i$ verschiedenes Ideal. Da $F_{(J_F)} = F$, gilt wegen (a): $\Pi_I \mathcal{A}_i / J_F = \Pi_I \mathcal{A}_i / F$.

Beweis: $0 \in J_F$, da $0_0 = I \in F$; $1 \notin J_F$, da $0_1 = \emptyset \notin F$. Sind $a, b \in J_F$, so $0_a, 0_b \in F$ und $0_{a+b} \supseteq 0_a \cap 0_b$. Somit $a + b \in J_F$. Ist $a \in J_F$ und $b \in \Pi_I A_i$, so $0_{b\cdot a} \supseteq 0_a \in F$ und damit $b \cdot a \in J_F$. □

(c) Ist F ein Filter, so gilt: $\Pi_I \mathcal{A}_i / F$ ist ein Körper gdw F ist ein Ultrafilter.

Beweis: Ist F ein Ultrafilter, so ist $\Pi_I \mathcal{A}_i / F$ ein Körper nach dem Satz von Łos. Ist F kein Ultrafilter, so wähle X mit $X, (I \setminus X) \notin F$. Für $c := \langle 1 \mid i \in X \rangle \cup \langle 0 \mid i \in (I \setminus X) \rangle$ und $d := \langle 0 \mid i \in X \rangle \cup \langle 1 \mid i \in (I \setminus X) \rangle$ gilt $c_F \neq 0$, $d_F \neq 0$, $c_F \cdot d_F = 0_F$. □

Für ein Ideal J in $\Pi_I \mathcal{A}_i$ mit $J \neq \Pi_I A_i$ gilt: $\Pi_I \mathcal{A}_i / J$ ist ein Körper gdw J ist maximal. Aus (c) erhalten wir:

(d) J ist maximal gdw F_J ist Ultrafilter.

6 Elementare Substrukturen

Wir wiederholen einige Begriffe und Ergebnisse.

Definition und Bemerkung.

1. Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von S-Strukturen.

   $$\mathrm{Th}(\mathcal{K}) \;:=\; \{\varphi \in L_0^S \mid \text{ für alle } \; \mathcal{A} \in \mathcal{K} : \; \mathcal{A} \models \varphi\}$$

   ist die (elementare) *Theorie* von $\mathcal{K}$.

   $\mathrm{Th}(\mathcal{A}) := \mathrm{Th}(\{\mathcal{A}\}) = \{\varphi \in L_0^S \mid \mathcal{A} \models \varphi\}$ ist die *Theorie* von $\mathcal{A}$.

   Es gilt

   - $\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathcal{K}))$.
   - Wenn $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$, so $\mathrm{Th}(\mathcal{K}) = \{\varphi \in L_0^S \mid \Sigma \models \varphi\}$ und somit $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathcal{K}))$.

2. $$\begin{array}{ll} & \mathcal{A} \text{ und } \mathcal{B} \text{ sind } \textit{elementar äquivalent}, \; \mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \\ \iff & \text{für alle } \varphi \in L_0^S\text{: } (\mathcal{A} \models \varphi \iff \mathcal{B} \models \varphi) \\ \iff & \text{für alle } \varphi \in L_0^S\text{: } (\mathcal{A} \models \varphi \Rightarrow \mathcal{B} \models \varphi) \\ \iff & \mathcal{B} \models \mathrm{Th}(\mathcal{A})) \\ \iff & \mathrm{Th}(\mathcal{A}) = \mathrm{Th}(\mathcal{B}). \end{array}$$

3. $$\begin{array}{ll} & \Sigma \text{ ist } \textit{vollständig} \\ \iff & \mathrm{Erf}\,\Sigma \text{ und für alle } \varphi \in L_0^S\text{: } (\Sigma \models \varphi \text{ oder } \; \Sigma \models \neg\varphi) \\ \iff & \mathrm{Erf}\,\Sigma \text{ und für alle } \mathcal{A}, \mathcal{B} \models \Sigma\text{: } \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}. \end{array}$$

   - $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ ist vollständig.
   - Ist Σ vollständig und $\mathcal{A} \models \Sigma$, so $\mathrm{Mod}(\Sigma) = \{\mathcal{B} \mid \mathcal{B} \equiv \mathcal{A}\} = \mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathcal{A}))$.

Neben dem Begriff der (algebraischen) Substruktur ist in der Modelltheorie der folgende Begriff von Bedeutung:

Definition 6.1 $\mathcal{A}$ ist *elementare Substruktur* von $\mathcal{B}$ (und $\mathcal{B}$ *elementare Erweiterung* von $\mathcal{A}$), $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$, wenn

1. $A \subseteq B$.

2. Für alle $n \geq 0$, $\varphi \in L_n^S$, $\bar{a} \in A^n$

$$\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}] \quad \text{gdw} \quad \mathcal{B} \models \varphi[\bar{a}].$$

Dabei kann 2. durch die folgende äquivalente Forderung ersetzt werden:

- Für alle $n \geq 0$, $\varphi \in L_n^S$, $\bar{a} \in A^n$

$$\text{wenn} \quad \mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}], \quad \text{so} \quad \mathcal{B} \models \varphi[\bar{a}].$$

Bemerkungen und Beispiele 6.2 1) Wenn $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$, so $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. (Wähle $n = 0$.)

2) Wenn $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$, so $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. (Wähle φ quantorenfrei.)

3) Wenn $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ und $\mathcal{B} \preceq \mathcal{C}$, so $\mathcal{A} \preceq \mathcal{C}$.

4) Wenn $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ und A endlich, so $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. (Da $\mathcal{B} \models \varphi_{=|A|}$.)

5) $(\mathbb{N}, +) \subseteq (\mathbb{Z}, +)$, aber $(\mathbb{N}, +) \not\preceq (\mathbb{Z}, +)$. (Da $(\mathbb{Z}, +)$ aber nicht $(\mathbb{N}, +)$ eine Gruppe ist, somit noch nicht einmal $(\mathbb{N}, +) \equiv (\mathbb{Z}, +)$.)

6) $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, <) \cong (\mathbb{N}, <)$, $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, <) \subseteq (\mathbb{N}, <)$ und $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, <) \not\preceq (\mathbb{N}, <)$ (da $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, <) \not\models \exists y\, y < x[1]$ und $(\mathbb{N}, <) \models \exists y\, y < x[1]$).

Satz 6.3 (Tarskis Test) *Sei $\mathcal{B}$ eine S-Struktur und $A_0 \subseteq B$. Dann sind äquivalent:*

1. *A_0 ist der Träger einer elementaren Substruktur von $\mathcal{B}$.*

2. *Für alle $n \geq 0$, $\varphi \in L_{n+1}^S$, $\bar{a} \in A_0^n$:*

$$\textit{wenn} \quad \mathcal{B} \models \exists v_n \varphi[\bar{a}], \quad \textit{so gibt es } a \in A_0 \quad \mathcal{B} \models \varphi[\bar{a}, a].$$

Beweis: 1 $\Rightarrow$ 2: Gelte $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ und $A = A_0$. Mit $\mathcal{B} \models \exists v_n \varphi[\bar{a}]$ gilt $\mathcal{A} \models \exists v_n \varphi[\bar{a}]$. Somit existiert $a \in A_0$ mit $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}, a]$ und daher $\mathcal{B} \models \varphi[\bar{a}, a]$.

2 $\Rightarrow$ 1: Wendet man 2. auf die Formeln $\varphi := v_0 = v_0$, $\varphi := c = v_0$ bzw. $\varphi := f v_0 \ldots v_{n-1} = v_n$, so sieht man, daß A_0 nichtleer ist, die Elemente $c^{\mathcal{B}}$ enthält bzw. gegen die Funktionen $f^{\mathcal{B}}$ abgeschlossen ist; insgesamt ist A_0 also S-abgeschlossen. A_0 ist daher Träger einer Substrutur $\mathcal{A}$ von $\mathcal{B}$. Wir zeigen, daß $\mathcal{A}$ eine elementare Substruktur von $\mathcal{B}$ ist, indem wir durch Induktion über den Aufbau von φ zeigen:

Für alle $n \geq 0$, $\bar{a} \in A_0^n$: wenn $\varphi \in L_n^S$, so

$$\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}] \quad \text{gdw} \quad \mathcal{B} \models \varphi[\bar{a}].$$

Für atomares φ ist die Aussage wegen $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ klar; für $\varphi = \neg\psi$ und $\varphi = (\psi \vee \chi)$ ergibt sich die Behauptung unmittelbar aus der Induktionsvoraussetzung. Sei $\varphi = \exists x \psi \in L_n^S$ (o.B.d.A. $x = v_n$) und $\bar{a} \in A_0^n$. Wenn $\mathcal{A} \models \exists v_n \psi[\bar{a}]$, so gibt es ein $a \in A_0$ mit $\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}a]$; die Induktionsvoraussetzung ergibt $\mathcal{B} \models \psi[\bar{a}a]$ und somit $\mathcal{B} \models \exists v_n \psi[\bar{a}]$. Wenn umgekehrt $\mathcal{B} \models \exists v_n \psi[\bar{a}]$, so gibt es nach 2. ein $a \in A_0$ mit $\mathcal{B} \models \psi[\bar{a}a]$; wiederum ergibt die Induktionsvoraussetzung $\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}a]$, also $\mathcal{A} \models \exists v_n \psi[\bar{a}]$. $\square$

Satz 6.4 *Sei A_0 eine Teilmenge der unendlichen S-Struktur $\mathcal{B}$. Dann hat $\mathcal{B}$ eine unendliche elementare Substruktur $\mathcal{A}$ mit*

$$A_0 \subseteq A \quad \textit{und} \quad |A_0| \leq |A| \leq \max\{|A_0|, |L^S|\}.$$

Insbesondere ist A abzählbar, falls A_0 und S höchstens abzählbar sind.

Beweis: Sei $\lambda := \max\{|A_0|, |L^S|\}$. Für $k \geq 1$ definieren wir Teilmengen A_k, $A_k \subseteq B$, sodaß für alle $k \geq 0$:

a) $A_k \subseteq A_{k+1}$.

b) Für $n \geq 0$, $\bar{a} \in A_k^n$ und $\psi \in L_{n+1}^S$, wenn $\mathcal{B} \models \exists v_n \psi[\bar{a}]$, so gibt es $a \in A_{k+1}$ mit $\mathcal{B} \models \psi[\bar{a}a]$.

c) $|A_{k+1}| \leq \lambda$.

Ist A_k bereits definiert und $|A_k| \leq \lambda$, so fordern a) und b) höchstens die Hinzunahme von $|A_k \cup \bigcup_{n \geq 0}(A_k^n \times L_{n+1}^S)|$ Elementen, also von $\leq \lambda$ Elementen.

Wir setzen $A := \bigcup_{k \geq 0} A_k$. Dann ist A eine Teilmenge von $\mathcal{B}$ der Mächtigkeit $\leq \lambda$, welche die Bedingung 2. in Tarskis Test erfüllt (und somit Träger der gesuchten Struktur ist): Ist $\bar{a} \in A^n$, $\psi \in L_{n+1}^S$ und $\mathcal{B} \models \exists v_n \psi[\bar{a}]$, so wählen wir k mit $\bar{a} \in A_k$. Wegen b) gibt es ein $a \in A_{k+1} \subseteq A$ mit $\mathcal{B} \models \psi[\bar{a}a]$. $\square$

Folgerung 6.5 (Satz von Löwenheim und Skolem) *Sei $\Sigma \subseteq L_0^S$ und S höchstens abzählbar. Hat Σ ein unendliches Modell, so auch ein abzählbares Modell.*

Beweis: Wende den vorangehenden Satz auf ein unendliches Modell $\mathcal{B}$ von Σ und $A_0 = \emptyset$ an. $\square$

$\preceq$ läßt sich auf $\equiv$ zurückführen:

Lemma 6.6 *Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ und $(a_i)_I$ eine Aufzählung von A. Dann sind äquivalent:*

1. *$\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$.*
2. *$(\mathcal{A}, (a_i)_I) \equiv (\mathcal{B}, (a_i)_I)$.*
3. *Für jede Folge $(e_j)_J$ in A: $(\mathcal{A}, (e_j)_J) \equiv (\mathcal{B}, (e_j)_J)$.*
4. *$\forall n \geq 0, \forall \bar{a} \in A^n$: $(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv (\mathcal{B}, \bar{a})$.*

Zum Beweis ersetze man jeweils in den entsprechenden Formeln bzw. Sätzen Variable durch Konstante bzw. Konstante durch Variable.

Folgerung 6.7 *Ist $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ und $(a_i)_I$ eine Folge in $\mathcal{A}$, so $(\mathcal{A}, (a_i)_I) \preceq (\mathcal{B}, (a_i)_I)$.*

Die Behauptung ergibt sich aus der Äquivalenz von 1. und 3. im vorangehenden Satz, da jede Expansion von $(\mathcal{A}, (a_i)_I)$ um "Konstante" auch eine Expansion von $\mathcal{A}$ ist.

Definition 6.8 $\mathcal{K}$ ist *modellvollständig*, wenn für alle $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{K}$ mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ gilt: $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$. Σ ist *modellvollständig*, wenn $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ modellvollständig ist, wenn also aus $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models \Sigma$ und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ folgt $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$.

Lemma 6.9 *Für $\Sigma \subseteq L_0^S$ sind äquivalent:*

1. *Σ ist modellvollständig.*
2. *Für alle $\mathcal{A} \models \Sigma$ ist $\Sigma \cup D_a(\mathcal{A})$ vollständig (in $L_0^{S_A}$).*

Beweis: 2. $\Rightarrow$ 1.: Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models \Sigma$ und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Dann sind $(\mathcal{A}, (a)_{a \in A})$ und $(\mathcal{B}, (a)_{a \in A})$ Modelle von $\Sigma \cup D_a(\mathcal{A})$. Wegen 2. daher $(\mathcal{A}, (a)_{a \in A}) \equiv (\mathcal{B}, (a)_{a \in A})$. Nach Lemma 6.6 somit $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$.

1. $\Rightarrow$ 2.: Wir zeigen, daß jedes Modell von $\Sigma \cup D_a(\mathcal{A})$ elementar äquivalent zu $(\mathcal{A}, (a)_{a \in A})$ ist. Wegen Satz 4.12 hat jedes Modell von $\Sigma \cup D_a(\mathcal{A})$ o.B.d.A. die Gestalt $(\mathcal{B}, (a)_{a \in A})$ mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Dann $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ wegen 1., und wegen Lemma 6.6: $(\mathcal{A}, (a)_{a \in A}) \equiv (\mathcal{B}, (a)_{a \in A})$. $\square$

Die Äquivalenz von 1. und 2. im folgenden Satz wird Robinsonscher Modellvollständigkeitstest genannt.

Satz 6.10 *Für $\Sigma \subseteq L_0^S$ sind äquivalent:*

1. *Σ ist modellvollständig.*

2. *Für alle $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models \Sigma$ mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, $\forall \bar{a} \in A$ und für alle existentielle φ gilt*

$$\text{wenn } \mathcal{B} \models \varphi[\bar{a}], \text{ so } \mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}].$$

3. *Zu jedem existentiellem φ gibt es ein universelles ψ mit*

$$\mathrm{fr}(\varphi) = \mathrm{fr}(\psi) \quad \textit{und} \quad \Sigma \models \varphi \leftrightarrow \psi.$$

4. *Zu jedem φ gibt es ein universelles ψ mit*

$$\mathrm{fr}(\varphi) = \mathrm{fr}(\psi) \quad \textit{und} \quad \Sigma \models \varphi \leftrightarrow \psi.$$

Beweis: 1. $\Rightarrow$ 2.: Klar, da mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ auch $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ wegen 1.

3. $\Rightarrow$ 2.: Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models \Sigma$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, $\bar{a} \in A$, $\varphi \in L^S$ existentiell und $\mathcal{B} \models \varphi[\bar{a}]$; zu zeigen ist: $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}]$. Wir wählen zu φ ein universelles ψ gemäß 3. Dann $\mathcal{B} \models \psi[\bar{a}]$, $\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}]$ (da ψ universell), somit $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}]$.

4. $\Rightarrow$ 1.: Entsprechend.

Da 4. $\Rightarrow$ 3. klar ist, müssen wir noch 2. $\Rightarrow$ 4. zeigen. Sei Ψ die Menge der Formeln φ zu denen sowohl ein universelles φ_u als auch ein existentielles φ_e existiert mit $\mathrm{fr}(\varphi) = \mathrm{fr}(\varphi_u) = \mathrm{fr}(\varphi_e)$, $\Sigma \models \varphi \leftrightarrow \varphi_u$ und $\Sigma \models \varphi \leftrightarrow \varphi_e$. Wir zeigen $\Psi = L^S$. Ψ enthält alle atomaren Ausdrücke und ist gegen $\neg$ und $\vee$ abgeschlossen. Ψ ist auch gegen $\exists$ abgeschlossen (wir gehen auf die Forderungen an die freien Variablen nicht ein): Sei $\varphi = \exists x \varphi'$ und $\varphi' \in \Psi$. Somit $\Sigma \models \varphi' \leftrightarrow \varphi'_e$ für geeignetes existentielles φ'_e. Insbesondere $\Sigma \models \varphi \leftrightarrow \exists x \varphi'_e$. Weiterhin gilt wegen 2.:

> Für alle $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models \Sigma$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, $\bar{a} \in A$: wenn $\mathcal{B} \models \exists x \varphi'_e[\bar{a}]$, so $\mathcal{A} \models \exists x \varphi'_e[\bar{a}]$.

Nach Satz 4.26 gibt es ein universelles $\psi \in L^S$ mit $\Sigma \models \exists x \varphi'_e \leftrightarrow \psi$. Also $\Sigma \models \varphi \leftrightarrow \psi$. $\square$

Bemerkungen und Beispiele 6.11 1) Jede existentielle Formel ist logisch äquivalent zu einer Formel der Gestalt $\exists x_1 \dots \exists x_n \bigvee_{i=1}^{k}(\varphi_{i1} \wedge \dots \wedge \varphi_{im_i})$ mit Literalen φ_{ij}. Also logisch äquivalent zu $\bigvee_{i=1}^{k} \exists x_1 \dots \exists x_n(\varphi_{i1} \wedge \dots \wedge \varphi_{im_i})$. Wenn $\mathcal{B} \models \bigvee_{i=1}^{k} \exists x_1 \dots \exists x_n(\varphi_{i1} \wedge \dots \wedge \varphi_{im_i})[\bar{a}]$, so gibt es ein i mit $\mathcal{B} \models \exists x_1 \dots \exists x_n(\varphi_{i1} \wedge \dots \wedge \varphi_{im_i})[\bar{a}]$. Daher kann man sich bei 2. im vorangehendem Satz auf Formeln der Gestalt $\exists x_1 \dots \exists x_n(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)$ mit Literalen φ_i, auf sog. *primitive* Formeln beschränken.

2) Sei $S = S_{\mathrm{ar}} = \{+, \cdot, 0, 1\}$ oder $S = S_K = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$ mit einstelligem $-$. Für einen Körper $\mathcal{A}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{A}[x_1, \dots, x_n]$ den Ring der Polynome in $x_1, \dots, x_n$ mit Koeffizienten in $\mathcal{A}$. a) Zu $p \in \mathcal{A}[v_0, \dots, v_{n-1}]$ gibt es ein $t \in T_n^{S_{\mathrm{ar}} \cup \{a | a \in A\}}$ mit:

$$(*) \qquad \forall \bar{a}, a \in A: \ p(\bar{a}) = a \ \text{ gdw } \ t^{(\mathcal{A},(a)_{a\in A})}[\bar{a}] = a.$$

b) Zu $t \in T_n^{S_K \cup \{a | a \in A\}}$ gibt es $p \in \mathcal{A}[v_0, \dots, v_{n-1}]$ mit $(*)$.

c) Σ_K sei die Menge der Körperaxiome in S_K. Dann gilt für Terme t_1, t_2:

- $\Sigma_K \models t_1 = t_2 \leftrightarrow t_1 + (-t_2) = 0$.
- $\Sigma_K \models (\neg t_1 = 0 \wedge \neg t_2 = 0) \leftrightarrow \neg t_1 \cdot t_2 = 0$.

Somit: Für jede primitive Formel $\varphi \in L^{S_k}$ gilt

$$\Sigma_K \models \varphi \leftrightarrow \exists y_1 \dots \exists y_n(t_1 = 0 \wedge \dots \wedge t_{s-1} = 0 \wedge \neg t_s = 0)$$

für geeignete n, s, t_i.

Definition 6.12 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ S-Strukturen.

- $\pi : A \to B$ ist *elementare Einbettung* von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$, $\pi : \mathcal{A} \xrightarrow{e} \mathcal{B}$, wenn es $\mathcal{B}' \preceq \mathcal{B}$ mit $\pi : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}'$ gibt.
- $\mathcal{A}$ ist *elementar einbettbar* in $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} \xrightarrow{e} \mathcal{B}$, wenn ex. π mit $\pi : \mathcal{A} \xrightarrow{e} \mathcal{B}$.

Bemerkungen und Beispiele 6.13 1) $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ gdw $\mathrm{id}_A : \mathcal{A} \xrightarrow{e} \mathcal{B}$.

2) $\mathcal{A} \xrightarrow{e} \mathcal{B}$, etwa $\pi : \mathcal{A} \xrightarrow{e} \mathcal{B}$, dann gibt es $\mathcal{C}$ und π' mit

$$\mathcal{A} \preceq \mathcal{C}, \ \pi' : \mathcal{C} \cong \mathcal{B} \quad \text{und} \quad \pi' \supseteq \pi.$$

1)+2): Für gegebenes $\mathcal{A}$ sind die Strukturen, in die sich $\mathcal{A}$ elementar einbetten läßt (bis auf Isomorphie) die elementaren Erweiterungen von $\mathcal{A}$.

3) Für S-Strukturen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $\pi : A \to B$ sind äquivalent:

1. $\pi : \mathcal{A} \xrightarrow{e} \mathcal{B}$.

2. $\forall \bar{a} \in A$, für alle $\varphi \in L^S$: ($\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}]$ gdw $\mathcal{B} \models \varphi[\pi(\bar{a})]$).

Beweis: 1. $\Rightarrow$ 2.: Gelte $\pi : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}' \preceq \mathcal{B}$. Dann

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}] \quad &\text{gdw} \quad \mathcal{B}' \models \varphi[\pi(\bar{a})] \quad (\text{da } \pi \text{ Isomorphismus}) \\ &\text{gdw} \quad \mathcal{B} \models \varphi[\pi(\bar{a})] \quad (\mathcal{B}' \preceq \mathcal{B}). \end{aligned}$$

2. $\Rightarrow$ 1.: Wegen 2 (für quantorenfreies φ) ist $\pi \in \text{Part}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Da $\text{df}(\pi) = A$, gilt (vgl. **??**) $\pi : \mathcal{A} \xrightarrow{a} \mathcal{B}$, etwa $\pi : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$. Es gilt $\mathcal{B}' \preceq \mathcal{B}$, da $\mathcal{B}' \models \varphi[\pi(\bar{a})]$ gdw ($\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}]$ gdw) $\mathcal{B} \models \varphi[\pi(\bar{a})]$. □

4) Wenn $\mathcal{A} \xrightarrow{e} \mathcal{B}$, so $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

5) Ist U ein Ultrafilter auf I, so ist $\pi : \mathcal{A} \xrightarrow{e} \mathcal{A}^I/U$ für die "kanonische" Einbettung π mit $\pi(a) := \hat{a}_U$, wobei $\hat{a} := < a \mid i \in I >$.

Beweis: In der Tat gilt $\mathcal{A}^I/U \models \varphi[\hat{a}_{0\,U}, \ldots, \hat{a}_{n-1\,U}]$ gdw $\{i \mid \mathcal{A} \models \varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}]\} \in U$. Nun ist $\{i \mid \mathcal{A} \models \varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}]\}$ gleich I oder gleich $\emptyset$, je nachdem ob $\mathcal{A} \models \varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}]$ oder nicht. Insgesamt $\mathcal{A}^I/U \models \varphi[\hat{a}_{0\,U}, \ldots, \hat{a}_{n-1\,U}]$ gdw $\mathcal{A} \models \varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}]$. □

6) Sei $\pi : \mathcal{A} \xrightarrow{e} \mathcal{B}$ und $(a_i)_I$ eine Folge in $\mathcal{A}$. Dann $\pi : (\mathcal{A}, (a_i)_I) \xrightarrow{e} (\mathcal{B}, (\pi(a_i))_I)$.

Beweis: Gelte nämlich $\pi : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}' \preceq \mathcal{B}$. Dann $\pi : (\mathcal{A}, (a_i)_I) \cong (\mathcal{B}', (\pi(a_i))_I) \preceq (\mathcal{B}, (\pi(a_i))_I)$. □

Definition 6.14 Sei $(a_i)_I$ Aufzählung von $\mathcal{A}$.

$$D_e(\mathcal{A}; (a_i)_I) \quad := \quad \text{Th}(\mathcal{A}, (a_i)_I)$$

ist das *elementare Diagramm* von $\mathcal{A}$ bzgl. $(a_i)_I$. Für die kanonische Aufzählung schreiben wir auch $D_e(\mathcal{A})$ für $D_e(\mathcal{A}; (a)_{a \in A})$ und sprechen von *dem elementaren Diagramm* von $\mathcal{A}$.

7) Die Modelle des elementaren Diagramms von $\mathcal{A}$ sind die Erweiterungen von $\mathcal{A}$; genauer: Sei $\mathcal{A}$ eine S-Struktur und $(a_i)_I$ Aufzählung von $\mathcal{A}$; dann sind für jede S-Struktur $\mathcal{B}$ äquivalent:

1. $\mathcal{A} \xrightarrow{e} \mathcal{B}$.

2. Für eine geeignete Folge $(b_i)_I$ in $\mathcal{B}$: $(\mathcal{B}, (b_i)_I) \models D_e(\mathcal{A}; (a_i)_I)$.

Dabei ist $\pi(a_i) = b_i$ jeweils eine Definition des gesuchten Objekts.

Beweis: 1. $\Rightarrow$ 2.: Gelte $\pi : \mathcal{A} \xrightarrow{e} \mathcal{B}$. Dann (nach 6)) $\pi : (\mathcal{A}, (a_i)_I) \xrightarrow{e} (\mathcal{B}, (\pi(a_i))_I)$, somit (vgl. 4)) $(\mathcal{A}, (a_i)_I) \equiv (\mathcal{B}, (\pi(a_i))_I)$, insbesondere $(\mathcal{B}, (\pi(a_i))_I) \models D_e(\mathcal{A}; (a_i)_I)$.

2. $\Rightarrow$ 1.: Setze $\pi(a_i) := b_i$. Wegen Satz 4.12 gilt $\pi : \mathcal{A} \xrightarrow{a} \mathcal{B}$, etwa $\pi : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$, wobei $B' = \{b_i \mid i \in I\}$. Somit $(\mathcal{B}, (b_i)_I) \equiv (\mathcal{A}, (a_i)_I) \cong (\mathcal{B}', (b_i)_I)$. Da $(b_i)_I$ eine Aufzählung von B' ist, ergibt Lemma 6.6: $\mathcal{B}' \prec \mathcal{B}$. Somit $\mathcal{A} \xrightarrow{e} \mathcal{B}$.□

8) Sei $\mathcal{A}$ eine S-Struktur, $S \subseteq S_1$ und $\Phi \subseteq L^{S_1}$: Ist $\mathrm{Th}(\mathcal{A}) \cup \Phi$ erfüllbar, so gibt es eine elementare Erweiterung von $\mathcal{A}$, die Modell von Φ ist, genauer: es gibt eine S_1-Interpretation $(\mathcal{B}, \beta)$ mit

$$(\mathcal{B}, \beta) \models \Phi \quad \text{und} \quad \mathcal{A} \preceq \mathcal{B}|S.$$

Beweis: Wegen 7) genügt es zu zeigen, daß $\mathrm{Erf}\, D_e(\mathcal{A}) \cup \Phi$ (wobei wir für $a \in A$ annehmen, daß $c_a \notin S_1$). Andernfalls gibt es ein $\psi \in D_e(\mathcal{A})$ mit nicht Erf $\{\psi\} \cup \Phi$. Seien $c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}$ die "neuen" Konstanten in ψ. Für $\chi := \exists x_1 \ldots \exists x_n \psi \frac{x_1 \ldots x_n}{c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}}$ gilt: nicht Erf $\{\chi\} \cup \Phi$. Wegen $\psi \in D_e(\mathcal{A})$ ist $\mathcal{A} \models \chi$. Somit $\chi \in \mathrm{Th}(\mathcal{A})$ und daher nicht Erf $\mathrm{Th}(\mathcal{A}) \cup \Phi$, im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Folgerung 6.15 *Wenn $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ so gibt es ein $\mathcal{D}$ mit*

$$\mathcal{A} \preceq \mathcal{D} \quad \textit{und} \quad \mathcal{B} \xrightarrow{e} \mathcal{D}.$$

Beweis: $\mathrm{Th}(\mathcal{A}) \cup D_e(\mathcal{B}) = \mathrm{Th}(\mathcal{B}) \cup D_e(\mathcal{B}) = D_e(\mathcal{B})$ ist erfüllbar. Daher gibt es nach 8) eine Struktur $(\mathcal{D}, (d_b)_{b \in B})$ mit $(\mathcal{D}, (d_b)_{b \in B}) \models D_e(\mathcal{B})$ und $\mathcal{A} \preceq \mathcal{D}$. Wegen 7) gilt $\mathcal{B} \xrightarrow{e} \mathcal{D}$. □

Satz 6.16 (Satz von Löwenheim, Skolem und Tarski) *Sei $\mathcal{B}$ eine unendliche S-Struktur und λ eine Kardinalzahl mit $\lambda \geq |L^S|$.*

1. *Ist $\lambda \leq |B|$, so hat $\mathcal{B}$ eine elementare Substruktur der Mächtigkeit λ.*

2. *Ist $\lambda \geq |B|$, so hat $\mathcal{B}$ eine elementare Erweiterung der Mächtigkeit λ.*

Beweis: Zu 1.: Man wähle $A_0 \subseteq B$ mit $|A_0| = \lambda$ und wende Satz 6.4 an. Zu 2.: Sei $\lambda \geq |B|$. Nach dem aufsteigendem Satz von Löwenheim und Skolem hat $D_e(\mathcal{B})$ ein Modell $(\mathcal{C}, (b)_{b \in B})$ mit mindestens λ Elementen, o.B.d.A. $\mathcal{B} \preceq \mathcal{C}$. Wir wählen jetzt mit Satz 6.4 eine elementare Substruktur $\mathcal{D}$ von $\mathcal{C}$ der Mächtigkeit λ, die B umfaßt. Dann $\mathcal{B} \preceq \mathcal{D}$. $\square$

7 Gerichtete Systeme

Definition 7.1 $(I, \leq)$ ist ein *gerichtetes System* oder *gerichtete Menge*, wenn $(I, \leq)$ Modell der folgenden Sätze ist

$$\begin{aligned} &\forall x \forall y((x \leq y \wedge y \leq x) \rightarrow x = y), \\ &\forall x \forall y((x \leq y \wedge y \leq z) \rightarrow x \leq z), \\ &\forall x \forall y \exists z(x \leq z \wedge y \leq z). \end{aligned}$$

Beispiele 7.2 1. Jede $\leq$-Ordnung ist ein gerichtetes System.

2. Für jede Menge A sind $(P(A), \subseteq)$ und $(P_e(A), \subseteq)$ gerichtete Systeme. (Hierbei bezeichenet $P(A)$ die Potenzmenge von A und $P_e(A) := \{X \subseteq A \mid X \text{ endlich}\}$ ist die Menge der endlichen Teilmengen von A).

Definition 7.3 Sei $(I, \leq)$ ein gerichtetes System und für $i \in I$ sei $\mathcal{A}_i$ eine S-Struktur. $(\mathcal{A}_i)_I$ ist ein *gerichtetes System von Strukturen*, wenn $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{A}_j$ für alle $i, j \in I$ mit $i \leq j$.

Ist $(I, \leq)$ eine Ordnung, so ist $(\mathcal{A}_i)_I$ eine *Kette*. – Ist $(I, \leq) = (\mathbb{N}, \leq)$, so sprechen wir von einer ω-*Kette*.

Für ein gerichtetes System $(\mathcal{A}_i)_I$ sei $\bigcup_I \mathcal{A}_i$, die *Vereinigung* von $(\mathcal{A}_i)_I$, die S-Struktur $\mathcal{A}$ mit $A := \bigcup_i A_i$, $R^{\mathcal{A}} := \bigcup_I R^{\mathcal{A}_i}$, $f^{\mathcal{A}} := \bigcup_I f^{\mathcal{A}_i}$ und $c^{\mathcal{A}} := c^{\mathcal{A}_i}$ für $i \in I$ beliebig.

Aus den folgenden Sachverhalten folgt u.a. die Wohldefiniertheit der Vereinigung. Sei $\bar{a} = a_1 \ldots a_n \in A$, $f \in S$, $R \in S$ n-stellig.

1. Es gibt $i \in I$ mit $\bar{a} \in A_i$. (Sei $a_k \in A_{i_k}$. Wähle i mit $i_1, \ldots, i_n \leq i$. Dann $\bar{a} \in A_i$).

2. Wenn $\bar{a} \in A_i \cap A_j$, so $f^{\mathcal{A}_i}(\bar{a}) = f^{\mathcal{A}_j}(\bar{a})$. (Wähle k mit $i, j \leq k$. Wegen $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{A}_k$ ist $f^{\mathcal{A}_i}(\bar{a}) = f^{\mathcal{A}_k}(\bar{a})$ und wegen $\mathcal{A}_j \subseteq \mathcal{A}_k$ ist $f^{\mathcal{A}_j}(\bar{a}) = f^{\mathcal{A}_k}(\bar{a})$.)

   1. und 2. zeigen, daß $f^{\mathcal{A}}$ eine auf A^n definierte Funktion ist und 3.:

3. Wenn $\bar{a} \in A_i$, so $f^{\mathcal{A}}(\bar{a}) = f^{\mathcal{A}_i}(\bar{a})$.

   Entsprechend zeigt man

4. Wenn $\bar{a} \in A_i$, so $R^{\mathcal{A}}(\bar{a})$ gdw $R^{\mathcal{A}_i}(\bar{a})$.

5. Für alle $c \in S$ und alle $i \in I$: $c^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{A}_i}$.

Insbesondere ist jedes $\mathcal{A}_i$ eine Substruktur der Vereinigung.

Beispiele 7.4
1. Ist $A := \{a_0, a_1 \dots\}$, so ist $\mathcal{A} = \bigcup_{\mathbb{N}} \mathcal{A}_n$ mit $\mathcal{A}_n := [a_0, \dots, a_n]^{\mathcal{A}}$.
2. Jede Struktur ist die Vereinigung des gerichtetes System ihrer endlich erzeugten Substrukturen. (Für gegebenes $\mathcal{A}$ setzen wir $(I, \leq) := (P_e(A) \setminus \emptyset, \subseteq)$. Für $i \in I$, $i = A_0 \subseteq A$, sei $\mathcal{A}_i := [A_0]^{\mathcal{A}}$. Dann $\mathcal{A} = \bigcup_I \mathcal{A}_i$.)

Eine Klasse $\mathcal{K}$ von Strukturen ist *gegen Vereinigungen von gerichteten Systemen abgeschlossen*, wenn $\bigcup_I \mathcal{A}_i \in \mathcal{K}$ für jedes gerichtetes System $(\mathcal{A}_i)_I$ mit $\mathcal{A}_i \in \mathcal{K}$ für alle $i \in I$.– Ein Satz φ *bleibt bei Vereinigungen von gerichteten Systemen erhalten*, wenn $\mathrm{Mod}(\varphi)$ gegen Vereinigungen von gerichteten Systemen abgeschlossen ist.

Eine $\forall\exists$-*Formel* ist ein Ausdruck der Gestalt

$$\forall x_1 \dots \forall x_r \exists y_1 \dots \exists y_s \psi$$

mit quantorenfreiem ψ.

Satz 7.5 *$\forall\exists$-Sätze bleiben bei Vereinigungen von gerichteten Systemen erhalten.*

Beweis: Sei $(\mathcal{A}_i)_I$ ein gerichtetes System und $\varphi = \forall v_0 \dots \forall v_{r-1} \exists v_r \dots \exists v_{r+s-1} \psi$ mit quantorenfreiem ψ und gelte $\mathcal{A}_i \models \varphi$ für alle $i \in I$. Wir zeigen $\mathcal{A} := \bigcup_I \mathcal{A}_i \models \varphi$. Sei $\bar{a} = a_0 \dots a_{r-1} \in A$ beliebig. Wir wählen i mit $\bar{a} \in A_i$. Da $\mathcal{A}_i \models \varphi$ gibt es $\bar{b} \in A_i$ mit $\mathcal{A}_i \models \psi[\bar{a}\bar{b}]$. Da ψ quantorenfrei ist, gilt $\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}\bar{b}]$. Somit $\mathcal{A} \models \varphi$. $\square$

Folgerung 7.6
1. *Ist Σ eine Menge von $\forall\exists$-Sätzen und ist jede endliche erzeugte Substruktur von $\mathcal{A}$ ein Modell von Σ, so auch $\mathcal{A}$. (Nach 2. in Beispiel 2 ist $\mathcal{A}$ die Vereinigung des gerichtetes System seiner endlich erzeugten Substrukturen.)*
2. *Jede axiomatisierbare Klasse die gegen Substrukturen abgeschlossen ist, ist auch gegen Vereinigungen von gerichteten Systemen abgeshlossen ist. (Da sie dann nach Satz 4.21 durch eine Menge von Allsätzen axiomatisierbar ist.)*

   Die Klasse der endlichen S-Strukturen ist gegen Substrukturen jedoch nicht gegen Vereinigungen von gerichteten Systemen abgeschlossen.

3. *Die Klasse* $\mathrm{Mod}(\Sigma_{[dkO]})$ *ist nicht* $\forall\exists$*-axiomatisierbar* ($(\mathbb{Q},<)$ *ist kein Modell von* $\Sigma_{[dkO]}$ *aber die Vereinigung eines gerichteten Systems von Modellen von* $\Sigma_{[dkO]}$).

Ein gerichtetes System $(\mathcal{A}_i)_I$ ist *elementar*, wenn $\mathcal{A}_i \prec \mathcal{A}_j$ für i, j mit $i < j$.

Satz 7.7 *Sei* $(\mathcal{A}_i)_I$ *ein gerichtetes System. Dann gilt für alle* $j \in J$: $\mathcal{A}_j \prec \bigcup_I \mathcal{A}_i$.

Beweis: Wir setze $\mathcal{A} := \bigcup_I \mathcal{A}_i$ und zeigen

$$\forall j \in I \forall \bar{a} \in A_j \ (\mathcal{A}_j \models \varphi[\bar{a}] \ \text{ gdw } \ \mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}])$$

durch Induktion über φ.

Die Fälle φ atomar, $\varphi = \neg\psi$ und $\varphi = (\psi \vee \chi)$ sind einfach. Sei nun $\varphi = \exists v_n \psi \in L_n^S$, $j \in I$ und $\bar{a} \in A_j$. Wenn $\mathcal{A}_j \models \varphi[\bar{a}]$, so gibt es $a \in A_j$ mit $\mathcal{A}_j \models \psi[\bar{a}a]$; nach Induktionsvoraussetzung $\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}a]$ und damit $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}]$. – Gelte nun umgekehrt $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}]$, also $\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}a]$ für ein geeignetes $a \in A$. Wir wählen $k \in I$ mit $a \in A_k$. Da I ein gerichtetes System ist, können wir o.B.d.A. $j \leq k$ annehmen. Somit $\bar{a}, a \in A_k$ und nach Induktionsvoraussetzung $\mathcal{A}_k \models \psi[\bar{a}a]$ und daher $\mathcal{A}_k \models \varphi[\bar{a}]$. Weil $\mathcal{A}_j \prec \mathcal{A}_k$ erhalten wir hieraus $\mathcal{A}_j \models \varphi[\bar{a}]$.□

Wir wenden uns jetzt der Umkehrung von Satz 7.5 zu.

Für $\Sigma \subseteq L_0^S$ setzen wir

$$\Sigma_{\forall\exists} \ := \ \{\varphi \in L_0^S \mid \varphi \ \forall\exists\text{-Satz}, \Sigma \models \varphi\}.$$

Lemma 7.8 (Sandwichlemma) *Sei* $\Sigma \subseteq L_0^S$ *und* $\mathcal{A} \models \Sigma_{\forall\exists}$. *Dann gibt es* $\mathcal{B}$ *und* $\mathcal{C}$ *mit*

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}, \ \mathcal{B} \models \Sigma, \ \mathcal{A} \prec \mathcal{C}.$$

Beweis: Für

$$\Sigma_1 \ := \ \Sigma \cup \{\psi \in L_0^{S \cup \{c_a \mid a \in A\}} \mid \psi \text{ universell}, (\mathcal{A}, (a)_{a\in A}) \models \psi\}$$

gilt (1. und 2. sind unmittelbar klar, 3. zeigen wir unten)

1. $D_a(\mathcal{A}) \subseteq \Sigma_1$.

2. Wenn $\psi \in L_0^{S \cup \{c_a \mid a \in A\}}$ universell ist und $D_e(\mathcal{A}) \models \psi$, so $\psi \in \Sigma_1$.

3. Erf Σ_1.

Aus 1. – 3. ergibt sich die Behauptung: Wegen 1. Satz 4.12 existiert eine S-Struktur $\mathcal{B}$ mit

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \text{ und } (\mathcal{B}, (a)_{a\in A}) \models \Sigma_1.$$

Wegen 2. und Satz 4.13 gibt es weiterhin $(\mathcal{C}, (a)_{a\in A}) \models D_e(\mathcal{A})$ mit $(\mathcal{B}, (a)_{a\in A}) \subseteq (\mathcal{C}, (a)_{a\in A})$. Hieraus ergibt sich $\mathcal{A} \prec \mathcal{C}$.

Zu 3.: Ist Σ_1 nicht erfüllbar, so gibt es nach dem Endlichkeitssatz ein $\psi \in L_0^{S\cup\{c_a|a\in A\}}$ mit $(\mathcal{A}, (a)_{a\in A}) \models \psi$ und $\Sigma \models \neg\psi$. Sind $c_{a_1}, \ldots, c_{a_s}$ die "neuen" Konstanten in ψ, so erhalten wir für den $\forall\exists$-Satz (genauer: für den zu einem $\forall\exists$-Satz logisch äquivalenten Satz) $\chi := \forall x_1 \ldots \forall x_s \neg\psi\frac{x_1\ldots x_s}{c_{a_1}\ldots c_{a_s}}$ einerseits $\Sigma \models \chi$, andererseits $\mathcal{A} \models \neg\chi$, ein Widerspruch zu $\mathcal{A} \models \Sigma_{\forall\exists}$. $\square$

Satz 7.9 *Für eine axiomatisierbare Klasse $\mathcal{K}$ sind äquivalent:*

1. *$\mathcal{K}$ hat ein aus $\forall\exists$-Sätzen bestehendes Axiomensystem.*
2. *$\mathcal{K}$ ist gegen Vereinigungen von gerichteten Systemen abgeschlossen.*
3. *$\mathcal{K}$ ist gegen Vereinigungen von ω-Ketten abgeschlossen.*

Beweis: Die Implikation 1. $\Rightarrow$ 2. gilt wegen 7.5 und 2. $\Rightarrow$ 3. ist trivial. Zu 3. $\Rightarrow$ 1.: Sei $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$. Wir zeigen $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma_{\forall\exists})$. Da $\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Mod}(\Sigma_{\forall\exists})$, wählen wir $\mathcal{A}_0$ mit $\mathcal{A}_0 \models \Sigma_{\forall\exists}$ und müssen noch $\mathcal{A}_0 \models \Sigma$ beweisen. Wiederholte Anwendung des Sandwichlemmas liefert eine Folge $(\mathcal{A}_n)_{n\geq 0}$ mit

$$\mathcal{A}_{2\cdot n} \subseteq \mathcal{A}_{2\cdot n+1} \subseteq \mathcal{A}_{2\cdot n+2},\ \mathcal{A}_{2\cdot n+1} \models \Sigma \text{ und } \mathcal{A}_{2\cdot n} \prec \mathcal{A}_{2\cdot n+2}.$$

Dann ist $\mathcal{A} := \bigcup_{n\geq 0} \mathcal{A}_{2\cdot n+1}$ die Vereinigung einer ω-Ketten von Modellen von Σ, wegen 3. daher selbst ein Modell von Σ. Andererseits gilt $\mathcal{A} = \bigcup_{n\geq 0} \mathcal{A}_{2\cdot n}$; dabei ist $(\mathcal{A}_{2\cdot n})_{n\geq 0}$ eine elementare Kette. Somit $\mathcal{A}_0 \prec \mathcal{A}$ und daher $\mathcal{A}_0 \models \Sigma$. $\square$

Folgerung 7.10 *Jeder Satz, der gegen Vereinigungen von ω-Ketten abgeschlossen, ist zu einem $\forall\exists$-Satz logisch äquivalent.*

Beweis: Sei $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\varphi)$ gegen Vereinigungen von ω-Ketten abgeschlossen. Dann gibt es nach dem vorangehenden Satz eine Menge Σ von $\forall\exists$-Sätzen mit $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$. Somit $\models \varphi \leftrightarrow \bigwedge \Sigma$ und daher gibt es nach dem Endlichkeitslemma $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Sigma$ mit $\models \varphi \leftrightarrow (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n)$. $(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n)$ ist zu einem $\forall\exists$-Satz logisch äquivalent. $\square$

Satz 7.11 *Ist Σ modellvollständig, so ist Σ gegen Vereinigungen von gerichteten Systemen abgeschlossen und somit durch eine Menge von $\forall\exists$-Sätze axiomatisierbar.*

8 Typen und ω-saturierte Strukturen

Definition 8.1 Sei $\Sigma \subseteq L_0^S$ und $\Phi = \Phi(v_0, \ldots, v_{n-1})$, d.h. $\Phi \subseteq L_n^S$.

- Φ ist ein *Typ* (genauer: ein *n-Typ*) von Σ, wenn Erf $\Sigma \cup \Phi$.
- Ist $\mathcal{A}$ ein Modell von Σ und Φ ein Typ, so $\mathcal{A}$ *erfüllt* Φ, wenn $\bar{a} \in A^n$ mit $\mathcal{A} \models \Phi[\bar{a}]$ existiert. $\mathcal{A}$ *übergeht* Φ, wenn nicht $\mathcal{A}$ erfüllt Φ.

Bemerkungen und Beispiele 8.2 1) $\Phi_\infty := \{\varphi_n(x, y) \mid n \geq 1\}$ mit

$$\varphi_n(x, y) \quad := \quad \exists z_1 \ldots \exists z_n (x < z_1 < \ldots < z_n < y)$$

ist ein 2-Typ von Σ_{dkO}. $\mathcal{Z}$ übergeht Φ_∞ und $\mathcal{Z} + \mathcal{Z}$ erfüllt Φ_∞.

2) Wenn $\mathcal{A}$ erfüllt Φ und $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$, so $\mathcal{B}$ erfüllt Φ.

3) Für eine Struktur $\mathcal{A}$ gilt:

a) Ist Φ ein Typ von $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$, so gibt es eine elementare Erweiterung von $\mathcal{A}$, die Φ erfüllt.

b) Sind $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ Typen von $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$, so gibt es eine elementare Erweiterung von $\mathcal{A}$, die $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ erfüllt.

c) Ist $\underline{\Phi}$ eine Menge von Typen von $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$, so gibt es eine elementare Erweiterung von $\mathcal{A}$, die alle Typen in $\underline{\Phi}$ erfüllt.

Beweis: Zu a): Da nach Voraussetzung $\mathrm{Th}(\mathcal{A}) \cup \Phi$ erfüllbar ist, ergibt sich die Behauptung aus Teil 8) von**??**.– b) erhält man durch endlichmalige Anwendung von a).

Zu c): Für jedes $\Phi \in \underline{\Phi}$, $\Phi = \Phi(v_0, \ldots, v_{n-1})$, wählen wir neue Konstante $c_0^\Phi, \ldots, c_{n-1}^\Phi$. Zu zeigen ist

$$\text{Erf } \mathrm{Th}(\mathcal{A}) \cup \bigcup_{\Phi \in \underline{\Phi}} \Phi(c_0^\Phi, \ldots, c_{n-1}^\Phi).$$

Wegen b) ist aber jede endliche Teilmenge erfüllbar. $\square$

4) Ist Φ ein Typ von $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ und $X \subseteq A$, so ist Φ ein Typ von $\mathrm{Th}((\mathcal{A}, (a)_{a \in X})$. (Denn nach 3)a) ist Erf $D_e(\mathcal{A}) \cup \Phi$ und $\mathrm{Th}((\mathcal{A}, (a)_{a \in X}) \subseteq D_e(\mathcal{A})$.)

5) Sei $\Sigma \subseteq L_0^S$ vollständig, $\mathcal{A} \models \Sigma$ und $\Phi \subseteq L_n^S$. Dann

$$\Phi \text{ ist Typ von } \Sigma \quad \text{gdw} \quad \forall r \geq 0,\, \varphi_0, \ldots, \varphi_r \in \Phi : \mathcal{A} \models \exists \bar{v}(\varphi_0 \wedge \ldots \wedge \varphi_r).$$

Beweis: $\Leftarrow$: Erf $\Sigma \cup \Phi$, da nach Voraussetzung jede endliche Teilmenge erfüllbar ist.– $\Rightarrow$: Sei Erf $\Sigma \cup \Phi$. Dann gilt Erf $\Sigma \cup \{\exists \bar{v}(\varphi_0 \wedge \ldots \wedge \varphi_r)\}$ für $\varphi_0, \ldots, \varphi_r \in \Phi$. Da Σ vollständig ist, gilt daher $\Sigma \models \exists \bar{v}(\varphi_0 \wedge \ldots \wedge \varphi_r)$ und somit $\mathcal{A} \models \exists \bar{v}(\varphi_0 \wedge \ldots \wedge \varphi_r)$. □

6) Sei $\mathcal{R}$ der geordnete Körper der reellen Zahlen. Wegen 5) ist

$$\Phi \;:=\; \{0 < x\} \cup \{\text{“}x < \frac{1}{n}\text{“} \mid n \geq 1\}$$

ein Typ von Th($\mathcal{R}$). Wegen 2) gibt es eine Struktur $\mathcal{A}$ und $a \in A$ mit $\mathcal{R} \preceq \mathcal{A}$ und $\mathcal{A} \models \Phi[a]$.

7) Sei $S_K := \{+, -, \cdot, 1, 0\}$. $a_0, \ldots, a_{n-1}$ seien Elemente des Körpers $\mathcal{A}$. $S := S_K \cup \{c_0, \ldots, c_{n-1}\}$. $[\bar{a}]^{\mathcal{A}} = \{t^{\mathcal{A}}[\bar{a}] \mid t \in T_n^{S_K}\} = \{t^{(\mathcal{A},\bar{a})} \mid t \in T_0^S\}$ ist der von $\bar{a}$ erzeugte Unterring. Mit $<\bar{a}>^{\mathcal{A}} := \{\frac{a}{b} \mid a, b \in [\bar{a}]^{\mathcal{A}},\, b \neq 0\}$ bezeichnen wir den von $\bar{a}$ erzeugten Teilkörper. Es gilt: Für alle Körper $\mathcal{A}$, alle $\bar{a} = a_1 \ldots a_n$, $a \in A$:

$$(\mathcal{A}, \bar{a}) \models \Phi^n[a] \quad \text{gdw} \quad a \text{ ist transzendent über } <\bar{a}>^{\mathcal{A}}$$

wobei $\Phi^n \subseteq L_1^S$ gegeben ist durch

$$\Phi^n \;:=\; \{(\neg t_k = 0 \rightarrow \neg t_k x^k + \ldots + t_0 = 0) \mid k \geq 1,\, t_0, \ldots, t_k \in T_0^S\}.$$

Bemerkung Ist $\mathcal{A}$ ein unendlicher Körper und $\bar{a} \in A^n$, so ist Φ^n ein Typ von Th(($\mathcal{A}$, $\bar{a}$)).

Beweis: Wiederum müssen wir zeigen, daß Erf Th($\mathcal{A}$, $\bar{a}$) $\cup\, \Phi^n$ ist. Jeder endlichen Teilmenge Φ_0 von Φ^n entsprechen endliche viele Polynome. Da A unendlich ist, gibt es ein Element in A, das nicht Nullstelle eines dieser Polynome ist, somit $(\mathcal{A}, \bar{a}) \models \exists x \bigwedge \Phi_0$; aus 5) folgt somit unsere Behauptung. □

8) Sei $p_0, p_1, \ldots$ eine Aufzählung der Primzahlen. Für $M \subseteq \mathbb{N}$ sei $\Phi_M \subseteq L_1^{S_{ar}}$ die Menge

$$\Phi_M \;:=\; \{\text{“}p_m | x\text{“} \mid m \in M\} \cup \{\neg\text{“}p_m | x\text{“} \mid m \notin M\}.$$

Wegen 5) ist Φ_M ein Typ von Th($\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1$).

Definition 8.3 $\mathcal{A}$ ist *ω-saturiert*, wenn für alle $\bar{a} \in A$ die Struktur $(\mathcal{A}, \bar{a})$ alle 1-Typen von $\mathrm{Th}((\mathcal{A}, \bar{a}))$ erfüllt.

Lemma 8.4 *Zu jedem $\mathcal{A}$ gibt es eine elementare Erweiterung $\mathcal{A}^*$ mit*

$$\forall \bar{a} \in A : (\mathcal{A}^*, \bar{a}) \textit{erfüllt alle 1-Typen von } \mathrm{Th}(\mathcal{A}, \bar{a}) \; (= \mathrm{Th}(\mathcal{A}^*, \bar{a})).$$

Beweis: Nach Teil 3)c) von 8.2 gibt es eine elementare Erweiterung $(\mathcal{A}^*, (a)_{a \in A})$ von $(\mathcal{A}, (a)_{a \in A})$, die alle 1-Typen von $\mathrm{Th}(\mathcal{A}, (a)_{a \in A})$. Nach Teil 4) von 8.2 ist jeder Typ von $\mathrm{Th}(\mathcal{A}, \bar{a})$ ein Typ von $\mathrm{Th}(\mathcal{A}, (a)_{a \in A})$. □

Satz 8.5 *Zu jeder Struktur existiert eine elementare Erweiterung, die ω-saturiert ist.*

Beweis: Sei $\mathcal{A}$ gegeben. Wir gewinnen eine Folge

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \preceq \mathcal{A}_1 \preceq \ldots$$

wobei $\mathcal{A}_{k+1} := \mathcal{A}_k^*$ gemäß dem vorangehenden Lemma gewählt sei. Wir setzen $\mathcal{B} := \bigcup_{\mathbb{N}} \mathcal{A}_k$. Nach 7.7 ist $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$. $\mathcal{B}$ ist auch ω-saturiert: Ist Φ ein 1-Typ von $\mathrm{Th}(\mathcal{B}, \bar{a})$, so wählen wir ein k mit $\bar{a} \in A_k$. Wegen $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_k, \bar{a}) = \mathrm{Th}(\mathcal{B}, \bar{a})$ gibt es nach Konstruktion ein $b \in A_{k+1}$ mit $(\mathcal{A}_{k+1}, \bar{a}) \models \Phi[b]$, wegen $\mathcal{A}_{k+1} \preceq \mathcal{B}$ also $(\mathcal{B}, \bar{a}) \models \Phi[b]$. □

Bemerkungen und Beispiele 8.6 1) Sei $\mathcal{A}$ ω-saturiert und $\bar{a} \in A$, so ist $(\mathcal{A}, \bar{a})$ ω-saturiert.

2) Jede endliche Struktur ist ω-saturiert. (Zu endlichem $\mathcal{A}$ wähle mit 8.5 eine ω-saturiert elementare Erweiterung $\mathcal{B}$. Dann ist $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.)

3) Ist $S = \emptyset$, so ist jede S-Struktur ω-saturiert.

Beweis: Ist $\mathcal{A} = (A)$ unendlich, $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$, $\bar{a} \in A$, $b \in B \setminus A$ und $(\mathcal{B}, \bar{a}) \models \Phi[b]$. Wähle $a \in A$, das von den Elementen in $\bar{a}$ verschieden ist. Wegen $\bar{a}\, a \mapsto \bar{a}\, b \in I := \{p \in \mathrm{Part}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \mid \mathrm{df}(p) \text{ endlich}\}$ und $I : \mathcal{A} \cong_{\mathrm{part}} \mathcal{B}$, ist $(\mathcal{A}, \bar{a}, a) \equiv (\mathcal{B}, \bar{a}\, b)$ und daher $(\mathcal{A}, \bar{a}) \models \Phi[a]$. □

4) $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$ hat kein abzähhlbares ω-saturiert Modell, wobei $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$.

Beweis: Sei $\mathcal{A}$ ein ω-saturiertes Modell von $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$. Für $M \subseteq \mathbb{N}$ sei $a_M \in A$ ein Element, das den Typ Φ_M (vgl. Teil 8) von 8.2) erfüllt. Für $M, K \subseteq \mathbb{N}$

mit $M \neq K$ gilt $a_M \neq a_K$: Ist etwa $m \in M \setminus K$, so $\mathcal{A} \models$ "$p_m|x$"$[a_M]$ und $\mathcal{A} \models \neg$"$p_m|x$"$[a_K]$. Da es überabzählbar viele Teilmengen von $\mathbb{N}$ gibt, ist A überabzählbar. $\square$

5) Ist S höchstens abzählbar und U ein freier Ultrafilter auf $\mathbb{N}$, so ist $\Pi_{\mathbb{N}}\mathcal{A}_i/U$ ω-saturiert (sogar ω_1-saturiert).

Beweis: Wir zeigen zunächst die folgende Zwischenbehauptung:

Ist Φ ein 1-Typ von $\mathrm{Th}(\Pi_{\mathbb{N}}\mathcal{A}_i/U)$, so wird Φ in $\Pi_{\mathbb{N}}\mathcal{A}_i/U$ erfüllt.

Sei $\Phi = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt nach Teil 5) in 8.2: $\Pi_{\mathbb{N}}\mathcal{A}_i/U \models \exists v_0(\varphi_0 \wedge \dots \wedge \varphi_n)$. Somit ist nach dem Satz von Los $Y_n := \{i \mid \mathcal{A}_i \models \exists v_0(\varphi_0 \wedge \dots \wedge \varphi_n)\} \in U$. Da U frei ist, gilt

$$X_n := \{i \mid n \leq i\} \cap Y_n \in U, \quad \mathbb{N} \supseteq X_0 \supseteq X_1 \supseteq \dots \quad \text{und } \bigcap X_n = \emptyset.$$

Sei $a \in \Pi_{\mathbb{N}}A_i$ ein Element mit

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $i \in X_n \setminus X_{n+1}$: $\mathcal{A}_i \models (\varphi_0 \wedge \dots \wedge \varphi_n)[a(i)]$.

Wegen $X_n \subseteq Y_n$ gibt es ein solches a. Nun ist $\{i \mid \mathcal{A}_i \models \varphi_n[a(i)]\} \supseteq X_n$ und wiederum nach dem Satz von Los gilt $\Pi_{\mathbb{N}}\mathcal{A}_i/U \models \varphi_n[a_U]$. Insgesamt $\Pi_{\mathbb{N}}\mathcal{A}_i/U \models \Phi[a_U]$.

Sei nun $a_{0U}, a_{1U}, \dots$ eine endliche oder unendliche Folge. Dann ist

$$(\Pi_{\mathbb{N}}\mathcal{A}_i/U, a_{0U}, a_{1U}, \dots) = \Pi_{\mathbb{N}}(\mathcal{A}_i, a_0(i), a_1(i), \dots)/U.$$

Die Struktur auf der rechten Seite dieser Gleichung ist ein Ultraprodukt, somit erfüllt sie nach der Zwischenbehauptung alle 1-Typen ihrer Theorie.

9 Partielle Isomorphie und ω-saturierte Strukturen

Ein n-Typ Φ von Σ ist *vollständig*, wenn für alle $\psi \in L_n^S$

$$\Sigma \cup \Phi \models \psi \quad \text{oder } \Sigma \cup \Phi \models \neg\psi,$$

wenn also $\Sigma \cup \Phi\frac{c_0 \dots c_{n-1}}{v_0 \dots v_{n-1}}$ eine vollständige Theorie in $L^{S \cup \{c_0, \dots, c_{n-1}\}}$ ist.

Bemerkungen und Beispiele 9.1 1) Ist $\mathcal{A}$ eine S-Struktur, $\mathcal{A} \models \Sigma$ und $\bar{a} \in A^n$, so ist

$$[\bar{a}]_{\mathcal{A}} \quad := \quad \{\psi \in L_n^S \mid \mathcal{A} \models \psi[\bar{a}]\}$$

ein vollständiger n-Typ von Σ. Man beachte, daß $\Sigma \subseteq [\bar{a}]_{\mathcal{A}}$, somit ist $\Phi\frac{c_0 \dots c_{n-1}}{v_0 \dots v_{n-1}}$ für $\Phi := [\bar{a}]_{\mathcal{A}}$ vollständig.

2) Ist Φ ein vollständiger n-Typ von Σ, $\mathcal{A} \models \Sigma$ und $\mathcal{A} \models \Phi[\bar{a}]$, so

$$[\bar{a}]_{\mathcal{A}} = \{\psi \in L_n^S \mid \Sigma \cup \Phi \models \psi\}.$$

3) Jeder n-Typ von Σ ist in einem vollständigem n-Typ enthalten. (Vgl. 1).)

4) Für Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ und $\bar{a} \in A^n$, $\bar{b} \in B^n$ gilt:

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv (\mathcal{B}, \bar{b}) \quad &\text{gdw} \quad [\bar{a}]_{\mathcal{A}} = [\bar{b}]_{\mathcal{B}} \\ &\text{gdw} \quad \mathcal{B} \models [\bar{a}]_{\mathcal{A}}[\bar{b}].\end{aligned}$$

Für Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ setzen wir

$$I_{\equiv}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \quad := \quad \{\bar{a} \mapsto \bar{b} \mid r \geq 0,\, \bar{a} \in A^r,\, \bar{b} \in B^r,\, (\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv (\mathcal{B}, \bar{b})\}.$$

Bemerkungen 9.2 1) $I_{\equiv}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \subseteq \mathrm{Part}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

2) $\bar{a} \mapsto \bar{b} \in I_{\equiv}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ gdw $\bar{b} \mapsto \bar{a} \in I_{\equiv}(\mathcal{B}, \mathcal{A})$.

3) $\begin{aligned}\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \quad &\text{gdw} \quad \emptyset \in I_{\equiv}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \\ &\text{gdw} \quad I_{\equiv}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \neq \emptyset.\end{aligned}$

4) Wenn $\mathcal{B}$ ω-saturiert ist, so hat $I_{\equiv}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ die Hin-Eigenschaft.

Beweis: Sei $\bar{a} \mapsto \bar{b} \in I_{\equiv}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ und $a \in A$. $[a]_{(\mathcal{A}, \bar{a})}$ ist ein Typ von $\mathrm{Th}(\mathcal{A}, \bar{a})$ $(= \mathrm{Th}(\mathcal{B}, \bar{b}))$. Da $\mathcal{B}$ ω-saturiert ist, existiert $b \in B$, das diesen Typ erfüllt; somit $(\mathcal{A}, \bar{a}a) \equiv (\mathcal{B}, \bar{b}b)$ und daher $\bar{a}a \mapsto \bar{b}b \in I_{\equiv}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. $\square$

5) Wenn $\mathcal{A}$ ω-saturiert ist, so hat $I_{\equiv}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ die Her-Eigenschaft.

6) Wenn $I_{\equiv}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ die Hin-Eigenschaft hat, also insbesonder wenn $\mathcal{B}$ ω-saturiert ist, $\mathcal{A}\equiv\mathcal{B}$ und A höchstens abzählbar ist, so ist $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ elementar einbettbar.

Beweis: Wähle $p_0 \in I_{\equiv}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ beliebig (vgl. 3)). Ist $A = \{a_1, a_2, \dots\}$, so erhalten wir mit der Hin-Eigenschaft (vgl. 4)) eine Folge $(p_n)_{\mathbb{N}}$

$$p_0 \subseteq p_1 \subseteq \dots, \quad p_n \in I_{\equiv}(\mathcal{A},\mathcal{B}), \quad a_n \in \mathrm{df}(p_n).$$

Für $\pi := \bigcup p_n$ gilt dann $\pi : \mathcal{A} \xrightarrow{a} \mathcal{B}$. Es gilt sogar $\pi : \mathcal{A} \xrightarrow{e} \mathcal{B}$: Ist nämlich $\bar{a} \in A$, etwa $\bar{a} \in \mathrm{df}(p_n)$, so gilt $(\mathcal{A},\bar{a}) \equiv (\mathcal{B},\pi(\bar{a}))$ nach Definition von $I_{\equiv}(\mathcal{A},\mathcal{B})$.

Satz 9.3 *Für ω-saturierte Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind äquivalent.*

1. $\mathcal{A}\equiv\mathcal{B}$.
2. $I_{\equiv}(\mathcal{A},\mathcal{B}) : \mathcal{A} \cong_{\mathrm{part}} \mathcal{B}$.
3. $\mathcal{A} \cong_{\mathrm{part}} \mathcal{B}$.

Beweis: 2. $\Rightarrow$ 3. ist klar, 3. $\Rightarrow$ 1. haben wir in §.3 gezeigt, und 1. $\Rightarrow$ 2. ergibt sich aus wir mit den Teilen 3), 4) und 5) der vorangehenden Bemerkungen.

Satz 9.4 *Σ ist vollständig gdw je zwei ω-saturierte Modelle von Σ partiell isomorph sind.*

Beweis: $\Rightarrow$: Seien $\mathcal{A},\mathcal{B}$ ω-saturierte Modelle von Σ. Da Σ vollständig ist, gilt $\mathcal{A}\equiv\mathcal{B}$. Wegen 9.3 daher $\mathcal{A} \cong_{\mathrm{part}} \mathcal{B}$.

$\Leftarrow$: Seien $\mathcal{A},\mathcal{B} \models \Sigma$. Wir müssen $\mathcal{A}\equiv\mathcal{B}$ zeigen. Hierzu wählen wir mit 8.5 ω-saturierte elementare Erweiterungen $\mathcal{A}'$ und $\mathcal{B}'$ von $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$. Nach Voraussetzung ist $\mathcal{A}' \cong_{\mathrm{part}} \mathcal{B}'$; insbesondere $\mathcal{A}'\equiv\mathcal{B}'$ und somit $\mathcal{A}\equiv\mathcal{B}$. $\square$

Wir wenden uns Beispielen zu:

A. Diskrete Ordnungen Wir haben in §.3 gesehen, daß Σ_{dkO} vollständig ist, daß aber $\mathcal{Z} \not\cong_{\mathrm{part}} \mathcal{Z}+\mathcal{Z}$. Wir zeigen $I : \mathcal{A} \cong_{\mathrm{part}} \mathcal{B}$ für ω-saturierte Modelle $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ von Σ_{dkO} und

$$I := \{p \in \mathrm{Part}(\mathcal{A},\mathcal{B}) \mid \mathrm{df}(p) \text{ endlich}, \forall a, a' \in \mathrm{df}(p) : \ d(a,a') = d(p(a),p(a'))\}.$$

Beweis: I ist nicht leer, da $\emptyset \in I$. I hat die Hin-Eigenschaft: Sei $p \in I$, etwa $p : a_1 \dots a_n \mapsto b_1 \dots b_n$ mit $a_1 < \dots < a_n$, und $a \in A$, etwa $a_i < a < a_{i+1}$.

Wenn $d(a_i, a) = k$ oder $d(a, a_{i+1}) = k$, so wählen wir b mit $b_i < b < b_{i+1}$ und $d(b_i, b) = k$ bzw. $d(b, b_{i+1}) = k$. Dann ist $p \cup \{(a, b)\} \in I$.

Sei nun $d(a_i, a) = \infty$ und $d(a, a_{i+1}) = \infty$ und somit $d(a_i, a_{i+1}) = d(b_i, b_{i+1}) = \infty$. Dann ist

$$\Phi_z \quad := \quad \{c < x < d\} \cup \{\text{“}d(c, x) \geq n \, \wedge \, d(x, d) \geq n\text{“} \mid n \geq 1\}$$

ein 1-Typ vpn $\mathrm{Th}(\mathcal{B}, b_i, b_{i+1})$, da jede endliche Teilmenge in $(\mathcal{B}, b_i, b_{i+1})$ erfüllbar ist. Da $\mathcal{B}$ ω-saturiert ist, existiert ein $b \in B$ mit $(\mathcal{B}, b_i, b_{i+1}) \models \Phi_z[b]$. Dann ist $p \cup \{(a, b)\} \in I$. $\square$

B. Algebraisch abgeschlossene Körper Sei $S_K := \{+.-, \cdot, 0, 1\}$ die Symbolmenge für Körper und Σ_K die Körperaxiome. Die Modelle von

$$\Sigma_{\mathrm{AAK}} = \Sigma_K \cup \{\forall y_0 \dots \forall y_{n-1} \exists x \, x^n + y_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + y_1 \cdot x + y_0 = 0 \mid n \geq 1\}$$

sind die algebraisch abgeschlossenen Körper. Ist q eine Primzahl und $\chi_q := \underbrace{1 + \dots + 1}_{q\,\mathrm{mal}} = 0$, so sind die Modelle von $\Sigma_{\mathrm{AAK_q}} := \Sigma_{\mathrm{AAK}} \cup \{\chi_q\}$ bzw. von $\Sigma_{\mathrm{AAK_0}} := \Sigma_{\mathrm{AAK}} \cup \{\neg \chi_q \mid q \text{ Primzahl}\}$ die algebraisch abgeschlossenen Körper der Carakteristik q bzw. Null.

Bemerkung 9.5 *Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ω-saturierte algebraisch abgeschlossene Körper und*

$$I \quad := \quad \{p \in \mathrm{Part}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \mid \mathrm{df}(p) \text{ endlich erzeugte Substruktur von } \mathcal{A}\}.$$

Dann

1. *Wenn* $\mathrm{char}(\mathcal{A}) \neq \mathrm{char}(\mathcal{B})$, *so* $I = \emptyset$.

2. *Wenn* $\mathrm{char}(\mathcal{A}) = \mathrm{char}(\mathcal{B})$, *so* $I : \mathcal{A} \cong_{\mathrm{part}} \mathcal{B}$.

Bevor wir uns dem Beweis zuwenden, notieren wir noch eine Folgerung, die wir mit Satz 9.4 erhalten:

Folgerung 9.6 $\Sigma_{\mathrm{AAK_0}}$ *und* $\Sigma_{\mathrm{AAK_q}}$ *sind vollständig.*

Beweis: Zu 1.: Sei $c = \mathrm{char}(\mathcal{A}) \neq \mathrm{char}(\mathcal{B})$, etwa $c \neq 0$, und $p \in I$. Dann sind $0^{\mathcal{A}}, 1^{\mathcal{A}}, 1^{\mathcal{A}} + 1^{\mathcal{A}}, \ldots \in [\mathrm{df}(p)]^{\mathcal{A}} = \mathrm{df}(p)$. Nun ist $\underbrace{1^{\mathcal{A}} + \ldots + 1^{\mathcal{A}}}_{c\,\mathrm{mal}} = 0^{\mathcal{A}}$, aber $\underbrace{1^{\mathcal{B}} + \ldots + 1^{\mathcal{B}}}_{c\,\mathrm{mal}} \neq 0^{\mathcal{B}}$. Somit ist p kein partieller Isomorphismus.

Zu 2.: Sei $\mathrm{char}(\mathcal{A}) = \mathrm{char}(\mathcal{B})$. Dann ist $[\emptyset]^{\mathcal{A}} \cong [\emptyset]^{\mathcal{B}}$ und somit $I \neq \emptyset$. I hat die Hin-Eigenschaft: Sei nämlich $p \in I$, etwa $\mathrm{df}(p) = [\bar{a}]^{\mathcal{A}}$. Mit $p : [\bar{a}]^{\mathcal{A}} \cong [p(\bar{a})]^{\mathcal{B}}$ gilt $\tilde{p} :< \bar{a} >^{\mathcal{A}} \cong < p(\bar{a}) >^{\mathcal{B}}$, wobei $\tilde{p}(\frac{e}{d}) = \frac{p(e)}{p(d)}$. Wir setzen $\mathcal{A}_0 :=< \bar{a} >^{\mathcal{A}}$ und $\mathcal{B}_0 :=< p(\bar{a}) >^{\mathcal{B}}$. Sei nun $a \in A$.
1. F a l l: a ist algebraisch über $\mathcal{A}_0$. Da $\mathcal{B}$ algebraisch abgeschlossen ist, gibt es ein $b \in B$, das Nullstelle ist von $\tilde{p}(r_{a,\mathcal{A}_0})$, dem "Bild" unter p des Minimalpolynoms $r_{a,\mathcal{A}_0}$ von a über $\mathcal{A}_0$. Dann gibt es einen Isomorphismus q, $q : \mathcal{A}_0(a) \cong \mathcal{B}_0(b)$, mit $q \supseteq \tilde{p} \supseteq p$. Daher ist $q|[\bar{a}a]^{\mathcal{A}} \in I$.
2. F a l l: a ist transzendent über $\mathcal{A}_0$. Da $\mathcal{B}$ als algebraisch abgeschlossener Körper unendlich ist, ist Φ^n (nach Teil 7) von 8.2) ein 1-Typ von $\mathrm{Th}(\mathcal{B}, p(\bar{a}))$, somit gibt es $b \in B$ mit $(\mathcal{B}, p(\bar{a})) \models \Phi^n[b]$. Dann ist b transzendent über $\mathcal{B}_0$ und daher gibt es einen Isomorphismus q, $q : \mathcal{A}_0(a) \cong \mathcal{B}_0(b)$, mit $q \supseteq \tilde{p} \supseteq p$. Dann ist $q|[\bar{a}a]^{\mathcal{A}} \in I$. $\square$

Wir leiten noch ein Ergebnis über die Gültigkeit von $\forall\exists$-Sätzen im Körper $\mathcal{C}$ der komplexen Zahlen her. Für eine Primzahl q bezeichne $\mathcal{Z}_q := (\mathbb{Z}_q, +, -, 0, 1)$ "den" Körper mit q Elementen und es sei $\mathcal{A}_q \supseteq \mathcal{Z}_q$ "der" algebraische Abschluß von $\mathcal{Z}_q$, d.h. $\mathcal{A}_q \models \Sigma_{\mathrm{AAK}_q}$ und $\mathcal{A}_q$ enthält nur Elemente, die algebraisch über $\mathcal{Z}_q$ sind. Ist also $\mathcal{B} \models \Sigma_{\mathrm{AAK}_q}$, so ist $[\emptyset]^{\mathcal{B}} \cong \mathcal{Z}_q$ und $B_0 := \{b \in B \mid b \text{ algebraisch}/[\emptyset]^{\mathcal{B}}\}$ ist der Träger einer zu $\mathcal{A}_q$ isomorphen Substruktur von $\mathcal{B}$. Mit $\mathcal{C}$ bezeichnen wir den Körper der komplexen Zahlen.

Lemma 9.7 *Für $\varphi \in L_0^{S_K}$ sind äquivalent:*

1. $\mathcal{C} \models \varphi$.
2. $\exists n \forall \mathcal{B}$*(wenn* $\mathcal{B} \models \Sigma_{\mathrm{AAK}}$ *und* $\mathrm{char}(\mathcal{B}) \geq n$*, so* $\mathcal{B} \models \varphi$*).*
3. $\exists n \forall q \geq n$*, q Primzahl:* $\mathcal{A}_q \models \varphi$.

Beweis: 1. $\Rightarrow$ 2.: Da Σ_{AAK_0} vollständig ist, gilt mit $\mathcal{C} \models \varphi$ auch $\Sigma_{\mathrm{AAK}} \cup \{\neg\chi_q \mid q \text{ Primzahl}\} \models \varphi$; nach dem Endlcihkeitssatz gibt es n mit

$$\Sigma_{\mathrm{AAK}} \cup \{\neg\chi_q \mid q \text{ Primzahl}, q < n\} \models \varphi$$

also 2.

2. $\Rightarrow$ 1.: Gilt 2. für φ, so kann 2. für $\neg\varphi$ nicht gelten; nach der bereits bewiesenen Richtung daher $\mathcal{C} \models \varphi$.

Die Äquivalenz 2. $\Leftrightarrow$ 3. ist klar, da Σ_{AAK_q} vollständig ist. $\square$

Satz 9.8 *Der Körper $\mathcal{C}$ der komplexen Zahlen erfüllt jeden $\forall\exists$-Satz, der in allen endlichen Körpern gilt.*

Beweis: Sei φ ein $\forall\exists$-Satz. Nach dem vorangehenden Lemma genügt der Nachweis, daß fur jede Primzahl q der Körper $\mathcal{A}_q$ mit von Null verschiedener Charakteistik ein Modell von φ ist. $\mathcal{A}_q$ ist die Vereinigung des gerichteten Systems seiner endlich erzeugten Substrukturen. Diese sind (vgl. Anhang 9.1) endliche Körper, nach Voraussetzung also Modelle von φ. Da φ ein $\forall\exists$-Satz ist, gilt dann auch $\mathcal{A}_q \models \varphi$. $\square$

Ist $\mathcal{B}$ ein Körper, $n, k \geq 1$, so ist $f : B^n \to B^k$, eine *Polynomabbildung*, wenn es $r_1, \ldots, r_k \in \mathcal{B}[x_1, \ldots, x_n]$ gibt mit

$$f(x_1, \ldots, x_n) \quad := \quad (r_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, r_k(x_1, \ldots, x_n)).$$

Ist $r \in \mathcal{B}[x_1, \ldots, x_n]$ mit $r = \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_n = 0}^{s} a_{\nu_1, \ldots, \nu_n} x_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\nu_n}$, so sei $\mathrm{gr}(r) := \max\{\nu_1 + \ldots + \nu_n \mid a_{\nu_1, \ldots, \nu_n} \neq 0\}$ der *Grad* von r. Für f wie oben ist der *Grad* $\mathrm{gr}(f)$ gegeben durch $\mathrm{gr}(f) := \max\{\mathrm{gr}(r_i) \mid i = 1, \ldots, k\}$.

Satz 9.9 *Jede injektive Polynomabbildung $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ ist surjektiv.*

Man beachte, daß $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ mit $x \mapsto x^3$ eine injektive, aber nicht surjektive Polynomabbildung ist.

Beweis: Es genügt, für jedes $s \geq 1$ einen $\forall\exists$-Satz φ_s anzugeben mit der Eigenschaft, daß für alle Körper $\mathcal{B}$,

> $\mathcal{B} \models \varphi_s$ gdw jede injektive Polynomabbildung von B^n nach B^n vom Grade $\leq s$ ist surjektiv.

Denn φ_s gilt in allen endlichen Körpern und damit nach dem vorangehenden Satz auch in $\mathcal{C}$. Man kann aber leicht ein derartiges φ angeben; wir deuten dies an:

$$\varphi_s \quad := \quad \forall \ldots \forall (\forall \bar{y} \exists \bar{z} \text{“} f(\bar{z}) = \bar{y} \text{“} \vee \exists \bar{u} \exists \bar{v} (\neg \text{“} \bar{u} = \bar{v} \text{“‘} \wedge \text{“} f(\bar{u}) = f(\bar{v}) \text{“})).$$

$\square$

Wir haben gesehen, daß in der Regel eine Theorie kein abzählbares ω-saturiertes Modell besitzt. In manchen Situation helfen uns ω-homogene Strukturen:

Definition 9.10 $\mathcal{A}$ ist *ω-homogen*, wenn $I_{\equiv}(\mathcal{A},\mathcal{A}) : \mathcal{A} \cong_{\text{part}} \mathcal{A}$.

Bemerkungen 9.11 1) Es sind äquivalent

(a) $\mathcal{A}$ ist ω-homogen.

(b) $I_{\equiv}(\mathcal{A},\mathcal{A})$ hat die Hin-Eigenschaft.

(c) $\forall r \geq 0 \forall \bar{a}, \bar{b} \in A^r ((\mathcal{A},\bar{a}) \equiv (\mathcal{A},\bar{b}) \;\Rightarrow\; \forall a \in A \exists b \in A\, (\mathcal{A},\bar{a}a) \equiv (\mathcal{A},\bar{b}b))$.

2) Ist $\mathcal{A}$ ω-saturiert, so ist ω-homogen. (Vgl. Teil 4) von 9.2.)

3) $(\mathbb{N},<)$ ist ω-homogen aber nicht ω-saturiert.

4) Ist $\mathcal{A}$ ω-homogen und $\bar{a} \in A$, so ist auch $(\mathcal{A},\bar{a})$ ω-homogen.

5) Ist $\mathcal{A}$ ω-homogen und erfüllt $\mathcal{A}$ alle (vollständigen) Typen von $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$, so ist $\mathcal{A}$ ω-saturiert.

Beweis: Sei $\bar{a} \in A$ und Φ ein 1-Typ von $\mathrm{Th}(\mathcal{A},\bar{a})$. Dann gibt es ein $(\mathcal{B},\bar{b})$ und ein $b \in B$ mit $(\mathcal{A},\bar{a}) \equiv (\mathcal{B},\bar{b})$ und $(\mathcal{B},\bar{b}) \models \Phi[b]$. Zu $[\bar{b}b]_{\mathcal{B}}$ existieren nach Voraussetzung $\bar{e}e \in A$ mit $(\mathcal{A},\bar{e}e) \equiv (\mathcal{B},\bar{b}b)$ Dann $(\mathcal{A},\bar{a}) \equiv (\mathcal{A},\bar{e})$ und wegen der ω-Homogeneität von $\mathcal{A}$ gibt es ein $a \in A$ mit $(\mathcal{A},\bar{a}a) \equiv (\mathcal{A},\bar{e}e)$, insbesondere $(\mathcal{A},\bar{a}) \models \Phi[a]$. $\square$

6) Ist $\mathcal{A}$ eine höchstens abzählbare, ω-homogene Struktur und $(\mathcal{A},\bar{a}) \equiv (\mathcal{A},\bar{b})$, so gibt es einen Automorphismus π mi $\pi(\bar{a}) = \bar{b}$.

Beweis: Da $\bar{a} \mapsto \bar{b} \in I_{\equiv}(\mathcal{A},\mathcal{A})$ und $I_{\equiv}(\mathcal{A},\mathcal{A}) : \mathcal{A} \cong_{\text{part}} \mathcal{A}$, folgt die Behauptung aus §.3. $\square$

7) Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ höchstens abzählbare, ω-homogene und elementar äquivalente Strukturen, welche dieselben (vollständigen) Typen erfüllen, so sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ isomorph.

Beweis: Wir zeigen $I_{\equiv}(\mathcal{A},\mathcal{B}) : \mathcal{A} \cong_{\text{part}} \mathcal{B}$. Da $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, ist (vgl. Teil 3) von 9.2) $I_{\equiv}(\mathcal{A},\mathcal{B}) \neq \emptyset$. Wir zeigen noch die Hin-Eigenschaft: Gelte $(\mathcal{A},\bar{a}) \equiv (\mathcal{B},\bar{b})$ und sei $a \in A$. Dann ist $[\bar{a}a]_{\mathcal{A}}$ ein Typ von $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ $(= \mathrm{Th}(\mathcal{B}))$. Nach Voraussetzung gibt es $\bar{e}, e \in B$ mit $(\mathcal{A}, \bar{a}a) \equiv (\mathcal{B}, \bar{e}e)$. Somit $(\mathcal{B}, \bar{e}) \equiv (\mathcal{B}, \bar{b})$. Da $\mathcal{B}$ ω-homogen ist, gibt es $b \in B$ mit $(\mathcal{B}, \bar{e}e) \equiv (\mathcal{B}, \bar{b}b)$; insgesamt $(\mathcal{A}, \bar{a}a) \equiv (\mathcal{B}, \bar{b}b)$, also $\bar{a}a \mapsto \bar{b}b \in I_{\equiv}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. □

8) Seien S_1 und S_2 höchstens äbzahlbar, $S = S_1 \cap S_2$, $\mathcal{A}$ eine höchstens äbzahlbare S_1-Struktur und $\mathcal{B}$ eine höchstens äbzahlbare S_2-Struktur mit $\mathcal{A}|S \equiv \mathcal{B}|S$. Dann gibt es eine höchstens äbzahlbare S_1-Struktur $\mathcal{C}$ und eine höchstens äbzahlbare S_2-Struktur $\mathcal{D}$ mit

$$\mathcal{A} \preceq \mathcal{C},\ \mathcal{B} \preceq \mathcal{D},\ \mathcal{C}|S \text{ und } \mathcal{D}|S \text{ sind } \omega\text{-homogen und } \ \mathcal{C}|S \cong \mathcal{D}|S.$$

Insbesondere: Jedes abzählbares $\mathcal{A}$ (mit höchstens abzählbarem S) hat eine abzählbare und ω-homogene elementare Erweiterung.

Beweis: Wir konstruieren Folgen $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \preceq \mathcal{A}_1 \preceq \dots \qquad \mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \preceq \mathcal{B}_1 \preceq \dots$$

mit

1. A_{n+1} und B_{n+1} sind höchstens abzählbar;
2. $\forall r \geq 0 \forall \bar{a}, \bar{e} \in A_n^r((\mathcal{A}_n|S, \bar{a}) \equiv (\mathcal{A}_n|S, \bar{e}) \Rightarrow \forall a \in A_n \exists e \in A_{n+1}(\mathcal{A}_{n+1}|S, \bar{a}a) \equiv (\mathcal{A}_{n+1}|S, \bar{e}e))$;
3. $\forall r \geq 0 \forall \bar{b}, \bar{e} \in B_n^r((\mathcal{B}_n|S, \bar{b}) \equiv (\mathcal{B}_n|S, \bar{e}) \Rightarrow \forall b \in B_n \exists e \in B_{n+1}(\mathcal{B}_{n+1}|S, \bar{b}b) \equiv (\mathcal{B}_{n+1}|S, \bar{e}e))$;
4. Jeder vollständige Typ, der in $\mathcal{B}_n|S$ erfüllt wird, wird in $\mathcal{A}_{n+1}$ erfüllt;
5. Jeder vollständige Typ, der in $\mathcal{A}_n|S$ erfüllt wird, wird in $\mathcal{B}_{n+1}$ erfüllt.

Wir setzen $\mathcal{C} := \bigcup \mathcal{A}_n$ und $\mathcal{D} := \bigcup \mathcal{B}_n$. Wegen 2. ist $\mathcal{C}|S$ ω-homogen: Sei $r \geq 0$, $\bar{a}, \bar{e} \in C^r$ mit $(\mathcal{C}_n|S, \bar{a}) \equiv (\mathcal{C}_n|S, \bar{e})$ und $a \in C$. Wir wählen n mit $\bar{a}, \bar{e}, a \in A_n$. Nach 2. gibt es $e \in A_{n+1}$ mit $(\mathcal{A}_{n+1}|S, \bar{a}a) \equiv (\mathcal{A}_{n+1}|S, \bar{e}e))$. Somit $(\mathcal{C}|S, \bar{a}a) \equiv (\mathcal{C}|S, \bar{e}e))$.– Entsprechend zeigt man mit 3., daß $\mathcal{D}|S$ ω-homogen ist. Wegen 1. sind C und D höchstens abzählbar. Da $\mathcal{C}|S$ und $\mathcal{D}|S$ nach 4. und 5. dieselben vollständigen Typen erfüllen, sind sie nach 7) isomorph. □

Folgerung Ist Σ vollständig und höchstens abzählbar, so hat Σ ein höchstens abzählbares ω-homogenes Modell.

Satz 9.12 (Algebraische Charakterisierung der Gleichheit von Typen) *Fur $\bar{a}, \bar{b} \in \mathcal{A}$ gilt*

$$[\bar{a}]_{\mathcal{A}} = [\bar{b}]_{\mathcal{A}} \quad gdw \quad \text{es gibt } \mathcal{B} \text{ und } \pi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{B}) \text{ mit } \mathcal{A} \preceq \mathcal{B} \text{ und } \pi(\bar{a}) = \bar{b}.$$

Sind $\mathcal{A}$ und S höchstens abzählbar, so kann $\mathcal{B}$ als höchstens abzählbar gewählt werden.

Beweis: Die Richtung "$\Leftarrow$" ist klar. Sei daher $(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv (\mathcal{A}, \bar{b})$. Wir setzen $S' := S \cup \{\bar{c}, \bar{c}', \pi\}$, wobei π ein einstelliges Funktionssymbol ist. Zu zeigen ist

$$\mathrm{Erf}\ \mathrm{Th}(\mathcal{A}, \bar{a}, \bar{b}) \cup \{\text{“}\pi \text{ ist } S\text{-Automorphismus”}\} \cup \{\text{“}\pi(\bar{c}) = \bar{c}'\text{“}\}.$$

Wegen des Endlichkeitssatzes reicht es, wenn wir Erf Σ_0 für jede endliche Teilmenge $S_0 \subseteq S$ zeigen, dass Erf Σ_0, wobei

$$\Sigma_0 \;:=\; \mathrm{Th}(\mathcal{A}|S_0, \bar{a}, \bar{b}) \cup \{\text{“}\pi \text{ ist } S_0\text{-Automorphismus”}\} \cup \{\text{“}\pi(\bar{c}) = \bar{c}'\text{“}\}.$$

Hierzu wählen wir ein höchstens abzählbares Modell $(\mathcal{C}, \bar{d}, \bar{e})$ von $\mathrm{Th}(\mathcal{A}|S_0, \bar{a}, \bar{b})$. Wegen Teil 8) der vorangehenden Bemerkung können wir annehmen, daß $\mathcal{C}$ ω-homogen ist. Es gilt $(\mathcal{C}, \bar{d}) \equiv (\mathcal{C}, \bar{e})$ (beachte $\varphi(\bar{c}) \leftrightarrow \varphi(\bar{c}') \in \mathrm{Th}(\mathcal{A}|S_0, \bar{a}, \bar{b})$). Wegen 6) gibt es ein $\pi^C \in \mathrm{Aut}(\mathcal{C})$ mit $\pi^C(\bar{d}) = \bar{e}$; insgesamt $(\mathcal{C}, \bar{c}, \bar{e}) \models \Sigma_0$.

9.1 Anhang: Hilfsmittel aus der Körpertheorie

Mit $\mathcal{Z}$ bezeichnen wir den Ring der ganzen Zahlen, mit $\mathcal{Q}$ den Körper der rationalen Zahlen und für eine Primzahl q bezeichne $\mathcal{Z}_q := (\mathbb{Z}_q, +, -, \cdot, 0, 1)$ "den" Körper mit q Elementen. $\mathcal{A}, \mathcal{A}_0, \mathcal{B}$ und $\mathcal{B}_0$ seien im folgenden Körper. Ist $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ und $a \in A$, so sei $\mathcal{A}_0(a) := < A_0 \cup \{a\} >^{\mathcal{A}}$.

- Ist $\mathrm{char}(\mathcal{A}) = 0$, dann ist $[\emptyset]^{\mathcal{A}} \cong \mathcal{Z}$ und $< \emptyset >^{\mathcal{A}} \cong \mathcal{Q}$.
- Ist $\mathrm{char}(\mathcal{A}) = q \neq 0$, dann ist $[\emptyset]^{\mathcal{A}} = < \emptyset >^{\mathcal{A}} \cong \mathcal{Z}_q$.
- Ist $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$, $a \in A$ und a algebraisch/$\mathcal{A}_0$, so gibt es ein eindeutig bestimmtes, normiertes, irreduzibles Polynom $r_{a,\mathcal{A}_0} \in \mathcal{A}_0[x]$ mit $r_{a,\mathcal{A}_0}(a) = 0$. Es gilt $\mathcal{A}_0(a) = [A_0 \cup \{a\}]^{\mathcal{A}}$. Falls n der Grad von $r_{a,\mathcal{A}_0}$ ist, so ist

  $$\{d_{n-1} \cdot a^{n-1} + \ldots d_1 \cdot a + d_0 \mid d_{n-1}, \ldots, d_0 \in A_0\}$$

  der Träger von $\mathcal{A}_0(a)$. Insbesondere ist mit $\mathcal{A}_0$ auch $\mathcal{A}_0(a)$ endlich. Mit dem vorangehenden Punkt erhalten wir daher:

- Ist $\mathcal{Z}_q \subseteq \mathcal{A}$ und ist jedes a in $\bar{a} \in A$ algebraisch/$\mathcal{Z}_q$, so ist $< \bar{a} >^{\mathcal{A}}$ endlich.

Ist $\pi : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ und $r := a_n \cdot x^n + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$, so setzen wir $\pi(r) := \pi(a_n) \cdot x^n + \ldots + \pi(a_1) \cdot x + \pi(a_0)$.

- Ist $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$, $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$, $a \in A$, $b \in B$, a algebraisch/$\mathcal{A}_0$ und b algebraisch/$\mathcal{B}_0$, $\pi : \mathcal{A}_0 \cong \mathcal{B}_0$ und $\pi(r_{a,\mathcal{A}_0}) = r_{b,\mathcal{B}_0}$, so gibt es ein $\tilde{\pi}$ mit
$$\pi \subseteq \tilde{\pi},\ \tilde{\pi} : \mathcal{A}_0(a) \cong \mathcal{B}_0(b) \ \text{ und } \ \tilde{\pi}(a) = b$$
.

- Ist $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$, $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$, $a \in A$, $b \in B$, a transzendent/A_0 und b transzendent/B_0, $\pi : \mathcal{A}_0 \cong \mathcal{B}_0$, so gibt es ein $\tilde{\pi}$ mit
$$\pi \subseteq \tilde{\pi},\ \tilde{\pi} : \mathcal{A}_0(a) \cong \mathcal{B}_0(b), \ \text{ und } \ \tilde{\pi}(a) = b$$
.

10 Abschlußeigenschaften der ersten Stufe

Satz 10.1 (Craigscher Interpolationssatz) *Sei* $S = S_1 \cap S_2$, $\varphi \in L_r^{S_1}$ *und* $\psi \in L_r^{S_2}$.

> *Wenn* $\models \varphi \to \psi$, *so gibt es* $\chi \in L_r^S$ *mit* $\models \varphi \to \chi$ *und* $\models \chi \to \psi$.

Beweis: Wir können annehmen, daß S_1 und S_2 endlich sind und beschränken uns auf den Fall $r = 0$. Für $n \geq 0$ setzen wir

$$\chi^n \quad := \quad \bigvee\{\varphi^n_{\mathcal{A}|S} \mid \mathcal{A}\ S_1\text{-Struktur},\ \mathcal{A} \models \varphi\}.$$

Dann

$$\models \varphi \to \chi^n \quad \text{und} \quad \models \chi^{n+1} \to \chi^n.$$

Nach dem Endlichkeitssatz genügt es daher, $\{\chi^n \mid n \geq 0\} \models \psi$ nachzuweisen. Sei also $\mathcal{B}$ eine S_2-Struktur mit $\mathcal{B} \models \{\chi^n \mid n \geq 0\}$. Nach dem Satz von Löwenheim und Skolem können wir annehmen, dass B höchstens abzählbar ist. Dann gibt es zu jedem n eine S_1-Struktur $\mathcal{A}_n$ mit $\mathcal{A}_n \models \varphi$ und $\mathcal{B} \models \varphi^n_{\mathcal{A}_n|S}$. Somit $\mathcal{A}_n|S \equiv_n \mathcal{B}|S$, also $\mathcal{A}_n \models \varphi^n_{\mathcal{B}|S}$. Daher ist Erf $\{\varphi\} \cup \{\varphi^n_{\mathcal{B}|S} \mid n \geq 0\}$: Es gibt eine höchstens abzählbare S_1-Struktur $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} \models \varphi$ und $\mathcal{A}|S \equiv_n \mathcal{B}|S$ für alle $n \geq 0$; also $\mathcal{A}|S \equiv \mathcal{B}|S$. Nach Teil 8) von 9.11 gibt es eine S_1-Struktur $\mathcal{C}$ und eine S_2-Struktur $\mathcal{D}$ mit

$$\mathcal{A} \prec \mathcal{C},\ \mathcal{B} \prec \mathcal{D} \text{ und } \ \mathcal{C}|S \cong \mathcal{D}|S, \ \text{ etwa } \ \pi : \mathcal{C}|S \cong \mathcal{D}|S.$$

Wir definieren die $S_1 \cup S_2$-Struktur $\mathcal{D}' := (\mathcal{D}, (k^D)_{k \in S_1 \setminus S})$, so daß $\pi : \mathcal{C} \cong \mathcal{D}'|S_1$. Da $\mathcal{C} \models \varphi$, gilt somit $\mathcal{D}' \models \varphi$, nach Voraussetzung $\mathcal{D}' \models \psi$. Und daher mit $\mathcal{D} \models \psi$ schließlich $\mathcal{B} \models \psi$. $\square$

Satz 10.2 (Robinsonsches Konsistenzlemma) *Sei* $S = S_1 \cap S_2$ *und* $\Phi_i \subseteq L_r^{S_i}$ *für* $i = 1, 2$.

> *Wenn nicht* Erf $\Phi_1 \cup \Phi_2$, *so gibt es* $\chi \in L_r^S$ *mit* $\Phi_1 \models \chi$ *und* $\Phi_2 \models \neg\chi$.

Beweis: Wenn nicht Erf $\Phi_1 \cup \Phi_2$, so gibt es nach dem Endlichkeitssatz $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in \Phi_1$ und $\psi_1, \ldots, \psi_l \in \Phi_2$ mit $\models \varphi \to \psi$ für $\varphi := (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_m)$ und $\psi := \neg(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_l)$. Nach dem Interpolationssatz gibt es $\chi \in L_r^S$ mit $\models \varphi \to \chi$ und $\models \chi \to \psi$. Dann $\Phi_1 \models \chi$ und $\Phi_2 \models \neg\chi$. $\square$

Satz 10.3 (Bethscher Definierbarkeitssatz) *Sei* $S = S_0 \cup \{k\}$, $k \notin S_0$, *und* $\Sigma \subseteq L_0^S$.

k werde durch Σ implizit definiert, *d.h. gelte für alle S_0-Strukturen $\mathcal{A}$ und alle k^1, k^2*

$$\textit{wenn } (\mathcal{A}, k^1) \models \Sigma \textit{ und } (\mathcal{A}, k^2) \models \Sigma, \textit{ so } k^1 = k^2.$$

Dann wird k durch Σ explizit definiert, *d.h.:*
ist $k = R$ n-stellig, so ex. $\varphi \in L_n^{S_0}$ mit $\Sigma \models \forall v_0 \ldots \forall v_{n-1}(Rv_0 \ldots v_{n-1} \leftrightarrow \varphi)$;
ist $k = f$ n-stellig, so ex. $\varphi \in L_{n+1}^{S_0}$ mit $\Sigma \models \forall v_0 \ldots \forall v_n(fv_0 \ldots v_{n-1} = v_n \leftrightarrow \varphi)$;
ist $k = c$, so ex. $\varphi \in L_1^{S_0}$ mit $\Sigma \models \forall v_0(c = v_0 \leftrightarrow \varphi)$

Beweis: Wir setzen $\chi = \chi(k) := Rv_0 \ldots v_{n-1}$ und $r = n$ bzw. $\chi(k) := fv_0 \ldots v_{n-1} = v_n$ und $r = n+1$ bzw. $\chi(k) := c = v_0$ und $r = 1$. Sei k' ein neues Symbol der gleichen Art und Stellenzahl wie k. Wenn $(\mathcal{A}, k^A, k'^A) \models \Sigma(k) \cup \Sigma(k')$, so $(\mathcal{A}, k^A) \models \Sigma$ und $(\mathcal{A}, k'^A) \models \Sigma$, und somit nach Voraussetzung $k^A = k'^A$. Für $\Phi_1 := \Sigma(k) \cup \{\chi(k)\}$ und $\Phi_2 := \Sigma(k') \cup \{\neg\chi(k')\}$ ist daher nicht Erf $\Phi_1 \cup \Phi_2$. Nach dem Robinsonschen Konsistenzlemma gibt es daher ein $\varphi \in L_r^{S_0}$ mit

$$\Sigma(k) \cup \{\chi(k)\} \models \varphi \quad \text{und} \quad \Sigma(k') \cup \{\neg\chi(k')\} \models \neg\varphi.$$

Also $\Sigma(k) \cup \{\neg\chi(k) \models \neg\varphi$, da k' in φ nicht vorkommt. Insgesamt $\Sigma \models \chi(k) \leftrightarrow \varphi$. □

11 Ausdrucksstärke der ersten Stufe

Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ S-Strukturen, $\bar{a} \in A^n$, $\bar{b} \in B^n$ und $\Psi \subseteq L_n^S$, so definieren wir $\bar{a} \sim_\Psi \bar{b}$ durch

$$\bar{a} \sim_\Psi \bar{b} \quad \text{gdw} \quad \text{für alle } \psi \in \Psi \ (\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}] \text{ gdw } \mathcal{B} \models \psi[\bar{b}]).$$

Und mit $\langle \Psi \rangle$ bezeichnen wir die kleinste Teilmenge, die Ψ umfaßt und gegen $\neg$ und $\vee$ abgeschlossen ist.

Lemma 11.1 *1. Mit $\Psi \subseteq L_n^S$ ist $\langle \Psi \rangle \subseteq L_n^S$.*

2. *Wenn $\bar{a} \sim_\Psi \bar{b}$, so $\bar{a} \sim_{\langle \Psi \rangle} \bar{b}$.*

3. *Wenn $\bar{a} \sim_{L_n^S} \bar{b}$, so $(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv (\mathcal{B}, \bar{b})$.*

4. *Ist Ψ die Menge der atomaren Formeln (in L_n^S), so ist $\langle \Psi \rangle$ die Menge der quantorenfreien Formeln (in L_n^S).*

5. *Wenn $\varphi \in \langle \Psi \rangle$, so existieren $n, k \geq 1$ und ψ_{ij} mit $\models \varphi \leftrightarrow \bigvee_{i=1}^n (\psi_{i1} \wedge \ldots \wedge \psi_{ik})$ und ($\psi_{ij} \in \Psi$ oder $\psi_{ij} \in \neg\Psi := \{\neg\psi \mid \psi \in \Psi\}$).*

Satz 11.2 (Hauptsatz über Ausdrucksstärke) *Sei $\Sigma \subseteq L_0^S$ und für $n \geq 0$ sei $\Psi_n \subseteq L_n^S$ nicht leer. Dann gilt*

$$(1) \Leftrightarrow \forall n(2n), \ (1) \Leftrightarrow \forall n(3n), \ \textit{und} \ \forall n((2n) \Leftrightarrow (3n)),$$

wobei

(1) *Sind $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ ω-saturierte Modelle von Σ, so gilt*

$$I = \emptyset \quad \textit{oder} \quad I : \mathcal{A} \cong_{\text{part}} \mathcal{B}$$

für

$$I \ (= I_{(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})) \ := \ \{\bar{a} \mapsto \bar{b} \mid n \geq 0, \bar{a} \in A^n, \bar{b} \in B^n, \bar{a} \sim_{\Psi_n} \bar{b}\}.$$

(2n) *Für alle $\varphi \in L_n^S$ gibt es $\psi \in \langle \Psi_n \rangle$ mit $\Sigma \models \varphi \leftrightarrow \psi$.*

(3n) *Für alle Modelle $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ von Σ, $\bar{a} \in A^n$, $\bar{b} \in B^n$,*

$$\textit{wenn } \bar{a} \sim_{\Psi_n} \bar{b}, \textit{ so } (\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv (\mathcal{B}, \bar{b}).$$

Beweis: $(2n) \Rightarrow (3n)$: Wenn $\bar{a} \sim_{\Psi_n} \bar{b}$, so $\bar{a} \sim_{<\Psi_n>} \bar{b}$ und nach (2n) daher $(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv (\mathcal{B}, \bar{b})$.

$(3n) \Rightarrow (2n)$: Sei $\varphi \in L_n^S$. Ist nicht Erf $\Sigma \cup \{\varphi\}$, so $\Sigma \models \varphi \leftrightarrow (\psi \wedge \neg\psi)$ für beliebiges $\psi \in \Psi_n$. Ist Erf $\Sigma \cup \{\varphi\}$, so

$$\Sigma \models \varphi \longleftrightarrow \bigvee_{\substack{\mathcal{A} \models \Sigma \\ \bar{a} \in A^n,\ \mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}]}} \bigwedge_{\substack{\psi \in \Psi_n \cup \neg\Psi_n \\ \mathcal{A} \models \psi[\bar{a}]}} \psi.$$

(Hieraus ergibt sich dann die Behauptung mit dem Endlichkeitslemma.) Ist nämlich $\mathcal{B} \models \Sigma$ und $\mathcal{B} \models \varphi[\bar{b}]$, so kommen $\mathcal{B}, \bar{b}$ in der Disjunktion auf der rechten Seite vor und die entsprechende Konjunktion wird von $\bar{b}$ in $\mathcal{B}$ erfüllt. Ist umgekehrt $\mathcal{B} \models \Sigma$ und erfüllt $\bar{b}$ die rechte Seite, so existieren $\mathcal{A} \models \Sigma$ und $\bar{a} \in A^n$ mit $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}]$ und $\bar{a} \sim_{\Psi_n} \bar{b}$. Nach (3n) somit $(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv (\mathcal{B}, \bar{b})$ und daher $\mathcal{B} \models \varphi[\bar{b}]$.

$\forall n(3n) \Rightarrow (1)$: Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ω-saturierte Modelle von Σ. Wegen $\forall n(3n)$ ist dann $I = I_{\equiv}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Wenn $I \neq \emptyset$, so gilt $I_{\equiv}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) : \mathcal{A} \cong_{\text{part}} \mathcal{B}$ nach Satz 9.4.

$(1) \Rightarrow \forall n(3n)$: Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ Modelle von Σ und $\bar{a} \in A^n$, $\bar{b} \in B^n$ mit $\bar{a} \sim_{\Psi_n} \bar{b}$. Wir wählen ω-saturierte $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$ mit $\mathcal{A} \preceq \mathcal{A}'$ und $\mathcal{B} \preceq \mathcal{B}'$. Dann ist $\bar{a} \mapsto \bar{b} \in I_{(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}}(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$. Wegen (1) gilt $I_{(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}}(\mathcal{A}', \mathcal{B}') : \mathcal{A} \cong_{\text{part}} \mathcal{B}$ und daher $(\mathcal{A}', \bar{a}) \equiv (\mathcal{B}', \bar{b})$ nach 3.4.3); damit $(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv (\mathcal{B}, \bar{b})$. □

11.1 Quantorenelimination

Wenn $c \in S$, so ist $c = c$ ein quantorenfreier Satz. Enthält S jedoch keine Konstantensymbole, so gibt es keine quantorenfreie Sätze. Dem Tragen wir im folgenden Rechnung, in dem wir vereinbaren, daß $r \geq 0$ sei, falls S Konstantensymbole enthält und $r \geq 1$ sei, falls S keine Konstantensymbole enthält.

Definition 11.3 $\Sigma \subseteq L_0^S$ *erlaubt Quantorenelimination* (oder Mod(Σ) *erlaubt Quantorenelimination*), wenn für alle r, alle $\varphi \in L_r^S$ ein quantorenfreies $\psi \in L_r^S$ existiert mit $\Sigma \models \varphi \leftrightarrow \psi$.

Bemerkungen 11.4 1) Erlaubt Σ Quantorenelimination, so ist Σ modellvollständig.

Beweis: Dies ergibt sich unmittelbar aus der Äquivalenz von 1. und 4. in 6.10. (Falls S keine Konstanten enthält und $\varphi \in L_0^S$, so wähle man zu $(\varphi \wedge v_0 = v_0)$ eine in Σ äquivalente quantorenfreie Formel ψ in L_1^S. Dann ist φ in Σ zum universellen Satz $\forall v_0 \psi$ äquivalent). $\square$

2) Ist $\Sigma \subseteq \Sigma' \subseteq L_0^S$ und erlaubt Σ Quantorenelimination, so auch Σ'. Und Σ erlaubt Quantorenelimination gdw die durch Σ bestimmte Theorie, nämlich $\mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(\Sigma))$, erlaubt Quantorenelimination.

3) Erlaubt $\Sigma \subseteq L_0^S$ Quantorenelimination, ist $S \subseteq S'$ und enthält $S' \setminus S$ nur Konstantensymbole, so erlaubt Σ Quantorenelimination in $L^{S'}$.

Beweis: Ist $\varphi = \varphi(c_1, \ldots, c_s, z_1, \ldots, z_k) \in L^{S'}$ und sind $c_1, \ldots, c_s$ die neuen Konstanten in φ, so gibt es nach Voraussetzung ein quantorenfreies $\psi(\bar{y}, \bar{z}) \in L^S$ mit $\Sigma \models \varphi(\bar{y}, \bar{z}) \leftrightarrow \psi(\bar{y}, \bar{z})$. Dann $\Sigma \models \varphi(\bar{c}, \bar{z}) \leftrightarrow \psi(\bar{c}, \bar{z})$. Ein Sonderargument erfordert der Fall "$S' \setminus S \neq \emptyset$ und S enthält keine Konstante und $\varphi \in L_0^S$". Dann wählen wir ein quantorenfreies $\psi(v_0) \in L_1^S$ mit $\Sigma \models \varphi \leftrightarrow \psi(v_0)$; somit $\Sigma \models \varphi \leftrightarrow \psi(c)$ für beliebiges $c \in S'$. $\square$

4) Wir setzen Q_r $(= Q_r^S) := \{\psi \in L_r^S \mid \psi \text{ quantorenfrei}\}$ und At_r $(= \mathrm{At}_r^S) := \{\psi \in L_r^S \mid \psi \text{ atomar}\}$. Wegen $<\mathrm{At}_r> = Q_r$ sind für $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\bar{a} \in A^r$ un $\bar{b} \in B^r$ äquivalent:

(i) $\bar{a} \sim_{\mathrm{At}_r} \bar{b}$;

(ii) $\bar{a} \sim_{Q_r} \bar{b}$;

(iii) Es gibt π mit $\pi : [\bar{a}]^{\mathcal{A}} \cong [\bar{b}]^{\mathcal{B}}$ und $\pi(\bar{a}) = \bar{b}$.

Beweis: Die Äquivalenz von (i) und (ii) ist klar.

Zu (iii) $\Rightarrow$ (i): Sei π wie in (iii). Für $\varphi \in \mathrm{At}_r$ gilt dann

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}] &\iff [\bar{a}]^{\mathcal{A}} \models \varphi[\bar{a}] \\ &\iff [\bar{b}]^{\mathcal{A}} \models \varphi[\pi(\bar{a})] \\ &\iff \mathcal{B} \models \varphi[\bar{b}]. \end{aligned}$$

Zu (i) $\Rightarrow$ (iii): Gelte (i). Wir definieren π durch

$$\text{für } t \in T_r^S\text{:} \quad \pi(t^{\mathcal{A}}[\bar{a}]) = t^{\mathcal{B}}[\bar{b}].$$

π ist wohldefiniert und bijektiv, denn für $t_1, t_2 \in T_r^S$ gilt:

$$\begin{aligned} t_1^{\mathcal{A}}[\bar{a}] = t_2^{\mathcal{A}}[\bar{a}] &\iff \mathcal{A} \models t_1 = t_2[\bar{a}] \\ &\iff \mathcal{B} \models t_1 = t_2[\bar{b}] \quad \text{(wegen (i))} \\ &\iff t_1^{\mathcal{B}}[\bar{b}] = t_2^{\mathcal{B}}[\bar{b}]. \end{aligned}$$

Wegen 4.3.7 ist daher π eine Bijektion von $[\bar{a}]^{\mathcal{A}}$ auf $[\bar{b}]^{\mathcal{B}}$. Ähnlich weist man nach, dass π die Symbole in S erhält. □

Satz 11.5 (Hauptsatz über Quantorenelimination) *Für $\Sigma \subseteq L_0^S$ sind äquivalent:*

1. *Σ elaubt Quantorenelimination.*

2. *Für ω-saturierte Modelle $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ von Σ gilt $I_e(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \emptyset$ oder $I_e(\mathcal{A}, \mathcal{B}) : \mathcal{A} \cong_{\text{part}} \mathcal{B}$, wobei*

   $I_e(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := \{p \in \text{Part}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \mid \text{df}(p)$ *endlich erzeugte Substruktur von* $\mathcal{A}\}$.

3. *Für Modelle $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ von Σ, für alle r, alle $\bar{a} \in B_1^r$, $\bar{b} \in B_2^r$:*

   wenn $\bar{a} \sim_{\text{At}_r} \bar{b}$, so $(\mathcal{B}_1, \bar{a}) \equiv (\mathcal{B}_2, \bar{b})$.

4. *Für Modelle $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ von Σ und für jede S-Struktur $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}_1$ und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}_2$ gilt $(\mathcal{B}_1, (a)_{a \in A}) \equiv (\mathcal{B}_2, (a)_{a \in A})$.*

5. *Σ ist* substrukturvollständig, *d.h. für jedes Modell $\mathcal{B}$ von Σ und jedes $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, ist $\Sigma \cup D_a(\mathcal{A})$ vollständig.*

Beweis: Die Äquivalenz von 1., 2., und 3. erhalten wir aus dem Hauptsatz über Ausdrucksstärke. Hierzu setzen wir $\Psi_r := \text{At}_r$ und, falls S keine Konstantensymbole enthält, sei $\Psi_0 := L_0^S$. Dann entspricht 1. der Aussage $\forall n(2n)$ im Hauptsatz über Ausdrucksstärke, 3. der Aussage $\forall n(3n)$ und 2. der Aussage (1); nur diese letzte Behauptung ist nicht unmittelbar klar: Hierzu bemerken wir, daß für ω-saturierte $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\bar{a} \in A^r$ und $\bar{b} \in B^r$ wegen Teil 4) der vorangehenden Bemerkung:

$$\begin{aligned} \bar{a} \mapsto \bar{b} \in I_{(\Psi_n)_{n \in \mathbb{N}}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \quad &\text{gdw} \quad \text{es gibt } \pi \text{ mit } \pi : [\bar{a}]^{\mathcal{A}} \cong [\bar{b}]^{\mathcal{B}} \text{ und } \pi(\bar{a}) = \bar{b} \\ &\text{gdw} \quad \text{es gibt } \pi \text{ mit } \pi \in I_e(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \text{ und } \pi(\bar{a}) = \bar{b}, \end{aligned}$$

und daher

$$I_{(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}}(\mathcal{A},\mathcal{B}) : \mathcal{A} \cong_{\text{part}} \mathcal{B} \quad \text{gdw} \quad I_e(\mathcal{A},\mathcal{B}) : \mathcal{A} \cong_{\text{part}} \mathcal{B}.$$

und

$$I_{(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}}(\mathcal{A},\mathcal{B}) \neq \emptyset \quad \text{gdw} \quad I_e(\mathcal{A},\mathcal{B}) \neq \emptyset.$$

Bei der letzten Äquivalenz müssen wir, falls S keine Konstantensymbole enthält, bei der Richtung "$\Rightarrow$" den Fall besonders beachten, bei dem $\emptyset \in I_{(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ uns die Information $I_{(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}}(\mathcal{A},\mathcal{B}) \neq \emptyset$ liefert. Da dann $\Psi_0 := L_0^S$, besagt $\emptyset \in I_{(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$, daß $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. Da $\mathcal{B}$ ω-saturiert ist, gibt es dann zu jedem $a \in A$ ein $b \in B$ mit $(\mathcal{A},a) \equiv (\mathcal{B},b)$. Insbesondere gilt $[a]^{\mathcal{A}} \cong [b]^{\mathcal{B}}$ und somit ist $I_e(\mathcal{A},\mathcal{B}) \neq \emptyset$.

Die Äquivalenz von 4. und 5. ist klar, da die Modelle von $D_a(\mathcal{A})$ die algebraischen Erweiterungen von $\mathcal{A}$ sind.

3. $\Rightarrow$ 4.: Sind $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2 \models \Sigma$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}_1$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}_2$ und $\bar{a} \in A$, so gilt $\bar{a}\,(\text{in } \mathcal{B}_1) \sim_{\text{At}_r} \bar{a}\,(\text{in } \mathcal{B}_2)$ und nach 3. somit $(\mathcal{B}_1,\bar{a}) \equiv (\mathcal{B}_2,\bar{a})$. $\bar{a} \in A$ war beliebig, daher $(\mathcal{B}_1,(a)_{a\in A}) \equiv (\mathcal{B}_2,(a)_{a\in A})$.

5. $\Rightarrow$ 3.: Seien $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2 \models \Sigma$, $\bar{a} \in B_1^r$, $\bar{b} \in B_2^r$ und $\bar{a} \sim_{\text{At}_r} \bar{b}$. Nach Teil 4) von11.4 gibt es ein π mit $\pi : [\bar{a}]^{\mathcal{B}_1} \cong [\bar{b}]^{\mathcal{B}_2}$ und $\pi(\bar{a}) = \bar{b}$. Wir setzen $\mathcal{A} := [\bar{a}]^{\mathcal{B}_1}$. Dann $(\mathcal{B}_2,(\pi(a))_{a\in A} \models \Sigma \cup D_a(\mathcal{A})$; nach 5. $(\mathcal{B}_1,(a)_{a\in A}) \equiv (\mathcal{B}_2,(\pi(a))_{a\in A})$, insbesondere $(\mathcal{B}_1,\bar{a}) \equiv (\mathcal{B}_2,\bar{b})$ □

Die Bedingung 2. ist für Σ_{DO}, dem Axiomensystem für dichte Ordnung und für Σ_{AAK} erfüllt (vgl. 3.4 und 9.5). Daher:

Folgerung 11.6 *Die Theorie der dichten Ordnungen erlaubt Quantorenelimination.*

Folgerung 11.7 Σ_{AAK}*, und damit* Σ_{AAK_0} *und* Σ_{AAK_q}*, erlauben Quantorenelimination.*

Folgerung 11.8 *Die Theorie der algebraisch abgeschlossenen Körper ist entscheidbar.*

Beweis: Wir setzen $\Psi_0 := \{\chi_q \mid q \text{ Primzahl}\}$. Für $n = 0$ erfüllt Σ_{AAK} die Bedingung (3n) im Hauptsatz über Ausdrucksstärke: Sind nämlich $\mathcal{A},\mathcal{B} \models \Sigma$

und ist $\emptyset \sim_{\Psi_0} \emptyset$, so $\mathrm{char}(\mathcal{A}) = \mathrm{char}\mathcal{B})$ und damit $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. Da $(3n) \Leftrightarrow (2n)$, gilt für beliebiges $\varphi \in L_0^S$

$$(+) \qquad \Sigma_{\mathrm{AAK}} \models \varphi \leftrightarrow \bigvee_{i=1}^{n} (\psi_{i1} \wedge \ldots \wedge \psi_{ik})$$

für geeignete n, k und geeignete $\psi_{ij} \in \Psi_0 \cup \neg\Psi_0$. Um zu entscheiden, ob $\Sigma_{\mathrm{AAK}} \models \varphi$, liste man $\{\psi \in L_0^S \mid \Sigma_{\mathrm{AAK}} \models \psi\}$ auf bis eine Äquivalenz der Gestalt (+) erscheint und prüfe, ob die rechte Seite der Äquivalenz in jedem (algebraisch abgeschlossenen) Körper gilt; dies ist ein leichtes zahlentheoretisches Problem. □

Σ_{dkO}, das Axiomensystem für diskrete Ordnungen, erlaubt nicht Quantorenelimination: So ist etwa $(\mathcal{Z}, 0, 1) \not\equiv (\mathcal{Z}, 0, 2)$, obwohl $[0,1]^{\mathcal{Z}} \cong [0,2]^{\mathcal{Z}}$.Wir wissen, daß $I : \mathcal{A} \cong_{\mathrm{part}} \mathcal{B}$ für ω-saturierte Modelle $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ von Σ_{dkO} und

$$I := \{p \in \mathrm{Part}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \mid \mathrm{df}(p) \text{ endlich}, \forall a, a' \in \mathrm{df}(p) : \ d(a, a') = d(p(a), p(a'))\}.$$

Es ist nicht schwierig, $\Psi_0, \Psi_1, \ldots$ so zu definieren, daß $I = I_{(\Psi_n)}$, etwa

$$\begin{array}{lll}
\Psi_0 & := & \{\exists x x = x\} \\
\Psi_1 & := & \{x = x\} \\
\Psi_2 & := & \{x = y,\, x < y,\, y < x\} \cup \\
 & & \{\exists z_1 \ldots \exists z_n (x < z_1 < \ldots < z_n < y \vee y < z_1 < \ldots < z_n < x \mid n \geq 1\} \\
\ldots & \ldots &
\end{array}$$

Nach dem Hauptsatz über Ausdrucksstärke ist somit in Σ_{dkO} jeder Ausdruck, etwa aus L_2^S, zu einem Ausdruck in $<\Psi_2>$ äquivalent.

Wir schließen mit zwei Anwendungen der Quantorenelimination für Σ_{AAK}.

Satz 11.9 (Hilbertscher Nullstellensatz) *Sei $\mathcal{A}$ ein Körper, $p_1, \ldots, p_r, q_1, \ldots, q_s \in \mathcal{A}[x_1, \ldots, x_k]$ Polynome. Wenn es einen Erweiterungskörper von $\mathcal{A}$ gibt, in dem das System $(*)$*

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc}
p_1(x_1, \ldots, x_k) = 0 & & q_1(x_1, \ldots, x_k) \neq 0 \\
 & \vdots & \\
 & & q_s(x_1, \ldots, x_k) \neq 0 \\
p_r(x_1, \ldots, x_k) = 0 & &
\end{array}$$

eine Lösung hat, so hat $(*)$ in jedem algebraisch abgeschlossenen Erweiterungskörper von $\mathcal{A}$ eine Lösung.

Beweis: Sei $\mathcal{B}$ ein Körper, $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}$, in dem $(*)$ lösbar ist, und sei $\mathcal{C}$, $\mathcal{C} \supseteq \mathcal{A}$, ein algebraisch abgeschlossener Erweiterungskörper von $\mathcal{A}$; zu zeigen ist: $(*)$ ist lösbar in $\mathcal{C}$.

Wir wählen einen algebraisch abgeschlossenen Erweiterungskörper $\mathcal{D}$ von $\mathcal{B}$. Dann ist $(*)$ auch in $\mathcal{D}$ lösbar. Weiterhin

$$\mathcal{C}, \mathcal{D} \models \Sigma_{\mathrm{AAK}}, \quad \mathcal{A} \subseteq \mathcal{C} \text{ und } \mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}.$$

Nach dem Hauptsatz über Quantorenelimination gilt $(\mathcal{C}, (a)_{a\in A}) \equiv (\mathcal{D}, (a)_{a\in A})$. Mit $(\mathcal{D}, (a)_{a\in A})$ ist daher auch $(\mathcal{C}, (a)_{a\in A})$ ein Modell von $\exists x_1 \ldots \exists x_k(p_1 = 0 \wedge \ldots \wedge p_s = 0 \wedge \neg q_1 = 0 \wedge \ldots \wedge \neg q_s = 0)$. □

Aus dem Hilbertschen Nullstellensatz erhalten wir zusammen mit 6.11 unmittelbar:

Folgerung 11.10 *Ist $\mathcal{A}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, $\bar{a} \in A^n$ un $\varphi \in L_n^S$ existentiell und gibt es einen Erweiterungskörper $\mathcal{B}$ von $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{B} \models \varphi[\bar{a}]$, so $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}]$.*

Ist $\mathcal{A}$ ein Körper und $m \geq 1$, so ist $F \subseteq A^m$ eine *m-dimensionale algebraische Fläche*, wenn es endlich viele Polynome $p_1, \ldots, p_s \in \mathcal{A}[x_1, \ldots, x_m]$ gibt mit

$$F \quad := \quad \{(a_1, \ldots, a_m) \mid p_1(\bar{a}) = \ldots = p_s(\bar{a}) = 0\}.$$

Für jedes $k = 1, \ldots, m$ ist dann

$$G \quad := \quad \{(a_1, \ldots, a_k) \mid \exists a_{k+1} \ldots \exists a_m (a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_m) \in F\}$$

die *Projektion einer algebraischen Fläche.*

Satz 11.11 *Ist $\mathcal{A}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und $G \subseteq A^k$ Projektion einer algebraischen Fläche, so ist G endliche Vereinigung von endlichen Durchschnitten von k-dimensionalen algebraischen Flächen und Komplementen von k-dimensionalen algebraischen Flächen.*

Beweis: Nach Voraussetzung gilt für geeignete $m \geq k$, $p_1, \ldots, p_s \in \mathcal{A}[x_1, \ldots, x_m]$ und alle $\bar{a} \in A^k$

$$\bar{a} \in G \quad \text{gdw} \quad (\mathcal{A}, (a)_{a\in A}) \models \exists v_{k+1} \ldots \exists v_m (p_1 = 0 \wedge \ldots \wedge p_s = 0)[\bar{a}].$$

Da Σ_{AAK} auch Quantorenelimination in $L^{S_K \cup \{c_a | a \in A\}}$ erlaubt (vgl. Teil 3) von 11.4), gibt es $\psi(v_1, \ldots, v_k) \in <\mathrm{At}^{S_K \cup \{c_a | a \in A\}}>$ mit

$$\bar{a} \in G \quad \text{gdw} \quad (\mathcal{A}, (a)_{a \in A}) \models \psi[\bar{a}].$$

Jedes $\chi(v_1, \ldots, v_k) \in \mathrm{At}^{S_K \cup \{c_a | a \in A\}}$ ist äquivalent zu einem Ausdruck der Gestalt $t(v_1, \ldots, v_k, c_{b_1}, \ldots, c_{b_r}) = 0$; die Erfüllungsmenge in $(\mathcal{A}, (a)_{a \in A})$ von $t = 0$ entspricht somit den Nullstellen eines Polynoms in $\mathcal{A}[x_1, \ldots, x_k]$. $\square$

11.2 Anhang: Reell abgeschlossene Körper

Im folgenden seien die S_K-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Körper.

$\mathcal{A}$ ist *formal reell*, wenn $\mathcal{A}$ eine Expansion besitzt, die ein geordneter Körper ist (wenn also $<^A$ existiert mit: $(\mathcal{A}, <^A)$ ist geordneter Körper). Aus der Algebra wissen wir, daß $\mathcal{A}$ formal reell ist gdw $\mathcal{A} \models \{\forall x_1 \ldots \forall x_n \neg x_1^2 + \ldots + x_n^2 = -1 \mid n \geq 1\}$.

Die Modelle von Σ_{RAK} sind die *reell abgeschlossenen* Körper, wobei

$$\begin{aligned} \Sigma_{\mathrm{RAK}} \; := \; & \Sigma_K \cup \{\forall x_1 \ldots \forall x_n \neg x_1^2 + \ldots + x_n^2 = -1 \mid n \geq 1\} \\ \cup \; & \{\forall y_0 \ldots \forall y_{n-1} \exists x x^n + y_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + y_1 \cdot x + y_0 = 0 \mid n \text{ ungerade}\}. \end{aligned}$$

- $(\mathbb{R}, \ldots)$ ist reell abgeschlossen; $(\mathbb{Q}, \ldots)$ ist formal reell aber nicht reell abgeschlossen; $(\mathbb{C}, \ldots)$ ist nicht formal reell.
- Ist $\mathcal{A}$ reell abgeschlossen, so gibt es genau ein $<^A$, so daß $(\mathcal{A}, <^A)$ ein geordneter Körper ist.

Bezeichnen wir mit Σ_{GRAK} ein Axiomensystem in $L^{S_K \cup \{<\}}$ für geordnete reell abgeschlossene Körper, so definert Σ_{GRAK} nach der letzten Bemerkung $<$ implizit; nach dem Satz von Beth gibt es daher eine explizite Definition; in der Tat gilt

$$\Sigma_{\mathrm{GRAK}} \models \forall x \forall y (x < y \leftrightarrow \exists z (\neg z = 0 \wedge y - x = z^2)).$$

Für reell abgeschlossenes $\mathcal{A}$ (bzw. $\mathcal{B}$) bezeichnen wir mit $<^A$ (bzw. $<^B$) die Ordnung, für die $(\mathcal{A}, <^A)$ ein geordneter Körper ist, also

$$a <^A b \quad \text{gdw} \quad \text{es gibt } c \in A (c \neq 0, \, b - a = c^2).$$

Es gilt dann

- Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ reell abgeschlossen und ω-saturiert, so gilt $I : \mathcal{A} \cong_{\text{part}} \mathcal{B}$ für

  $$I := \{p \in \text{Part}((\mathcal{A}, <^A), (\mathcal{B}, <^B)) \mid \text{df}(p) \text{ endl. erz. Substruktur von } (\mathcal{A}, <^A)\}.$$

  Somit ist Σ_{RAK} vollständig und Σ_{GRAK} erlaubt Quantorenelimination.

Ist V ein Vektorraum über $\mathcal{A}$ und $\circ : V \times V \to V$, so ist $(V, \circ)$ eine *Divisionsalgebra* über $\mathcal{A}$, wenn

$$\begin{array}{l}
(V, \circ) \models \forall u \forall v \forall w \, u \circ (v + w) = u \circ v + u \circ w) \\
(V, \circ) \models \forall u \forall v \forall w \, (v + w) \circ u = v \circ u + w \circ u) \\
(V, \circ) \models \forall u \forall v (\neg u = 0 \to \exists w \, w \circ v = u) \\
(V, \circ) \models \forall u \forall v (\neg u = 0 \to \exists w \, w \circ v = u) \\
\forall u \in V \forall v \in V \forall \lambda \in A \; \lambda \cdot (u \circ v) = (\lambda \cdot u) \circ v = u \circ (\lambda \cdot v).
\end{array}$$

Nun gilt der

Satz 11.12 (Satz von Milnor und Bott) *Genau für $n = 1, 2, 4, 8$ gibt es eine Divisionsalgebra über dem Körper der reellen Zahlen der Dimension n.*

Hieraus ergibt sich der

Satz 11.13 (Satz von Tarski) *Ist $\mathcal{A}$ ein reell abgeschlossener Körper, so gibt es genau für $n = 1, 2, 4, 8$ eine Divisionsalgebra über $\mathcal{A}$ der Dimension n.*

Beweis: Für $n \geq 1$ gibt es einen Satz φ_n, so daß für jeden Körper $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{B} \models \varphi_n \quad \text{gdw} \quad \text{es gibt eine Divisionsalgebra der Dimension } n \text{ über } \mathcal{B}.$$

Da Σ_{RAK} vollständig ist, gilt

$$\mathcal{A} \models \varphi_n \quad \text{gdw} \quad (\mathbb{R}, \dots) \models \varphi_n.$$

Aus dem Satz von Milnor und Bott folgt damit unsere Behauptung. $\square$

12 Existentiell abgeschlossene Strukturen

Wie üblich seien Klassen von Strukturen stets gegen Isomorphie abgeschlossen.

Ist $\psi \in L^S_{n+m}$, $\psi = \psi(\bar{x}, \bar{y})$, $\mathcal{A}$ eine S-Struktur, $\bar{a} \in A^n$, so schreiben wir für $\mathcal{A} \models \exists \bar{y}\psi[\bar{a}]$ auch häufig $\mathcal{A} \models \exists \bar{y}\psi(\bar{a}, \bar{y})$.

Definition 12.1 Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von S-Strukturen und $\mathcal{A}$ eine S-Struktur.

$\mathcal{A}$ ist *existentiell abgeschlossen in* $\mathcal{K}$, wenn $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$ und für $n, m \geq 0$, quantorenfreies $\psi \in L^S_{n+m}$, $\bar{a} \in A^n$ und $\mathcal{B} \in \mathcal{K}$ mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$

$$\text{wenn } \mathcal{B} \models \exists \bar{y}\psi(\bar{a}, \bar{y}), \text{ so } \mathcal{A} \models \exists \bar{y}\psi(\bar{a}, \bar{y}).$$

Mit $\mathcal{E}_\mathcal{K}$ bezeichnen wir die Klasse der existentiell abgeschlossenen Strukturen in $\mathcal{K}$. Wenn $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$, so sind die Strukturen in $\mathcal{E}_\Sigma := \mathcal{E}_{\mathrm{Mod}(\Sigma)}$ die *existentiell abgeschlossenen Modelle* von Σ.

Bemerkungen und Beispiele 12.2 1) $\mathcal{E}_\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$.

2) Wenn $\mathcal{A} \in \mathcal{E}_\mathcal{K}$, $\pi : \mathcal{A} \xrightarrow{a} \mathcal{B} \in \mathcal{K}$, $\psi(\bar{x}, \bar{y})$ quantorenfrei, $\bar{a} \in A$ und $\mathcal{B} \models \exists \bar{y}\psi(\pi(\bar{a}), \bar{y})$, so $\mathcal{A} \models \exists \bar{y}\psi(\bar{a}, \bar{y})$.

3) Ist $\mathcal{K}$ die Klasse der Körper, so ist $\mathcal{E}_\mathcal{K}$ die Klasse der algebraisch abgeschlossenen Körper. (Vgl.11.10.)

4) Ist $\mathcal{K}$ die Klasse der Ringe, so $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \notin \mathcal{E}_\mathcal{K}$. (Da etwa für $a := (2, 0)$ einerseits $\mathbb{R} \times \mathbb{Z} \models \exists y\, y^2 - a = 0$ andererseits $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \not\models \exists y\, y^2 - a = 0$.)

5) Es gibt keine existentiell abgeschlossene diskrete Ornung: $\mathcal{E}_\mathcal{K} = \emptyset$ für $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma_{\mathrm{dkO}})$.

Beweis: Sei $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$. Wir wählen $a, a' \in A$ mit $a < a'$, $d(a, a') = 1$. Sei $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$ eine Ordnung mit $B := A\dot{\cup}\{b\}$ und $a < b < a'$. Dann $\mathcal{B} \models \exists y\, a < y < a'$, aber $\mathcal{A} \not\models \exists y\, a < y < a'$. Somit $\mathcal{A} \notin \mathcal{E}_\mathcal{K}$. □

6) Für $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$ gilt

$$\mathcal{E}_\mathcal{K} = \mathcal{K} \quad \text{gdw} \quad \Sigma \text{ ist modellvollständig.}$$

Beweis: Dies ergibt sich unmittelbar aus der Äquvalenz von 1. und 2. in Satz 6.10, dem Robinsonschen Modellvollständigkeitstest. □

7) Ist $\mathcal{A} \in \mathcal{E}_\mathcal{K}$, so gilt jeder $\forall\exists$-Satz, der in einer Erweiterung $\mathcal{B} \in \mathcal{K}$ von $\mathcal{A}$ gilt, bereits in $\mathcal{A}$.

Beweis: Sei $\varphi := \forall\bar{x}\exists\bar{y}\psi(\bar{x},\bar{y})$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \models \varphi$ und $\bar{a} \in A$. Zu zeigen ist $\mathcal{A} \models \exists\bar{y}\psi(\bar{a},\bar{y})$: Wegen $\mathcal{B} \models \varphi$, gilt $\mathcal{B} \models \exists\bar{y}\psi(\bar{a},\bar{y})$, so daß sich $\mathcal{A} \models \exists\bar{y}\psi(\bar{a},\bar{y})$ aus $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ und $\mathcal{A} \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}$ ergibt. $\square$

Für eine Klasse $\mathcal{K}$ sei

$$\mathrm{Sub}(\mathcal{K}) \quad := \quad \{\mathcal{A} \mid \text{es gibt } \mathcal{B} \in \mathcal{K} \text{ mit } \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}\}.$$

die Klasse der Substrukturen der Strukturen in $\mathcal{K}$.

8) Wenn $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathrm{Sub}(\mathcal{K}_2)$ so $\mathcal{E}_{\mathcal{K}_2} \cap \mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{E}_{\mathcal{K}_1}$.

Beweis: Sei nämlich $\mathcal{A} \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}_2} \cap \mathcal{K}_1$, $\mathcal{B} \in \mathcal{K}_1$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ und $\mathcal{B} \models \exists\bar{y}\psi(\bar{a},\bar{y})$ mit quantorenfreiem ψ und $\bar{a} \in A$. Nach Voraussetzung gibt es ein $\mathcal{C} \in \mathcal{K}_2$ mit $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$. Dann $\mathcal{C} \models \exists\bar{y}\psi(\bar{a},\bar{y})$ und da $\mathcal{A} \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}_2}$ somit $\mathcal{A} \models \exists\bar{y}\psi(\bar{a},\bar{y})$. $\square$

Für $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$ ist $\mathrm{Sub}(\mathcal{K}) = \mathrm{Mod}(\Sigma_\forall)$ nach 4.12. Somit ergibt sich die zweite Formulierung im folgenden Punkt unmittelbar aus der ersten.

9) Sei $\mathcal{K}_1 = \mathrm{Mod}(\Sigma)$ und Σ eine Menge von $\forall\exists$-Sätzen.

$$\text{Wenn } \mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K} \subseteq \mathrm{Sub}(\mathcal{K}_1), \text{ so } \mathcal{E}_{\mathcal{K}_1} = \mathcal{E}_{\mathcal{K}};$$

somit

$$\text{Wenn } \mathrm{Mod}(\Sigma) \subseteq \mathcal{K} \subseteq \mathrm{Mod}(\Sigma_\forall), \text{ so } \mathcal{E}_\Sigma = \mathcal{E}_{\mathcal{K}} = \mathcal{E}_{\Sigma_\forall}.$$

Beweis: Gelte $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K} \subseteq \mathrm{Sub}(\mathcal{K}_1)$. Wegen $\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Sub}(\mathcal{K}_1)$ und 8) ist dann $\mathcal{E}_{\mathcal{K}_1} \cap \mathcal{K} \subseteq \mathcal{E}_{\mathcal{K}}$; wegen $\mathcal{E}_{\mathcal{K}_1} \subseteq \mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}$ daher $\mathcal{E}_{\mathcal{K}_1} \subseteq \mathcal{E}_{\mathcal{K}}$.

Um $\mathcal{E}_{\mathcal{K}} \subseteq \mathcal{E}_{\mathcal{K}_1}$ nachzuweisen, genügt der Nachweis von $\mathcal{E}_{\mathcal{K}} \subseteq \mathcal{K}_1$: Dann ist wegen $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}$ und $\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Sub}(\mathcal{K})$ auch $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathrm{Sub}(\mathcal{K})$, nach 8) daher $\mathcal{E}_{\mathcal{K}} \cap \mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{E}_{\mathcal{K}_1}$ und somit $\mathcal{E}_{\mathcal{K}} \subseteq \mathcal{E}_{\mathcal{K}_1}$. Sei also $\mathcal{A} \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}$; somit $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$ und nach der Voraussetzung $\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Sub}(\mathcal{K}_1)$ gibt es $\mathcal{B} \in \mathcal{K}_1\,(\subseteq \mathcal{K})$ mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Da $\mathcal{B} \models \Sigma$ und Σ eine Menge von $\forall\exists$-Sätzen ist, gilt $\mathcal{A} \models \Sigma$ nach 7); somit $\mathcal{A} \in \mathcal{K}_1$. $\square$

10) Als Anwendungen von 9) erhalten wir die folgenden Ergebnisse; man beachte dabei, daß $\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Sub}(\mathcal{K}_1)$ äquivalent ist zu "zu jedem $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$ gibt es ein $\mathcal{B} \in \mathcal{K}_1$ mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$". Die Klassen in der mittleren Spalte erlauben Quantorenelimination, sind somit modellvollständig; die dritte Spalte ergibt sich dann aus 5).

$\mathcal{K}$	$\mathcal{K}_1$	$\mathcal{E}_{\mathcal{K}_1} (= \mathcal{E}_{\mathcal{K}})$
Körper	algebr. abg. Körper	algebr. abg. Körper
Integritätsbereiche	algebr. abg. Körper	algebr. abg. Körper
Ordnungen	dichte Ordnungen	dichte Ordnungen
torsfr. ab. Gruppen	div. torsfr. ab. Gruppen	div. torsfr. ab. Gruppen

Wir wenden uns der Frage nach der Existenz existentiell abgeschlossener Strukturen zu.

Lemma 12.3 *Sei $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ ein gerichtetes System von Strukturen in $\mathcal{E}_{\mathcal{K}}$. Wenn $\bigcup_I \mathcal{A}_i \in \mathcal{K}$, so $\bigcup_I \mathcal{A}_i \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}$.*

Beweis: Wir setzen $\mathcal{A} := \bigcup_I \mathcal{A}_i$; es gelte $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$. Wir zeigen $\mathcal{A} \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}$: Gelte für $\mathcal{B} \in \mathcal{K}$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \models \exists \bar{y}\psi(\bar{a}, \bar{y})$. Wir wählen $i \in I$ mit $\bar{a} \in A_i$. Wegen $\mathcal{A}_i \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}$, gilt $\mathcal{A}_i \models \exists \bar{y}\psi(\bar{a}, \bar{y})$; wegen $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{A}$ somit $\mathcal{A} \models \exists \bar{y}\psi(\bar{a}, \bar{y})$. □

Satz 12.4 *1. Ist $\mathcal{K}$ gegen Vereinigungen von wohlgeordneten Ketten abgeschlossen, so hat jede Struktur in $\mathcal{K}$ eine in $\mathcal{K}$ existentiell abgeschlossene Erweiterung.*

2. Sei $\Sigma \subseteq L_0^S$ eine Menge von $\forall\exists$-Sätzen und S höchstens abzählbar. Dann hat jedes höchstens abzählbare Modell von Σ eine höchstens abzählbare Erweiterung, die existentiell abgeschlossenes Modell von Σ ist.

Beweis: Zu 1.: Sei $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$. Wir zeigen zunächst die Zwischenbehauptung:

> Es gibt $\mathcal{A}^* \in \mathcal{K}$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^*$, das "existentiell abgeschlossen bzgl. Parameter aus A" ist, d.h. wenn $\mathcal{B} \in \mathcal{K}$, $\mathcal{A}^* \subseteq \mathcal{B}$, $\psi(\bar{x}, \bar{y})$ quantorenfrei, $\bar{a} \in A$, und $\mathcal{B} \models \exists \bar{y}\psi(\bar{a}, \bar{y})$, so $\mathcal{A}^* \models \exists \bar{y}\psi(\bar{a}, \bar{y})$.

Hieraus ergibt sich die Behauptung: Wir setzen $\mathcal{A}_0 := \mathcal{A}$ und setzen $\mathcal{A}_{n+1} := (\mathcal{A}_n)^*$, wobei $(\mathcal{A}_n)^*$ zu $\mathcal{A}_n$ gemäß der Zwischenbehauptung gewählt sei. Wir setzen $\mathcal{A}_\infty := \bigcup_{\mathbb{N}} \mathcal{A}_n$. Dann ist $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_\infty$. Wir zeigen noch: $\mathcal{A}_\infty \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}$. Zunächst ist $\mathcal{A}_\infty \in \mathcal{K}$, da $\mathcal{K}$ nach Voraussetzung gegen Vereinigungen abgeschlossen ist. Ist $\mathcal{A}_\infty \subseteq \mathcal{B} \in \mathcal{K}$, $\bar{a} \in A_\infty$ und $\mathcal{B} \models \exists \bar{y}\psi(\bar{a}, \bar{y})$, so wählen wir n mit $\bar{a} \in A_n$. Nach Wahl von $\mathcal{A}_{n+1}$ gilt $\mathcal{A}_{n+1} \models \exists \bar{y}\psi(\bar{a}, \bar{y})$, und wegen $\mathcal{A}_{n+1} \subseteq \mathcal{A}_\infty$ auch $\mathcal{A}_\infty \models \exists \bar{y}\psi(\bar{a}, \bar{y})$.

Wir beweisen nun die Zwischenbehauptung: Zunächst wohlordnen wir die Menge $\{(\exists\bar{y}\psi(\bar{x},\bar{y}),\bar{a}) \mid \bar{a}\in A, \psi \text{ quantorenfrei}\}$, etwa

$$\{(\exists\bar{y}\psi(\bar{x},\bar{y}),\bar{a}) \mid \bar{a}\in A, \psi \text{ quantorenfrei}\} \quad := \quad \{\rho_\alpha \mid \alpha < \beta\}.$$

Hierbei sei β eine Limesordinalzahl. Wir definieren ein wohlgeordnetes System $(\mathcal{A}_\alpha)_{\alpha<\beta}$ von Strukturen. Und zwar definieren wir durch Induktion über α die Struktur $\mathcal{A}_\alpha$, so daß:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{A}_0 & := & \mathcal{A}; \\ \mathcal{A}_\alpha & := & \bigcup_{\gamma<\alpha}\mathcal{A}_\gamma, \quad \text{wenn } \alpha \text{ eine Limesordinalzahl ist;} \\ \multicolumn{3}{l}{\text{Ist } \rho_\alpha = (\exists\bar{y}\psi(\bar{x},\bar{y}),\bar{a}), \text{ so}} \\ \mathcal{A}_{\alpha+1} & := & \left\{ \begin{array}{ll} \text{ein } \mathcal{C}\in\mathcal{K} \text{ mit} & \\ (\mathcal{A}_\alpha \subseteq \mathcal{C} \text{ und } \mathcal{C}\models\exists\bar{y}\psi(\bar{a},\bar{y})), & \text{falls ein solches } \mathcal{C} \text{ existiert} \\ \mathcal{A}_\alpha & \text{sonst.} \end{array} \right. \end{array}$$

Da $\mathcal{K}$ gegen entsprechende Vereinigungen abgeschlossen ist, sind alle $\mathcal{A}_\alpha \in \mathcal{K}$ und $\mathcal{A}^* := \bigcup_{\alpha<\beta}\mathcal{A}_\alpha \in \mathcal{K}$. Weiterhin ist $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{A}^*$. Ist $\mathcal{B}\in\mathcal{K}$, $\mathcal{A}^*\subseteq\mathcal{B}$, $\psi(\bar{x},\bar{y})$ quantorenfrei, $\bar{a}\in A$, und $\mathcal{B}\models\exists\bar{y}\psi(\bar{a},\bar{y})$, so wählen wir α mit $\rho_\alpha = (\exists\bar{y}\psi,\bar{a})$. Nach Definition von $\mathcal{A}_{\alpha+1}$ gilt $\mathcal{A}_{\alpha+1}\models\exists\bar{y}\psi(\bar{a},\bar{y})$ und damit $\mathcal{A}^*\models\exists\bar{y}\psi(\bar{a},\bar{y})$. $\square$

Es ist leicht für $\Sigma := \{\exists^{\leq 1}xPx \vee \exists^{\leq 1}x\neg Px\}$ ein Modell $\mathcal{A}$ anzugeben, das existentiell abgeschlossene Erweiterungen $\mathcal{D}_1$ und $\mathcal{D}_2$ besitzt, zu denen $a,b\in A$ und quantorenfreie $\varphi(x,y),\psi(x,y)$ existieren mit

$$\mathcal{D}_1\models\exists y\varphi(a,y),\ \mathcal{D}_2\not\models\exists y\varphi(a,y),\ \mathcal{D}_1\not\models\exists y\psi(b,y),\ \mathcal{D}_2\models\exists y\psi(b,y).$$

Die Amalgamierungseigenschaft verhindert das verschiedene Verhalten von existentiell abgeschlossene Erweiterungen (vgl. 12.6).

Definition 12.5 $\mathcal{K}$ hat die *Amalgamierungseigenschaft* (AP), wenn zu allen $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}\in\mathcal{K}$ mit $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}$ und $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{C}$ eine Struktur $\mathcal{D}$ und Abbildungen π und ρ existieren mit

$$\pi:\mathcal{B}\overset{a}{\to}\mathcal{D},\ \rho:\mathcal{C}\overset{a}{\to}\mathcal{D} \text{ und } \forall a\in A:\pi(a)=\rho(a).$$

Σ hat die *Amalgamierungseigenschaft*, wenn $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ sie hat.

Satz 12.6 (Allgemeiner Hilbertscher Nullstellensatz) *$\mathcal{K}$ habe* (AP). *Sei $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$, $\bar{a} \in A$ und $\psi(\bar{x}, \bar{y})$ quantorenfrei.*

Wenn es ein $\mathcal{B} \in \mathcal{K}$ gibt mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ und $\mathcal{B} \models \exists \bar{y} \psi(\bar{a}, \bar{y})$, so gilt $\mathcal{C} \models \exists \bar{y} \psi(\bar{a}, \bar{y})$ für jedes $\mathcal{C} \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}$ mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$.

Insbesondere gilt für $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}$ mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}_1$ und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}_2$

$$\mathcal{C}_1 \models \exists \bar{y} \psi(\bar{a}, \bar{y}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{C}_2 \models \exists \bar{y} \psi(\bar{a}, \bar{y}).$$

Beweis: Sei also $\mathcal{B} \in \mathcal{K}$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \models \exists \bar{y} \psi(\bar{a}, \bar{y})$ und $\mathcal{C} \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}$ mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$. Wir zeigen $\mathcal{C} \models \exists \bar{y} \psi(\bar{a}, \bar{y})$. Nach Voraussetzung gibt es $\mathcal{D} \in \mathcal{K}$ und Abbildungen π und ρ mit $\pi : \mathcal{B} \overset{a}{\to} \mathcal{D}$, $\rho : \mathcal{C} \overset{a}{\to} \mathcal{D}$ und $\forall a \in A : \pi(a) = \rho(a)$. Somit $\mathcal{D} \models \exists \bar{y} \psi(\pi(\bar{a}), \bar{y})$, also $\mathcal{D} \models \exists \bar{y} \psi(\rho(\bar{a}), \bar{y})$. Da $\mathcal{C} \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}$, daher $\mathcal{C} \models \exists \bar{y} \psi(\bar{a}, \bar{y})$.

Bemerkungen und Beispiele 12.7 1) Hat $\Sigma_\forall$ die Amalgamierungseigenschaft, so auch Σ.

Beweis: Sind nämlich $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \models \Sigma$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$, so $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \models \Sigma_\forall$ und nach Voraussetzung gibt es somit ein $\mathcal{D} \models \Sigma_\forall$, $\pi : \mathcal{B} \overset{a}{\to} \mathcal{D}$ und $\rho : \mathcal{C} \overset{a}{\to} \mathcal{D}$ mit $\pi | A = \rho | A$. Da $\mathcal{D} \models \Sigma_\forall$, existiert $\mathcal{D}' \models \Sigma$ mit $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}'$. $\mathcal{D}', \pi$ und ρ leisten das Gewünschte. $\square$

2) Für Σ sind äquivalent:

(a) Σ erlaubt Quantorenelimination.

(b) Σ ist modellvollständig und $\Sigma_\forall$ hat (AP).

Beweis: $(b) \Rightarrow (a)$: Wir weisen Punkt 4. in 11.5 nach. Seien $\mathcal{B}, \mathcal{C} \models \Sigma$ und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$. Wir wählen $\mathcal{D} \models \Sigma_\forall$, $\pi : \mathcal{B} \overset{a}{\to} \mathcal{D}$ und $\rho : \mathcal{C} \overset{a}{\to} \mathcal{D}$ mit $\pi | A = \rho | A$. Wiederum sei $\mathcal{D}' \models \Sigma$ mit $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}'$. Da Σ modellvollständig ist, sind die algebraischen Einbettungen $\pi : \mathcal{B} \overset{a}{\to} \mathcal{D}'$ und $\rho : \mathcal{C} \overset{a}{\to} \mathcal{D}'$ elementar. Somit $(\mathcal{B}, (a)_{a \in A}) \equiv (\mathcal{D}', (\pi(a))_{a \in A}) = (\mathcal{D}', (\rho(a))_{a \in A}) \equiv (\mathcal{C}, (a)_{a \in A})$.

$(a) \Rightarrow (b)$: Σ erlaube Quantorenelimination. Dann ist Σ modellvollständig; und $\Sigma_\forall$ hat (AP): Sind nämlich $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \models \Sigma_\forall$, so existieren $\mathcal{B}', \mathcal{C}' \models \Sigma$ mit $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$ und $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}'$. Mit dem Hauptsatz über Quantorenelimination erhalten wir $(\mathcal{B}', (a)_{a \in A}) \equiv (\mathcal{C}', (a)_{a \in A})$. Nach 6.15 gibt es $\mathcal{D}$ mit $(\mathcal{B}', (a)_{a \in A}) \prec (\mathcal{D}, (a)_{a \in A})$ und $(\mathcal{C}', (a)_{a \in A}) \overset{e}{\to} (\mathcal{D}, (a)_{a \in A})$. $\square$

Unmittelbar aus 1) und 2) folgt:

3) Wenn Σ Quantorenelimination erlaubt, so hat Σ die Amalgamierungseigenschaft.

4) Die Klasse der kommutativen, nullteilerfreien Ringe mit $0 \neq 1$, die Klasse der Körper und die Klasse der algebraischen abgeschlossenen Körper haben (AP). (Da Σ_{AAK} Quantorenelimination erlaubt, ergeben sich die Ergebnisse aus 1) und 2).)

5) Für die Klasse $\mathcal{K}$ der Gruppen gilt $\mathcal{E}_{\mathcal{K}}$ ist nicht axiomatisierbar.

Beweis: Wir verwenden das gruppentheoretische Ergebnis:

- Sind a, b Elemente der Gruppe $\mathcal{G}$ derselben Ordnung, $\mathrm{ord}(a) = \mathrm{ord}(b)$, so gibt es eine Gruppe $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{H} \models \exists y\, y^{-1} \circ a \circ y = b$.

Hieraus ergibt sich
(+)
Wenn $\mathcal{G} \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}$, $a, b \in G$ und $\mathrm{ord}(a) = \mathrm{ord}(b)$, so $\mathcal{G} \models \exists y\, y^{-1} \circ a \circ y = b$.

Nehmen wir nun $\mathcal{E}_{\mathcal{K}} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$ an. Wegen (+)

$$\Sigma \cup \{\neg c^n = e \wedge \neg d^n = e \mid n \geq 1\} \models \exists y\, y^{-1} \circ c \circ y = d.$$

Mit dem Endlichkeitssatz finden wir ein n_0 mit $\Sigma \cup \{\neg c^n = e \wedge \neg d^n = e \mid 1 \leq n < n_0\} \models \exists y\, y^{-1} \circ c \circ y = d$. Sei nun $\mathcal{G}$ eine Gruppe und $a, b \in G$ mit $\mathrm{ord}(a) = n_0$ und $\mathrm{ord}(b) = n_0 + 1$ (etwa $G = \mathbb{Z}_{n_0} \times \mathbb{Z}_{n_0+1}$, $a = (1, 0)$, $b = (0, 1)$). Nach 12.4 gibt es $\mathcal{H} \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}$ mit $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$. Wegen (+) gilt dann $\mathcal{H} \models \exists y\, y^{-1} \circ a \circ y = b$, im Widerspruch zu $\mathrm{ord}(a) = \mathrm{ord}(b)$. $\square$

6) $\mathcal{E}_{(\mathcal{E}_{\mathcal{K}})} = \mathcal{E}_{\mathcal{K}}$.

Beweis: Stets gilt $\mathcal{E}_{\mathcal{K}'} \subseteq \mathcal{K}'$. Sei nun $\mathcal{A} \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}$ und $\mathcal{B} \models \exists y \psi(\bar{a}, \bar{y})$ mit $\mathcal{B} \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}\, (\subseteq \mathcal{K})$. Wegen $\mathcal{A} \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}$ gilt dann $\mathcal{A} \models \exists y \psi(\bar{a}, \bar{y})$.

Aus dem letzten Punkt zusammen mit Teil 6) von 12.2 ergibt sich unmittelbar:

Satz 12.8 *Wenn $\mathcal{E}_{\mathcal{K}}$ axiomatisierbar ist, so ist $\mathcal{E}_{\mathcal{K}}$ modellvollständig.*

Im folgenden verwenden wir häufig die Tatsache, daß $\mathrm{Mod}(\Sigma_\forall) = \mathrm{Mod}(\Sigma'_\forall)$ äquivalent ist zu

> zu jedem $\mathcal{A} \models \Sigma$ existiert ein $\mathcal{B} \models \Sigma'$ mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ und zu jedem $\mathcal{B} \models \Sigma'$ existiert ein $\mathcal{A} \models \Sigma$ mit $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.

Lemma 12.9 *Sei Σ eine Menge von $\forall\exists$-Sätzen, Σ^* modellvollständig und gelte* $\mathrm{Mod}(\Sigma_\forall) = \mathrm{Mod}(\Sigma^*_\forall)$. *Dann*

$$\mathrm{Mod}(\Sigma^*) \subseteq \mathrm{Mod}(\Sigma).$$

Beweis: Sei $\mathcal{A} \models \Sigma^*$. Mit der Voraussetzung $\mathrm{Mod}(\Sigma_\forall) = \mathrm{Mod}(\Sigma^*_\forall)$ wählen wir uns eine Folge von Strukturen $(\mathcal{A}_n)$ mit

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_1 \subseteq \ldots, \quad \mathcal{A}_{2\cdot n+1} \models \Sigma, \quad \mathcal{A}_{2\cdot n} \models \Sigma^*.$$

Dann ist $\bigcup \mathcal{A}_{2\cdot n+1} \models \Sigma$, da Σ eine Menge von $\forall\exists$-Sätzen ist und $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \prec \bigcup \mathcal{A}_{2\cdot n}$, weil Σ^* modellvollständig ist. Wegen $\bigcup \mathcal{A}_{2\cdot n+1} = \bigcup \mathcal{A}_{2\cdot n}$, daher $\mathcal{A} \models \Sigma$. □

Definition 12.10 Σ^* ist ein *Modellbegleiter* von Σ, wenn $\mathrm{Mod}(\Sigma_\forall) = \mathrm{Mod}(\Sigma^*_\forall)$ und Σ^* ist modellvollständig.

Unmittelbar aus dem vorangehenden Lemma ergibt sich die Eindeutigkeit des Modellbegleiters:

Bemerkung 12.11 *Sind Σ_1 und Σ_2Modellbegleiter von Σ und ist Σ eine Menge von $\forall\exists$-Sätzen, so*

$$\mathrm{Mod}(\Sigma_1) = \mathrm{Mod}(\Sigma_2) \subseteq \mathrm{Mod}(\Sigma).$$

Satz 12.12 *Sei Σ eine Menge von $\forall\exists$-Sätzen.*

1. *Ist $\mathcal{E}_\Sigma$ axiomatisierbar, d.h. gilt $\mathcal{E}_\Sigma = \mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathcal{E}_\Sigma))$, so ist $\mathrm{Th}(\mathcal{E}_\Sigma)$ ein Modellbegleiter von Σ.*

2. *Ist Σ^* ein Modellbegleiter von Σ, so $\mathcal{E}_\Sigma = \mathrm{Mod}(\Sigma^*)$.*

Beweis: Zu 1.: Wegen 12.8 ist $\mathrm{Th}(\mathcal{E}_\Sigma)$ modellvollständig. Nach Satz 12.4 gibt es zu jedem $\mathcal{A} \models \Sigma$ ein $\mathcal{B} \models \mathrm{Th}(\mathcal{E}_\Sigma)$ mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Da trivialerweise sich jedes Modell von $\mathrm{Th}(\mathcal{E}_\Sigma)$ zu einem Modell von Σ erweitern lässt, erhalten wir $\mathrm{Mod}(\Sigma_\forall) = \mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathcal{E}_\Sigma)_\forall)$. Somit ist $\mathrm{Th}(\mathcal{E}_\Sigma)$ ein Modellbegleiter von Σ.

Zu 2.: Da Σ^* ein Modellbegleiter von Σ ist, gilt (s.o.) $\mathrm{Mod}(\Sigma^*) \subseteq \mathrm{Mod}(\Sigma) \subseteq \mathrm{Mod}(\Sigma_\forall) = \mathrm{Mod}(\Sigma^*_\forall)$. Wegen Teil 6) von 12.2 gilt $\mathcal{E}_{\Sigma^*} = \mathcal{E}_\Sigma$ und daher $\mathrm{Mod}(\Sigma^*) = \mathcal{E}_{\Sigma^*} = \mathcal{E}_\Sigma$ wegen Teil 9) von 12.2. □

Definition 12.13 Σ^* ist eine *Modellvervollständigung* von Σ, wenn Σ^* ein Modellbegleiter von Σ ist und wenn fur $\mathcal{A} \models \Sigma$, $\mathcal{B}, \mathcal{C} \models \Sigma^*$ mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ gilt: $(\mathcal{B}, (a)_{a\in A}) \equiv (\mathcal{C}, (a)_{a\in A})$.

Satz 12.14 *Sei Σ^* Modellbegleiter einer Menge von $\forall\exists$-SätzenΣ. Für*

(1) Σ^* *ist Modellvervollständigung von* Σ.

(2) Σ *hat* (AP).

(3) $\Sigma_\forall$ *hat* (AP).

(4) Σ^* *erlaubt Quantorenelimination.*

gilt (1) $\Leftrightarrow$ (2), (3) $\Leftrightarrow$ (4) *und* (3) $\Rightarrow$ (2).

Beweis: Zu (3) $\Rightarrow$ (2) vergleiche Teil 1) von 12.7. Zu (4) $\Leftrightarrow$ (3):

(4)	gdw	Σ^* modellvollständig und Σ^* hat (AP)	(vgl. Teil 2) von 12.7)
	gdw	$\Sigma_\forall$ hat (AP)	(vgl. Definition 12.10).

Zu (1) $\Rightarrow$ (2): Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \models \Sigma$. Wegen (1) gibt es $\mathcal{B}', \mathcal{C}' \models \Sigma^*$ mit $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}'$. Wiederum wegen (1) gilt $(\mathcal{B}', (a)_{a\in A}) \equiv (\mathcal{C}', (a)_{a\in A})$. Dann gibt es eine Struktur $\mathcal{D}$ mit $\mathcal{B}' \prec \mathcal{D}$ und $\mathcal{C}' \overset{e}{\to} \mathcal{D}$ (vgl. 6.15); insbesondere, $\mathcal{D} \models \Sigma^*$. Daher existiert $\mathcal{D}' \models \Sigma$ mit $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}'$.

Zu (2) $\Rightarrow$ (1):Gelte $\mathcal{A} \models \Sigma$, $\mathcal{B}, \mathcal{C} \models \Sigma^*$ und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$. Da Σ^* ein Modellbegleiter von Σ ist, finden wir $\mathcal{B}', \mathcal{C}' \models \Sigma$ mit $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}'$. Und da Σ die Eigenschaft (AP) hat, gibt es $\mathcal{D}, \pi, \rho$ mit $\mathcal{D} \models \Sigma$, $\pi : \mathcal{B}' \overset{a}{\to} \mathcal{D}$, $\rho : \mathcal{C}' \overset{a}{\to} \mathcal{D}$ und $\pi|A = \rho|A$. Weiterhin gibt es ein $\mathcal{D}' \models \Sigma^*$ mit $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}'$. Dann $\pi|B : \mathcal{B} \overset{a}{\to} \mathcal{D}'$, $\rho|C : \mathcal{C} \overset{a}{\to} \mathcal{D}'$. Weil Σ^* modellvollständig ist, konnen wir $\overset{a}{\to}$ durch $\overset{e}{\to}$ ersetzen; somit $(\mathcal{B}, (a)_{a\in A}) \equiv (\mathcal{D}', (\pi(a))_{a\in A})$ und $(\mathcal{C}, (a)_{a\in A}) \equiv (\mathcal{C}, (\rho(a))_{a\in A})$. Da die Strukturen auf den rechten Seiten gleich sind, ergibt sich $(\mathcal{B}, (a)_{a\in A}) \equiv (\mathcal{C}, (a)_{a\in A})$. $\square$

13 Monadische zweite Stufe

Mit MSO bezeichnen wir die *monadische zweite Stufe*, also das Fragment der Logik der zweiten Stufe, das aus den Ausdrücken der Sprache der zweite Stufe besteht, die keine Funktions*variable* und höchstens einstellige Relationsvariable, sog. *Mengenvariable*, enthalten.

Für $S := \{f, c\}$ mit einstelligem Funktionssymbol f wird die Struktur $(\mathbb{N}, \sigma, 0)$ (wobei σ die Nachfolgerfunktion ist) charakterisiert durch die Sätze $\forall x \neg fx = c$ und $\forall x \forall y(fx = fy \to x = y)$ der ersten Stufe zusammen mit dem MSO-Satz

$$\forall X((Xc \wedge \forall y(Xy \to Xfy)) \to \forall y Xy).$$

Ist φ ein MSO-Ausdruck zur Symbolmenge S, so deuten wir mit

$$\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_r, Y_1, \dots, Y_s)$$

an, dass die in φ frei vorkommenden (Individuen)Variablen in $x_1, \dots, x_r$ und die in φ frei vorkommenden Mengenvariablen in $Y_1, \dots, Y_s$ enthalten sind. Ist dann $\mathcal{A}$ eine S-Struktur und sind $\bar{a} \in A^r$ und $P_1, \dots, P_s \subseteq A$, so bedeute

$$\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}, \bar{P}]$$

dass φ in $\mathcal{A}$ gilt, wenn man die x_i durch a_i und die Y_i durch P_i interpretiert.

Für $P_1, \dots, P_s \subseteq A$ schreiben auch $\bar{P} \subseteq A$; und entsprechend $\bar{Y}$ für $Y_1, \dots, Y_s$. Die Länge der Folge wird jeweils aus dem Zusammenhang klar sein.

Im folgenden seien

> $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ S-Strukturen, $\bar{a} \in A^k, \bar{b} \in B^k, P_1, \dots, P_l \subseteq A, Q_1, \dots, Q_l \subseteq B$ und $m \in \mathbb{N}$.

Das MSO-*Ehrenfeucht-Spiel* $M_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \bar{P}, \mathcal{B}, \bar{b}, \bar{Q})$ wird von zwei Spielern, I und II, nach folgenden Regeln gespielt:

Jeder Spieler hat in einer Partie m Züge; gezogen wird abwechselnd, wobei Spieler I beginnt. In seinem i-ten Zug bestimmt zunächst Spieler I, ob ein *Elementzug* oder ein *Mengenzug* durchgeführt werden soll.

- In einem Elementzug wählt I zunächst eine der beiden Strukturen und dann ein Element in ihr.

  - Wählt I ein Element in $\mathcal{A}$, so muss II ein Element in $\mathcal{B}$ wählen;
  - Wählt I ein Element in $\mathcal{B}$, so muss II ein Element in $\mathcal{A}$ wählen.

- In einem Mengenzug wählt I zunächst eine der beiden Strukturen und dann eine Teilmenge in ihr.
  - Wählt I eine Teilmenge von A, so muss II eine Teilmenge von B wählen;
  - Wählt I eine Teilmenge von B, so muss II eine Teilmenge von A wählen.

Nach m Zügen sind also Elemente $\bar{r} = r_1 \dots r_e$ in $\mathcal{A}$, Elemente $\bar{s} = s_1 \dots s_e$ in $\mathcal{B}$, Teilmengen $R_1, \dots, R_{e'}$ von A und $S_1, \dots, S_{e'}$ von B gewählt worden, wobei $e + e' = m$. Spieler II *gewinnt* die Partie, wenn $\bar{a}\bar{r} \mapsto \bar{b}\bar{s} \in \mathrm{Part}((\mathcal{A}, \bar{P}, \bar{R}), (\mathcal{B}, \bar{Q}, \bar{S}))$.

Spieler II hat eine *Gewinnstrategie* für $M_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \bar{P}, \mathcal{B}, \bar{b}, \bar{Q})$, kurz: II gew. $M_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \bar{P}, \mathcal{B}, \bar{b}, \bar{Q})$, wenn es für ihn die Möglichkeit gibt, in jeder Partie so zu spielen, dass er gewinnt.

Das folgende Lemma ergibt sich unmittelbar aus der Definition des Spiels.

Lemma 13.1 *1) II gew. $M_0(\mathcal{A}, \bar{a}, \bar{P}, \mathcal{B}, \bar{b}, \bar{Q})$ gdw. $\bar{a} \mapsto \bar{b} \in \mathrm{Part}((\mathcal{A}, \bar{P}), (\mathcal{B}, \bar{Q})$.*

2) Sei $m > 0$. Dann

$$\begin{array}{ll} & \text{II gew. } M_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \bar{P}, \mathcal{B}, \bar{b}, \bar{Q}) \\ \iff & \forall a \in A \exists b \in B: \text{ II gew. } M_{m-1}(\mathcal{A}, \bar{a}a, \bar{P}, \mathcal{B}, \bar{b}b, \bar{Q}) \\ & \textit{und } \forall P \subseteq A \exists Q \subseteq B: \text{ II gew. } M_{m-1}(\mathcal{A}, \bar{a}, \bar{P}P, \mathcal{B}, \bar{b}, \bar{Q}Q) \\ & \textit{und } \forall b \in B \exists a \in A: \text{ II gew. } M_{m-1}(\mathcal{A}, \bar{a}a, \bar{P}, \mathcal{B}, \bar{b}b, \bar{Q}) \\ & \textit{und } \forall Q \subseteq B \exists P \subseteq A: \text{ II gew. } M_{m-1}(\mathcal{A}, \bar{a}, \bar{P}P, \mathcal{B}, \bar{b}, \bar{Q}Q). \end{array}$$

3) Ist $m' < m$ und II gew. $M_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \bar{P}, \mathcal{B}, \bar{b}, \bar{Q})$, so II gew. $M_{m'}(\mathcal{A}, \bar{a}, \bar{P}, \mathcal{B}, \bar{b}, \bar{Q})$.

Beispiele 13.2 1) Sei S relational. Für S-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sei $\mathcal{C} : \mathcal{A} \dot{\cup} \mathcal{B}$, die *disjunkte Vereinigung* von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ die S-Struktur, die wie folgt definiert ist (d.E.h. nehmen wir an, dass $A \cap B = \emptyset$): $C := A \cup B$ und $R^C := R^A \cup R^B$ für $R \in S$.

Bemerkung. Wenn II gew. $M_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ und II gew. $M_m(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$, so II gew. $M_m(\mathcal{A} \dot{\cup} \mathcal{A}', \mathcal{B} \dot{\cup} \mathcal{B}')$.

Beweis: Wir basteln eine Gewinnstrategie für Spieler II in $M_m(\mathcal{A} \dot\cup \mathcal{A}', \mathcal{B} \dot\cup \mathcal{B}')$ aus Gewinnstrategien von II in $M_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ und in $M_m(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$, d.h. wir spielem mit einer Partie in $M_m(\mathcal{A} \dot\cup \mathcal{A}', \mathcal{B} \dot\cup \mathcal{B}')$ gleichzeitig Partien in $M_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ und in $M_m(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$.

Hier die Anleitung für das Verhalten von Spieler II in $M_m(\mathcal{A} \dot\cup \mathcal{A}', \mathcal{B} \dot\cup \mathcal{B}')$.

1. Wird in einem Zuge von I ein Element $a \in A$ gewählt, so antwortet II gemäß der Partie im Spiel $M_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.
2. Wird in einem Zuge von I ein Element $a \in A'$ gewählt, so antwortet II gemäß der Partie im Spiel $M_m(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$.
3. Wird in einem Zuge von I eine Teilmenge X von $A \cup A'$ gewählt, so wählen II zu $X \cap A$ und $X \cap A'$ Teilmengen Z von B und Z' von B' gemäß den Partien in $M_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ und in $M_m(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$. Dann sei $Y := Z \cup Z'$ die Antwort von II auf X.

Die Anweisungen für die Fälle, in denen Spieler I Elemente oder Teilmengen von $B \cup B'$ wählt, sind entsprechend. $\square$

2) Sei $S := \{<\} \cup S_0$, wobei S_0 nur einstellige Relationssymbole enthält. Für sog. *gefärbte Ordnungen* $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, d.h. S-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, für die $\mathcal{A}|\{<\}$ und $\mathcal{B}|\{<\}$ Ordnungen sind, sei $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ die S-Struktur mit $\mathcal{A}+\mathcal{B}|\{<\} = \mathcal{A}|\{<\} + \mathcal{B}|\{<\}$ und bei der "jedes Element seine Farben behält". Ähnlich wie die vorangehende Bemerkung zeigt man:

Bemerkung. Seien die S-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ gefärbte Ordnungen. Wenn II gew. $M_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ und II gew. $M_m(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$, so II gew. $M_m(\mathcal{A} + \mathcal{A}', \mathcal{B} + \mathcal{B}')$.

Für einen MSO-Ausdruck φ sei der Quantorenrang $\mathrm{qr}(\varphi)$ die maximale Anzahl ineinandergeschachtelter Quantoren (der ersten oder zweiten Stufe). Ein MSO-Ausdruck φ ist *termreduziert*, wenn alle atomaren Subformeln termreduzierte Ausdrücke der ersten Sufe sind oder die Gestalt Yx haben.

Lemma 13.3 *II gew. $M_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \bar{P}, \mathcal{B}, \bar{b}, \bar{Q})$. Dann gilt für termreduzierte* MSO-*Ausdrücke φ mit $\mathrm{qr}(\varphi) \leq m$, $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_k, Y_1, \dots, Y_l)$,*

$$\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}, \bar{P}] \iff \mathcal{B} \models \varphi[\bar{b}, \bar{Q}].$$

Beweis: Der Beweis erfolgt durch Induktion über m: Sei $m = 0$. Wir zeigen hier nur den gegenüber 1.5 neuen Fall. Sei $\varphi = \exists Y \psi$ mit $\psi(x_1, \dots, x_k, Y_1, \dots, Y_l, Y)$. Gelte etwa $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}, \bar{P}]$. Dann existiert $P \subseteq A$ mit $\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}, \bar{P}, P]$. Nach Lemma 13.1.2) gibt es ein $Q \subseteq B$ mit II gew. $M_{m-1}(\mathcal{A}, \bar{a}, \bar{P}P, \mathcal{B}, \bar{b}, \bar{Q}Q)$. Da $\mathrm{qr}(\psi) \leq \mathrm{qr}(\varphi) - 1 \leq m - 1$ gilt nach Induktionsvoraussetzung $\mathcal{B} \models \psi[\bar{b}, \bar{Q}Q]$ und somit $\mathcal{B} \models \varphi[\bar{b}, \bar{Q}]$. Die andere Richtung läuft entsprechend. $\square$

Wir beweisen nun eine Umkehrung von Lemma 13.3. Seien hierzu $V_0, V_1, \dots$ die Mengenvariablen. Wir setzen im folgenden voraus, dass S endlich ist. Für eine S-Struktur $\mathcal{A}$, $\bar{a} \in A^k$, $\bar{P} = P_0, \dots, P_{l-1} \subseteq A$ und $m \in \mathbb{N}$ geben wir eine Formel

$$\psi^m_{\mathcal{A},\bar{a},\bar{P}} = \psi^m_{\bar{a},\bar{P}}(v_0, \dots, v_{k-1}, V_0, \dots, V_{k-1})$$

an, die das Verhalten von $\bar{a}, \bar{P}$ in Spielen der Gestalt $M_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \bar{P}, \dots)$ beschreibt; d.h. für jede Struktur $\mathcal{B}$ und $\bar{b} \in B^k$ und $\bar{Q}$ wird gelten

$$\mathcal{B} \models \psi^m_{\mathcal{A},\bar{a},\bar{P}}[\bar{b}, \bar{Q}] \iff \text{II gew. } M_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \bar{P}, \mathcal{B}, \bar{b}, \bar{Q}).$$

Für $\bar{a} = \bar{P} = \emptyset$ schreiben wir auch $\psi^m_{\mathcal{A}}$ für $\psi^m_{\bar{a}}$. Wir definieren $\psi^m_{\bar{a},\bar{P}}$ durch Induktion über m (gleichzeitig für alle Folgen in $\mathcal{A}$).

$$\psi^0_{\mathcal{A},\bar{a},\bar{P}} := \varphi^0_{\bar{a}} \wedge \bigwedge_{j<l} \Big(\bigwedge_{i<k,\ a_i \in P_j} V_j v_i \wedge \bigwedge_{i<k,\ a_i \notin P_j} \neg V_j v_i \Big),$$

wobei $\varphi^0_{\bar{a}}$ die vor Lemma 1.6 definierte Formel ist:

$$\varphi^0_{\bar{a}} := \bigwedge \{\psi \in \Delta^S_k \mid \mathcal{A} \models \psi[\bar{a}]\} \wedge \bigwedge \{\neg\psi \mid \psi \in \Delta^S_k, \mathcal{A} \models \neg\psi[\bar{a}]\}$$

Für $m > 0$

$$\psi^m_{\bar{a},\bar{P}} := \bigwedge_{a \in A} \exists v_k \psi^{m-1}_{\bar{a}a,\bar{P}} \wedge \bigwedge_{P \subseteq A} \exists V_l \psi^{m-1}_{\bar{a},\bar{P}P} \wedge \forall v_k \bigvee_{a \in A} \psi^{m-1}_{\bar{a}a,\bar{P}} \wedge \forall V_l \bigvee_{P \subseteq A} \psi^{m-1}_{\bar{a},\bar{P}P}.$$

Die folgenden Ergebnisse werden wie die entsprechenden Ergebnisse für die Sprache der ersten Stufe bewiesen.

Lemma 13.4 *1) Für gegebene S, k, l ist $\{\psi^m_{\mathcal{B},\bar{b},\bar{Q}} \mid \mathcal{B}$ S-Struktur$, \bar{b} \in B^k, \bar{Q} \subseteq B\}$ ist endlich (und damit sind die obigen Konjunktionen und Disjunktionen endlich).*

2) $\psi^m_{\bar a,\bar P} = \psi^m_{\bar a,\bar P}(v_0,\dots,v_{k-1},V_0,\dots,V_{l-1})$*,* $\psi^m_{\bar a,\bar P}$ *ist termreduziert und* $\mathrm{qr}(\psi^m_{\bar a,\bar P}) = m$.

3) $\mathcal{A} \models \psi^m_{\bar a,\bar P}[\bar a,\bar P]$.

4) $\mathcal{B} \models \psi^0_{\bar a,\bar P}[\bar b,\bar Q]$ *gdw* $\bar a \mapsto \bar b \in \mathrm{Part}((\mathcal{A},\bar P),(\mathcal{B},\bar Q))$.

Lemma 13.5 (Lemma von Ehrenfeucht für MSO) *Sei* S *endlich,* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ S*-Strukturen,* $\bar a \in A^k$, $\bar P \subseteq A$, $\bar b \in B^k$, $\bar Q \subseteq B$, *und* $m > 0$. *Dann sind äquivalent:*

1. II *gew.* $M_m(\mathcal{A},\bar a,\bar P,\mathcal{B},\bar b,\bar Q)$.
2. $\mathcal{B} \models \psi^m_{\mathcal{A},\bar a,\bar P}[\bar b,\bar Q]$.
3. *Für alle termreduzierten* $\varphi = \varphi(x_1,\dots,x_k,Y_1,\dots,Y_l)$ *mit* $\mathrm{qr}(\varphi) \le m$
$$\mathcal{A} \models \varphi[\bar a,\bar P] \iff \mathcal{B} \models \varphi[\bar b,\bar Q].$$

Für $k = 0$ erhalten wir:

Satz 13.6 (Satz von Ehrenfeucht für MSO) *Sei* S *endlich,* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ S*-Strukturen und* $m > 0$. *Dann sind äquivalent:*

1. II *gew.* $M_m(\mathcal{A},\mathcal{B})$.
2. $\mathcal{B} \models \psi^m_{\mathcal{A}}$.
3. $\mathcal{A} \equiv^{\mathrm{MSO}}_m \mathcal{B}$.

Hierbei bedeute $\mathcal{A} \equiv^{\mathrm{MSO}}_m \mathcal{B}$, dass $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ dieselben termreduzierten MSO-Sätze vom Quantorenrang $\le m$ erfüllen.

Beispiele 13.7 1) Sei S relational. Wenn $\mathcal{A} \equiv^{\mathrm{MSO}}_m \mathcal{B}$ und $\mathcal{A}' \equiv^{\mathrm{MSO}}_m \mathcal{B}'$, so $\mathcal{A} \dot\cup \mathcal{A}' \equiv^{\mathrm{MSO}}_m \mathcal{B} \dot\cup \mathcal{B}'$.

2) Seien die S-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ gefärbte Ordnungen. Wenn $\mathcal{A} \equiv^{\mathrm{MSO}}_m \mathcal{B}$ und $\mathcal{A}' \equiv^{\mathrm{MSO}}_m \mathcal{B}'$, so $\mathcal{A} + \mathcal{A}' \equiv^{\mathrm{MSO}}_m \mathcal{B} + \mathcal{B}'$.

Folgerung 13.8 *Sei* S *endlich,* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ S*-Strukturen. Dann sind äquivalent*

1. *Für alle* m*: II gew.* $M_m(\mathcal{A},\mathcal{B})$.
2. *Für alle* $m > 0$*:* $\mathcal{B} \models \psi^m_{\mathcal{A}}$.

3. $\mathcal{A} \equiv^{\mathrm{MSO}} \mathcal{B}$.

Folgerung 13.9 *Sei $\varphi(x_1, \ldots, x_k, Y_1, \ldots, Y_l)$ ein erfüllbarer und termreduzierter MSO-Ausdruck zur Symbolmenge S, $\mathrm{qr}(\varphi) \leq m$, S o.B.d.A endlich. Dann*

$$\models \varphi \leftrightarrow \bigvee\{\psi^m_{\mathcal{A},\bar{a},\bar{P}} \mid \mathcal{A} \text{ } S\text{-Struktur}, \bar{a} \in A^k, \bar{P} \subseteq A, \mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}]\}.$$

Folgerung 13.10 *Seien S endlich und $m, k, l \in \mathbb{N}$. Dann gibt es bis auf logische Äquivalenz nur endlich viele termreduzierte Ausdücke $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_k, Y_1, \ldots, Y_l)$ vom Quantorenrang $\leq m$.*

Wir schließen diesen Paragraphen noch mit einer Anwendung auf Wortmodelle.

Beispiel 13.11 Sei $\mathbb{A}$ ein endliches Alphabet. Wir setzen $S := \{<, (R_a)_{a \in \mathbb{A}}\}$ mit einstelligen R_a. Für $w \in \mathbb{A}^*$, $w \neq \lambda$,5 sei $\mathcal{W}(w)$ das zu w *gehörende Wortmodell*, d.h. ist $w = a_1, \ldots, a_n$, so ist $\mathcal{W}(w) = (\{1, \ldots, n\}, <, (R^w_a)_{a \in \mathbb{A}})$ mit $R^w_a := \{i \mid a_i = a\}$. Wie Folgerung 13.9 zeigt man:

Bemerkung. Sei φ ein MSO-Satz mit $\mathrm{qr}(\varphi) \leq m$, der in mindestens einem Wortmodell gilt. Dann gilt in allen Wortmodellen

$$\varphi \leftrightarrow \bigvee\{\psi^m_{\mathcal{W}(w)} \mid w \in \mathbb{A}^*, w \neq \lambda, \mathcal{W}(w) \models \varphi\}.$$

Hieraus ergibt sich:

Bemerkung. Sei φ MSO-Satz. Dann ist ist die Klasse der Wortmodelle von φ automatenakzeptierbar, genauer: es gibt einen Automaten $\mathfrak{A}$, sodass für alle Wörter $w \in \mathbb{A}^*$ gilt:

$$\mathfrak{A} \text{ akzeptiert } w \iff w \neq \lambda \text{ und } \mathcal{W}(w) \models \varphi.$$

Beweis: Sei $m := \mathrm{qr}(\varphi)$. Wenn φ in keinem Wortmodell gilt, so ist die Behauptung klar. Sonst gibt es wegen der vorangehenden Bemerkung Wörter $w_1, \ldots, w_\ell$, sodass in allen Wortmodellen der Ausdruck

$$\varphi \leftrightarrow (\psi^m_{\mathcal{W}(w_1)} \vee \ldots \vee \psi^m_{\mathcal{W}(w_\ell)})$$

gilt. Wir setzen $\mathfrak{A} := (Q, q_0, \delta, F)$ mit

$$\begin{array}{rcl}
Q & := & \{\psi^m_{\mathcal{W}(w)} \mid w \in \mathbb{A}^*, w \neq \lambda\} \cup \{q_0\}; \\
\delta(q_0, a) & := & \psi^m_{\mathcal{W}(a)}; \\
\delta(\psi^m_{\mathcal{W}(w)}, a) & := & \psi^m_{\mathcal{W}(wa)}; \\
F & := & \{\psi^m_{\mathcal{W}(w_1)}, \ldots, \psi^m_{\mathcal{W}(w_\ell)}\}.
\end{array}$$

Da wegen Beispiel 13.7.2)

aus $\mathcal{W}(v) \equiv^{\mathrm{MSO}}_m \mathcal{W}(w)$ folgt $\mathcal{W}(va) \equiv^{\mathrm{MSO}}_m \mathcal{W}(wa)$,

ist δ wohldefiniert. Nun weist man leicht durch Induktion über die Länge der Wörter nach, dass für $w \in \mathbb{A}$ mit $w \neq \lambda$ gilt: $\delta(q_0, w) = \psi^m_{\mathcal{W}(w)}$. $\square$

14 Bäume

Sei $\mathcal{G}$ ein Graph. Für $a \in G$ sei $\mathrm{Nb}(a) := \{b \mid E^G ab\}$ die Menge der *Nachbarn* von a. Der *Grad* $\deg(a)$ ist gegeben durch: $\deg(a) = |\mathrm{Nb}(a)|$. Ein *Weg* in $\mathcal{G}$ ist eine Folge $a_0, \ldots, a_k$ von Punkten von $\mathcal{G}$ (mit $k \geq 0$) und $E^G a_i a_{i+1}$ für $i < k$. Wir sagen dann, dass $a_0, \ldots, a_k$ ein Weg *von* a_0 *nach* a_k der *Länge* k ist. Sind die a_i paarweise verschieden, so ist $a_0, \ldots, a_k$ ein *einfacher* Weg.

Bemerkung 14.1 *Jeder Weg von a nach b in $\mathcal{G}$ enthält die Punkte eines einfachen Weges von a nach b. Insbesondere: Wenn es einen Weg von a nach b in $\mathcal{G}$ gibt, so gibt es bereits einen einfachen Weg von a nach b.*

Beweis: Sei $a_0, \ldots, a_k$ ein Weg von a nach b. Ist $a_0, \ldots, a_k$ nicht einfach, so gibt es $i < j \leq k$ mit $a_i = a_j$. Dann ist $a_0, \ldots, a_{i-1}, a_j, \ldots, a_k$ ein Weg kürzerer Länge von a nach b. Nach endlich vielen Schritten läßt sich der Weg von a nach b nicht mehr verkürzen und ist somit einfach. □

In einem Graphen wird durch

$$a \sim b \quad \Longleftrightarrow \quad \text{es gibt einen Weg von } a \text{ nach } b$$

eine Äquivalenzrelation auf G definiert; die Äquivalenzklassen sind die *Zusammenhangskomponenten* von $\mathcal{G}$. $\mathcal{G}$ ist *zusammenhängend*, wenn es nur eine Zusammenhangskomponente gibt, wenn es also zwischen je zwei Punkten von G einen Weg gibt.

Eine Teilmenge $X \subseteq G$ eines Graphen $\mathcal{G}$ ist *zusammenhängend*, wenn $X = \emptyset$ oder $[X]^{\mathcal{G}}$ ein zusammenhängender Graph ist. Ist also $X \subseteq G$, so ist X zusammenhängend gdw es zwischen je zwei Punkten von X einen nur in X verlaufenden Weg gibt.

Bemerkung 14.2 *Sind $X_1, \ldots, X_n$ zusammenhängende Teilmengen von $\mathcal{G}$ und ist $X_i \cap X_{i+1} \neq \emptyset$ für $i = 1, \ldots, n-1$, so ist $X_1 \cup \ldots \cup X_n$ zusammenhängend.*

Beweis: Sei $a_i \in X_i \cap X_{i+1}$ für $i = 1, \ldots, n-1$. Weil X_i zusammenhängend ist, gibt es einen Weg von a_i nach a_{i+1} in X_i und daher für beliebige i, j einen Weg von a_i nach a_j in $X_1 \cup \ldots \cup X_n$. Seien nun $a, b \in X_1 \cup \ldots \cup X_n$, etwa $a \in X_i$ und $b \in X_j$. Dann gibt es einen ganz in $X_1 \cup \ldots \cup X_n$ verlaufenden Weg von a nach b: diesen setzt man sich aus Wegen von a nach a_i in X_i, von a_i nach a_j in $X_1 \cup \ldots \cup X_n$ und von a_j nach b in X_j zusammen. □

Ein *Zykel* im Graphen $\mathcal{G}$ ist ein einfacher Weg $a_0, \ldots, a_k$ mit $k \geq 2$ und $E^G a_k a_0$. $\mathcal{G}$ ist *azyklisch*, wenn $\mathcal{G}$ keine Zykel besitzt.

Bemerkung 14.3 *Sei $\mathcal{G}$ ein azyklischer Graph. Dann gibt es zwischen je zwei Punkten höchstens einen einfachen Weg.*

Beweis: Sind $a = a_0, \ldots, a_k = b$ und $a = b_0, \ldots, b_l = b$ einfache Wege von a nach b, so läßt sich aus $a_0, \ldots, a_k, b_{l-1}, \ldots, b_1$ ein Zykel konstruieren. □

Folgerung 14.4 *Seien $X_1, \ldots, X_n$ zusammenhängende Teilmengen des azyklischen Graphen $\mathcal{G}$. Dann ist $X_1 \cap \ldots \cap X_n$ zusamennhängend.*

Beweis: Sind $a, b \in X_1 \cap \ldots \cap X_n$, so enthält jedes X_i, und damit auch $X_1 \cap \ldots \cap X_n$ die Punkte des einfachen Weges von a nach b. □

Definition 14.5 Ein *Baum* ist ein azyklischer zusammenhängender Graph.

Bemerkung 14.6 (und Definitionen) *Sei $\mathcal{T} = (T, E^T)$ ein Baum und $w \in T$. $(\mathcal{T}, w)$ ist ein* Baum mit Wurzel. *Dann ist $\leq^T = \leq^T_w$ gegeben durch*

$$a \leq^T b \iff \text{der einfache Weg von } w \text{ nach } b \text{ geht durch } a$$

eine partielle Ordnung, d.h. es gilt:

$$\begin{aligned} (T, \leq^T) &\models \forall x \forall y ((x \leq y \land y \leq x) \to x = y); \\ &\models \forall x \forall y \forall z ((x \leq y \land y \leq z) \to x \leq z). \end{aligned}$$

Weiterhin gilt: Zu $b \in T$ mit $b \neq w$ gibt es genau ein $a \in T$, den Vater *von b, mit*

$$(T, \leq^T) \models a \leq b \land \forall x ((x \neq a \land x \neq b) \to \neg(a \leq x \land x \leq b)).$$

Wir schreiben dann $a = \mathrm{vater}(b)$.– $b \in T$ ist ein Kind *von a, wenn a der Vater von b ist. $a \in T$ ist ein* Blatt, *wenn a keine Kinder hat. Es gilt*

$$\begin{aligned} & \mathrm{Nb}(w) = \text{Menge der Kinder von } w; \\ \text{für } a \neq w: \quad & \mathrm{Nb}(a) = \{b \mid b \text{ ist Vater oder Kind von } a\}. \end{aligned}$$

Ist $\mathcal{T}$ ein Baum mit Wurzel w und $w \leq^t t$ und ist

$$t = t_0, \ldots, t_m = w$$

der einfache Weg von t nach w, so gilt $t_{i+1} = \mathrm{vater}(t_i)$ für $i < m$.

Sprechen wir in einem Baum $\mathcal{T}$ von $\leq^{\mathcal{T}}$, Blättern, den Kindern oder dem Vater eines Punktes, so haben wir (stillschweigend) einen Punkt als Wurzel gewählt. Ein Baum ist binär, *wenn jeder Punkt 0 oder zwei Kinder hat. Man beachte: Ist $\mathcal{T}$ ein binärer Baum mit mehr als einem Punkt, so ist die Wurzel der einzige Punkt vom Grade 2. Jeder andere Punkt von $\mathcal{T}$ hat den Grad 3 oder Null*

Ist $\mathcal{T}$ ein Baum (mit Wurzel) und $t_0 \in T$, so sei $\mathcal{T}_{t_0}$ der induzierte Baum mit Wurzel *t_0, d.h. $\mathcal{T}_{t_0} := [T_{t_0}]^{\mathcal{T}}$ mit $T_{t_0} := \{t \in T \mid t_0 \leq^T t\}$. In $\mathcal{T}_{t_0}$ wählen wir dann t_0 als Wurzel.*

Bemerkung 14.7 *Sei $\mathcal{T}$ ein Baum.*

1. *Sind $t_1, t_2, t_3 \in T$, $t_1 \leq^T t_2$ und $t_1 \not\leq^T t_3$, so liegt $\mathrm{vater}(t_1)$ auf jedem Weg von t_2 nach t_3.*
2. *Sei $X \subseteq T$ zusammenhängend und $t_1 \in T$, $\mathrm{vater}(t_1) \notin X$ und $X \cap T_{t_1} \neq \emptyset$. Dann $X \subseteq T_{t_1}$.*
3. *Sei $Y \subseteq T$ zusammenhängend, $t_1 \notin Y$ und $Y \cap \{t \mid t \notin T_{t_1}\} \neq \emptyset$. Dann $Y \cap T_{t_1} = \emptyset$.*

Beweis: zu 1): Seien

$$t_2 = r_0, \ldots, r_k = w \quad \text{und} \quad t_3 = s_0, \ldots, s_\ell = w$$

die einfachen Weg von t_2 (bzw. t_3) nach w. Sei i_0 das kleinste i, zu dem ein j mit $r_i = s_j$ existiert, also etwa $r_{i_0} = s_{j_0}$. Dann ist

$$t_2 = r_0, \ldots r_{i_0}, s_{j_0-1}, \ldots, s_0 = t_3$$

der einfache Weg von t_2 nach t_3. Wegen Bemerkung 14.1 genügt es zu zeigen, dass dieser den Punkt $\mathrm{vater}(t_1)$ enthält. Da $\mathrm{vater}(t_1) \leq^T t_1 \leq^T t_2$ gibt es ein i_1 mit

$$r_{i_1} = t_1 \quad \text{und} \quad r_{i_1+1} = \mathrm{vater}(t_1).$$

Wir zeigen, dass $i_1+1 \leq i_0$ und damit unsere Behauptung: Wäre $i_1+1 > i_0$, so $i_1 \geq i_0$ und damit $t_1 = r_{i_1} \leq^T r_{i_0} \leq^T t_3$, ein Widerspruch.

2) folgt unmittelbar aus 1).

Zu 3): Angenommen $t \in Y \cap T_{t_1}$. Dann gibt es ein s mit $t_1 \leq s \leq^T t$ mit $s \in Y$ und vater$(s) \notin Y$. Nach 2) gilt dann $Y \subseteq T_s \subseteq T_{t_1}$, im Widerspruch zu $Y \cap \{t \mid t \notin T_{t_1}\} \neq \emptyset$. □

Verschiedene Probleme, die für die Klasse aller endlichen Graphen NP-vollständig sind, sind für die Klasse der Bäume leicht (insbesondere in polynomieller Zeit) zu lösen. Ein Beispiel ist die 3-Färbbarkeit: Jeder Baum ist 3-färbbar, ja sogar zwei Farben reichen aus, um einen Baum so zu färben, dass benachbarte Punkte verschiedene Farben tragen. Wir geben ein weiteres Beispiel:

Definition 14.8 Sei $\mathcal{G}$ ein Graph. Eine Teilmenge D von G ist *dominierend*, wenn $\forall a \in G\, \exists d \in D$: $d = a \vee E^G da$. Das folgende Problem ist NP-vollständig:

Input:	(endlicher) Graph $\mathcal{G}$ und $k \in \mathbb{N}$
Frage:	Hat $\mathcal{G}$ eine dominierende Menge der Mächtigkeit k?

Das entsprechende Problem für die Klasse der Bäume ist in polynomieller Zeit zu lösen. In der Tat sei $\mathcal{T}$ ein Baum (mit Wurzel w) und $k \in \mathbb{N}$. Wir definieren für $t \in T$ durch Induktion von den Blättern zur Wurzel ein Paar von Zahlen (e_t, n_t), wobei e_t (bzw. n_t) die kleinste natürliche Zahl m ist, sodass es in $\mathcal{T}_t$ eine dominierende Menge der Mächtigkeit m gibt, die t enthält (bzw. nicht enthält). $n_t = 0$ falls T_t einelementig ist. Es gilt:

$$\begin{array}{rl} \text{Ist } t \text{ ein Blatt, so:} & (e_t, n_t) = (1, 0). \\ \text{Hat } t \text{ die Kinder } t_1, \ldots, t_\ell, \text{ so:} & e_t = 1 + \sum_{i=1}^{\ell} \min\{e_{t_i}, n_{t_i}\} \\ & n_t = \sum_{i=1}^{\ell} e_{t_i}. \end{array}$$

Für $k \geq 1$ hat $\mathcal{T}$ mit $|T| \geq k$ eine dominierende Menge der Mächtigkeit k gdw $k \geq e_w$ oder $k \geq n_w$.

15 Baumzerlegungen

Definition 15.1 $\mathcal{H} = (P, K)$ ist ein *Hypergraph*, wenn

- $P \neq \emptyset$. P ist die Menge der *Punkte von* $\mathcal{H}$;
- $\forall k \in K$: $k \subseteq P$ und k endlich. K ist die Menge der *Hyperkanten* oder kurz der *Kanten von* $\mathcal{H}$;

Beispiel 15.2 1) Sei $\mathcal{A}$ eine S-Struktur für ein relationales S.

$$\mathcal{H}(\mathcal{A}) \quad := \quad (A, \{\{\bar{a}\} \mid \text{ex. } R \in S, \, \bar{a} \in R^A\})$$

ist der *Hypergraph zu* $\mathcal{A}$.

Man zeigt leicht:

1. Ist $\mathcal{G}$ ein Graph, so $\mathcal{H}(\mathcal{G}) = (G, \{\{a, b\} \mid E^G ab\})$.
2. Ist $\mathcal{H} = (P, K)$ ein Hypergraph mit $|k| = 2$ für alle $k \in K$, so gibt es genau einen Graphen $\mathcal{G}$ mit $\mathcal{H}(\mathcal{G}) = \mathcal{H}$, nämlich $\mathcal{G} = (P, \{(a, b) \mid \{a, b\} \in K\})$.

Wir können daher – und wir werden dies gelegentlich tun – einen Graphen einführen durch Angabe des zugehörigen Hypergraphen.

2) Sei $\varphi \in L^S$ für ein relationales S.

$$\mathcal{H}(\varphi) \quad := \quad (\text{var}(\varphi), \{\text{var}(\psi) \mid \psi \text{ atomare Subformel von } \varphi\})$$

ist der *Hypergraph zu* φ.

> *Im folgenden seien (die Träger von) Strukturen, also auch von Bäumen, und (die Mengen von Punkten von) Hypergraphen stets endlich.*

Definition 15.3 Sei $\mathcal{H} = (P, K)$ ein Hypergraph. $(\mathcal{T}, (X_t)_{t \in T})$ ist eine *Baumzerlegung* von $\mathcal{H}$, wenn

1. $\mathcal{T} = (T, E^T)$ ist ein Baum;
2. Für $t \in T$ ist $X_t \subseteq P$ (X_t ist der *Block* an der Stelle t);
3. Für $p \in P$ ist $\{t \mid p \in X_t\}$ nichtleer und in $\mathcal{T}$ zusammenhängend;

4. Zu $k \in K$ gibt es ein $t \in T$ mit $k \subseteq X_t$ ("X_t *realisiert* k").

Die *Baumweite* von $(\mathcal{T}, (X_t)_{t\in T})$ ist $\max\{|X_t| - 1 \mid t \in T\}$. Die *Baumweite* $\mathrm{bw}(\mathcal{H})$ von $\mathcal{H}$ ist gegeben durch

$\mathrm{bw}(\mathcal{H}) := \min\{\text{Baumweite von } (\mathcal{T}, (X_t)_{t\in T}) \mid (\mathcal{T}, (X_t)_{t\in T}) \text{ Baumzerlegung von } \mathcal{H}\}.$

Seien S relational und $\mathcal{A}$ eine S-Struktur. $(\mathcal{T}, (X_t)_{t\in T})$ ist eine *Baumzerlegung* von $\mathcal{A}$, wenn $(\mathcal{T}, (X_t)_{t\in T})$ eine Baumzerlegung von $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ ist, wenn also:

1. $\mathcal{T} = (T, E^T)$ ist ein Baum;

2. für $t \in T$ ist $X_t \subseteq A$;

3. für $a \in A$ ist $\{t \mid a \in X_t\}$ nichtleer und in $\mathcal{T}$ zusammenhängend;

4. zu $R \in S$ und $\bar{a} \in R^A$ gibt es ein $t \in T$ mit $\bar{a} \in X_t$.

Wenn $\varphi \in L^S$ (mit S relational), so ist eine *Baumzerlegung von* φ eine Baumzerlegung von $\mathcal{H}(\varphi)$. Mit $\mathrm{bw}(\mathcal{A})$ bzw. $\mathrm{bw}(\varphi)$ bezeichnen wir $\mathrm{bw}(\mathcal{H}(\mathcal{A}))$ bzw. $\mathrm{bw}(\mathcal{H}(\varphi))$ und sprechen von der *Baumweite von* $\mathcal{A}$ bzw. *von* φ.

Beispiele 15.4 1) Ist $\mathcal{A}$ eine Struktur, so ist $\mathrm{bw}(\mathcal{A}) \leq |A| - 1$.

2) Ist $\mathcal{T}$ ein Baum mit mehr als einem Element, so hat $\mathcal{T}$ die Baumweite eins.

Beweis: Da $\mathcal{T}$ mindestens eine Kante hat und diese in einem Block realisiert werden muss, gilt $\mathrm{bw}(\mathcal{T}) \geq 1$. Anderseits ist $(\mathcal{T}, (X_t)_{t\in T})$ mit $X_w := \{w\}$ und $X_t := \{t, \mathrm{vater}(t)\}$ für $t \neq w$ eine Baumzerlegung von $\mathcal{T}$ der Baumweite eins. □

3) Sei $\mathcal{K}_k$ eine *Clique* der Göße k, d.h. ein Graph mit genau k Punkten, bei dem es zwischen je zwei verschiedenen Punkten eine Kante gibt. Es gilt $\mathrm{bw}(\mathcal{K}_k) = k - 1$.

Beweis: Wegen Teil 1) gilt $\mathrm{bw}(\mathcal{K}_k) \leq k-1$. Wir zeigen $\mathrm{bw}(\mathcal{K}_k) \geq k-1$ durch Induktion über k.

Für $k = 1$ ist die Behauptung trivial. Sei nun $k > 1$ und sei $(\mathcal{T}, (X_t)_{t\in T})$ eine Baumzerlegung von $\mathcal{K}_k$ und etwa $\{1, \ldots, k\}$ der Träger von $\mathcal{K}_k$. Dann ist $(\mathcal{T}, (X_t \cap \{1, \ldots, k-1\})_{t\in T})$ eine Baumzerlegung der Clique mit Träger $\{1, \ldots, k-1\}$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert t_0 mit $\{1, \ldots, k-1\} \subseteq$

X_{t_0}. Wir wählen t_0 als Wurzel von $\mathcal{T}$. Wenn $k \in X_{t_0}$, so sind wir fertig. Sonst wählen wir ein t_1 mit

$$k \in X_{t_1} \text{ und } k \notin X_{\text{vater}(t_1)}.$$

Für $i = 1, \ldots, k$ sei $T(i) := \{t \mid i \in X_t\}$. Somit ist $t_1 \in T(k)$ und $\text{vater}(t_1) \notin T(k)$. Nach Teil 2) von Bemerkung 14.7 ist somit $T(k) \subseteq T_{t_1}$. Ist $\{1, \ldots, k-1\} \subseteq X_{t_1}$, so sind wir fertig; sonst gibt es ein $i \neq k$ mit $i \notin X_{t_1}$. Da $t_0 \in T(i)$ und $t_1 \notin T(i)$, gilt $T(i) \cap T_{t_1} = \emptyset$ nach 14.7.3). Wegen $T(k) \subseteq T_{t_1}$ und $T(i) \cap T_{t_1} = \emptyset$ gilt $T(k) \cap T(i) = \emptyset$. Dann wird aber die Kante $\{i, k\}$ nicht realisiert, ein Widerspruch. $\square$

4) Sei $\mathcal{C}_\ell$ ein *Zykel* der Länge $\ell \geq 3$, also etwa der Graph mit $C_\ell := \{1, \ldots, \ell\}$ und $E^{C_\ell} := \{(i,j) \mid |i-j| \in \{1, \ell - 1\}$. Dann gilt $\text{bw}(\mathcal{C}_\ell) = 2$.

Beweis: $((\{1, \ldots, \ell-2\}, \{(i,j) \mid |i-j| = 1\}), (\{i, i+1, i+2\})_{1 \leq i \leq \ell-2}$ ist eine Baumzerlegung von $\mathcal{C}_\ell$ der Baumweite 2. Wir zeigen noch $\text{bw}(\mathcal{C}_\ell) \geq 2$.

Sei $(\mathcal{T}, (X_t)_{t \in T})$ eine Baumzerlegung von $\mathcal{C}_\ell$ und sei zunächst $\ell \geq 4$. Somit ist für $i = 1, \ldots, \ell$

$$T(i) := \{t \mid i \in X_t\}$$

zusammenhängend. Für $t \in T$ setzen wir

$$Y_t \;:=\; (X_t \cap \{1,2,3\}) \cup \{3 \mid \exists i \in \{4, \ldots, \ell-1, \ell\} : \; i \in X_t\}.$$

Nun gilt

1. Wenn $\{1, \ell\} \in X_t$, so $\{1, 3\} \in X_t$;
2. $\{t \mid 1 \in Y_t\} = T(1)$;
3. $\{t \mid 2 \in Y_t\} = T(2)$;
4. $\{t \mid 3 \in Y_t\} = T(3) \cup \ldots \cup T(\ell)$.

Da für t mit $\{i, i+1\} \subseteq X_t$ gilt $t \in T(i) \cap T(i+1)$, ist nach Bemerkung 14.2 auch die Menge in 4. zusammenhängend. Insgesamt zeigen 1. – 4., dass $(\mathcal{T}, (Y_t)_{t \in T})$ eine Baumzerlegung von $\mathcal{C}_3$ ist. $\mathcal{C}_3$ ist aber eine Clique mit drei Elementen und somit $\text{bw}(\mathcal{C}_3) \geq 2$ nach dem vorangehenden Beispiel. Somit gibt es ein t mit $|Y_t| = 3$ und damit $|X_t| = 3$; daher $\text{bw}(\mathcal{C}_\ell) \geq 2$. $\square$

Im folgendem werden wir die partielle Ordnung $\leq^T$ in einem Baum $\mathcal{T}$ mit Wurzel auch mit $\leq$ bezeichnen; $s \geq t$ ist gleichbedeutend zu $t \leq s$.

Ist $(\mathcal{T}, (X_t)_{t \in T})$ eine Baumzerlegung des Hypergraphen $\mathcal{H} = (P, K)$, so sei für $t \in T$

$$X_{\geq t} := \bigcup_{s \geq t} X_s.$$

Insbesondere gilt $X_{\geq w} = P$ für die Wurzel w.

Die folgende Eigenschaft von Baumzerlegungen ist von entscheidender Bedeutung:

Bemerkung 15.5 *Sei $(\mathcal{T}, (X_t)_{t \in T})$ eine Baumzerlegung des Hypergraphen $\mathcal{H} = (P, K)$. $s_1, \ldots, s_n$ seien Kinder des Knoten $t \in T$. Dann gilt für $k \in K$:*

wenn $k \subseteq X_t \cup X_{\geq s_1} \cup \ldots \cup X_{\geq s_n}$, so $k \subseteq X_t$ oder es gibt ein j mit $k \subseteq X_{\geq s_j}$.

Beweis: Wir nehmen an, dass $k = \{p_1, \ldots, p_\ell\} \not\subseteq X_t$. Nach Definition der Baumzerlegung ist für $i = 1, \ldots, \ell$ die Menge $T(p_i) := \{t' \mid p_i \in X_{t'}\}$ zusammenhängend. $T_0 := T(p_1) \cap \ldots \cap T(p_\ell)$ ist nicht leer, da es ein t_0 gibt mit $k \subseteq X_{t_0}$, also mit $t_0 \in T_0$. Wegen $k \not\subseteq X_t$ gilt $t \notin T_0$. Somit gibt es ein i mit $t \notin T(p_i)$, d.h. $p_i \notin X_t$. Nach Voraussetzng gilt $p_i \in X_t \cup X_{\geq s_1} \cup \ldots \cup X_{\geq s_n}$. Daher existiert ein j und ein t' mit $t' \geq s_j$ und mit $p_i \in X_{t'}$. Somit $t' \in T(p_i) \cap T_{s_j}$ und $t = \text{vater}(s_j) \notin T(p_i)$. Da $T(p_i)$ zusammnehängend ist, erhalten wir damit aus Teil 2) von Bemerkung 14.7: $T(p_i) \subseteq T_{s_j}$ und wegen $t_0 \in T_0 \subseteq T(p_i)$ daher $k \subseteq X_{t_0} \subseteq \bigcup_{s \geq s_j} X_s = X_{\geq s_j}$. $\square$

Ist $\mathcal{H} = (P, K)$ ein Hypergraph und $X \subseteq P$, $X \neq \emptyset$, so sei

$$[X]^{\mathcal{H}} \;:=\; (X, \{k \in K \mid k \subseteq X\}).$$

Eine Baumzerlegung $(\mathcal{T}, (X_t)_{t \in T})$ von $\mathcal{H}$ ist *reduziert*, wenn $X_s \not\subseteq X_t$ für $s, t \in T$ mit $s \neq t$.

Bemerkung 15.6 *1) Zu jeder Baumzerlegung $(\mathcal{T}, (X_t)_{t \in T})$ eines Hypergraphen $\mathcal{H}$ gibt es eine reduzierte Baumzerlegung $(\mathcal{T}', (Y_t)_{t \in T'})$ von $\mathcal{H}$ mit $\{Y_t \mid t \in T'\} \subseteq \{X_t \mid t \in T\}$ und mit der Eigenschaft, dass es zu jedem $t \in T$ ein $t' \in T'$ gibt mit $X_t \subseteq Y_{t'}$.*

2) Ist $(\mathcal{T}, (X_t)_{t\in T})$ eine reduzierte Baumzerlegung des Hypergraphen $\mathcal{H}$, so $|T| \leq |H|$.

3) Zu jeder Baumzerlegung $(\mathcal{T}, (X_t)_{t\in T})$ des Hypergraphen $\mathcal{H}$ gibt es eine binäre *Baumzerlegung $(\mathcal{T}', (Y_t)_{t\in T'})$ von $\mathcal{H}$ (d.h. $\mathcal{T}'$ ist ein binärer Baum) mit $\{X_t \mid t \in T\} = \{Y_t \mid t \in T'\}$ und $|T'| \leq 2 \cdot |T|$.*

Beweis: Zu 1): Wir führen eine Induktion über $|T|$ (gleichzeitig für alle $\mathcal{H}$). Jede Baumzerlegung mit $|T| = 1$ ist reduziert. Sei nun $(\mathcal{T}, (X_t)_{t\in T})$ eine Baumzerlegung von $\mathcal{H}$ mit $|T| > 1$. Sei t_0 ein Blatt von $\mathcal{T}$. Wenn $X_{t_0} \subseteq X_{\mathrm{vater}(t_0)}$, so ist $(\mathcal{T} \setminus \{t_0\}, (X_t)_{t\neq t_0})$ eine Baumzerlegung von $\mathcal{H}$ und wir erhalten die Behauptung aus der Induktionsvoraussetzung. Wenn $X_{t_0} \supset X_{\mathrm{vater}(t_0)}$, so ist $(\mathcal{T} \setminus \{t_0\}, (Z_t)_{t\neq t_0})$ mit

$$Z_t = X_t \text{ für } t \neq \mathrm{vater}(t_0) \quad \text{und} \quad Z_{\mathrm{vater}(t_0)} = X_{t_0}.$$

eine Baumzerlegung von $\mathcal{H}$. Wiederum ergibt sich die Behauptung aus der Induktionsvoraussetzung.

Sei nun $Z := X_{t_0} \setminus X_{\mathrm{vater}(t_0)} \neq \emptyset$ und $X_{t_0} \not\subseteq X_{\mathrm{vater}(t_0)}$. Wegen der Zusammenhangseigenschaft kommen die Punkte in Z in keinem Block X_t mit $t \neq t_0$ vor. Dann ist $(\mathcal{T} \setminus \{t_0\}, (X_t)_{t\neq t_0})$ eine Baumzerlegung von $[P \setminus Z]^{\mathcal{H}}$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert eine reduzierte Baumzerlegung $(\mathcal{T}', (Y_t)_{t\in T'})$ und ein $t_1 \in T'$ mit $X_{\mathrm{vater}(t_0)} \subseteq Y_{t_1}$. Nun hängen wir an t_1 ein neues Kind t_{neu} und setzen $Y_{t_{\mathrm{neu}}} := X_{t_0}$ und gewinnen somit eine reduzierte Baumzerlegung von $\mathcal{H}$: Da die Punkte aus Z neu sind, ist $Y_{t_{\mathrm{neu}}} \not\subseteq Y_t$ für $t \in T'$. Wäre $Y_t \subseteq Y_{t_{\mathrm{neu}}}$ für ein $t \in T'$, so $Y_t \subseteq X_{\mathrm{vater}(t_0)} \cup Z$, also $Y_t \subseteq Y_{t_1}$, was der Reduziertheit von $(\mathcal{T}', (Y_t)_{t\in T'})$ widerspricht. Die weiteren behaupteten Eigenschaften sind unmittelbar klar.

Zu 2): Wieder führen wir eine Induktion über $|T|$. Für $|T| = 1$ ist die Behauptung klar; sei also $(\mathcal{T}, (X_t)_{t\in T})$ eine reduzierte Baumzerlegung von $\mathcal{H}$ und $|T| > 1$. Wir wählen ein Blatt t_0. Da $(\mathcal{T}, (X_t)_{t\in T})$ reduziert ist, ist $Y := X_{t_0} \setminus X_{\mathrm{vater}(t_0)} \neq \emptyset$ und $(\mathcal{T} \setminus \{t_0\}, (X_t)_{t\neq t_0})$ eine reduzierte Baumzerlegung von $[P \setminus Y]^{\mathcal{H}}$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $|T \setminus \{t_0\}| \leq |P \setminus Y|$ und somit $|T| \leq |P|$.

Zu 3): Sei $(\mathcal{T}, (X_t)_{t\in T})$ eine Baumzerlegung von $\mathcal{H}$. Von den Blättern zur Wurzel "binarisieren" wir den Baum $\mathcal{T}$ wie folgt: Sei $s \in T$: Nach Induktionsvoraussetzung können wir annehmen, dass für alle Kinder t von s der induzierte Teilbaum $\mathcal{T}_t$ bereits binär ist.

Wir übernehmen das folgende Ergebnis:

Satz 15.7 *Sei $w \geq 1$ eine natürliche Zahl. Dann gibt es einen polynomiellen Algorithmus, der für jede endliche Hypergraphen $\mathcal{H}$ als Input das folgende leistet: Er entscheidet, ob $\mathrm{bw}(\mathcal{H}) \leq w$ und liefert im positiven Fall eine binäre Baumzerlegung von $\mathcal{H}$ der Baumweite $\leq w$, bei der alle Blöcke nicht leer sind.*

16 Der Satz von Courcelle

Im folgenden sei S stets relational und endlich.

In Verallgemeinerung zu der disjunkten Vereinigung (vgl. 13.2) definieren wir für beliebige S-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ die S-Struktur $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ durch $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} := (A \cup B, (R^A \cup R^B)_{R \in S})$. Man zeigt leicht:

Lemma 16.1 *Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Substrukturen von $\mathcal{C}$. Dann ist $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ die Substruktur von $\mathcal{C}$ mit Träger $A \cup B$ gdw. für alle $R \in S$, $\bar{c} \in R^C$ mit $\bar{c} \in A \cup B$ gilt $\bar{c} \in A$ oder $\bar{c} \in B$.*

Lemma 16.2 *Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ S-Stukturen. Die Elemente von $A \cap A'$ seien unter $a_1, \dots, a_k \in A$ und unter $a'_1, \dots, a'_\ell \in A'$. Die Elemente von $B \cap B'$ seien unter $b_1, \dots, b_k \in B$ und unter $b'_1, \dots, b'_\ell \in B'$. Gelte weiterhin*

$$\text{für } i, j \text{ mit } 1 \leq i \leq k \text{ und } 1 \leq j \leq \ell: \qquad a_i = a'_j \iff b_i = b'_j. \tag{3}$$

Wenn II gew. $M_n(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$ *und* II gew. $M_n(\mathcal{A}', \bar{a}', \mathcal{B}', \bar{b}')$*, so* II gew. $M_n(\mathcal{A} \cup \mathcal{A}', \bar{a}\bar{a}', \mathcal{B} \cup \mathcal{B}', \bar{b}\bar{b}')$.

Beweis: Wir basteln eine Gewinnstrategie für Spieler II in $M_n(\mathcal{A} \cup \mathcal{A}', \bar{a}\bar{a}', \mathcal{B} \cup \mathcal{B}', \bar{b}\bar{b}')$ aus Gewinnstrategien von II in $M_n(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$ und in $M_n(\mathcal{A}', \bar{a}', \mathcal{B}', \bar{b}')$, d.h. wir spielem mit einer Partie in $M_n(\mathcal{A} \cup \mathcal{A}', \bar{a}\bar{a}', \mathcal{B} \cup \mathcal{B}', \bar{b}\bar{b}')$ gleichzeitig Partien in $M_n(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$ und in $M_n(\mathcal{A}', \bar{a}', \mathcal{B}', \bar{b}')$.

Hier die Anleitung für das Verhalten von Spieler II in $M_n(\mathcal{A} \cup \mathcal{A}', \bar{a}\bar{a}', \mathcal{B} \cup \mathcal{B}', \bar{b}\bar{b}')$.

1. Wird in einem Zuge von I ein Element $a \in A$ gewählt, so antwortet II gemäß der Partie im Spiel $M_n(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$.

2. Wird in einem Zuge von I ein Element $a \in A'$ gewählt, so antwortet II gemäß der Partie im Spiel $M_n(\mathcal{A}', \bar{a}', \mathcal{B}', \bar{b}')$.

Da Elemente aus $A \cap A'$ in $\{a_1, \dots, a_k\} \cap \{a'_1, \dots, a'_\ell\}$ liegen, widersprechen sich im Falle $a \in A \cap A'$ wegen (3) die Anweisungen 1. und 2. nicht.

3. Wird in einem Zuge von I eine Teilmenge X von $A \cup A'$ gewählt, so wählen II zu $X \cap A$ und $X \cap A'$ Teilmengen Z von B und Z' von B' gemäß den Partien in $M_n(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$ und in $M_n(\mathcal{A}', \bar{a}', \mathcal{B}', \bar{b}')$. Dann sei $Y := Z \cup Z'$ die Antwort von II auf X.

Die Anweisungen für die Fälle, in denen Spieler I Elemente oder Teilmengen von $B \cup B'$ wählt sind entsprechend. $\square$

Folgerung 16.3 *Für eine Symbolmenge S, für $n, w \geq 0$ gibt es eine Funktion F mit der Eigenschaft: Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ S-Strukturen, $\bar{a} = a_0 \dots a_w \in A$, $\bar{a}' = a'_0 \dots a'_w \in A'$ und $A \cap A' = \{a_0, \dots, a_w\} \cap \{a'_0, \dots, a'_w\}$, so gilt*

$$\psi^n_{\mathcal{A} \cup \mathcal{A}', \bar{a}} \quad = \quad F(\psi^n_{\mathcal{A}, \bar{a}}, \psi^n_{\mathcal{A}', \bar{a}'}, \{(i, j) \mid a_i = a'_j\}).$$

Da der Isomorphietyp einer Struktur die MSO-Typen bestimmt, gilt:

Lemma 16.4 *Für feste Symbolmenge S und $n, w \geq 0$ gibt es eine Funktion G, die jeder S-Struktur $\mathcal{A}$ und $\bar{a} = a_0 \dots a_w \in A$ mit $A = \{a_0, \dots, a_w\}$ den* MSO*-n-Typ $\psi^n_{\mathcal{A}, \bar{a}}$ zuordnet. (Damit der Definitionsbereich von G ein endliches Objekt ist beschränken wir uns auf Strukturen, deren Träger ein Anfangsabschnitt der natürlichen Zahlen ist.)*

Ist $(\mathcal{T}, (X_t)_{t \in T})$ eine binäre Baumzerlegung von $\mathcal{A}$ mit nichtleeren Blöcken, so sei für $t \in T$

$$\mathcal{A}_{\geq t} := [X_{\geq t}]^{\mathcal{A}}$$

Dann gilt $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\geq w}$ für die Wurzel w. Weiterhin gilt:

Lemma 16.5 *Für t mit den Kindern s_1, s_2*

$$[X_t]^{\mathcal{A}} \cup \mathcal{A}_{\geq s_1} \subseteq \mathcal{A} \quad \textit{und} \quad ([X_t]^{\mathcal{A}} \cup \mathcal{A}_{\geq s_1}) \cup \mathcal{A}_{\geq s_2} \subseteq \mathcal{A}$$

und somit

$$\mathcal{A}_{\geq t} = ([X_t]^{\mathcal{A}} \cup \mathcal{A}_{\geq s_1}) \cup \mathcal{A}_{\geq s_2}.$$

Beweis: Zum Nachweis der Behauptung $[X_t]^{\mathcal{A}} \cup \mathcal{A}_{\geq s_1} \subseteq \mathcal{A}$ müssen wir wegen Lemma 16.1 müssen wir zeigen:

Ist $R \in S$, $\bar{a} \in R^{\mathcal{A}}$ uns $\bar{a} \in X_t \cup A_{s_1}$, so $\bar{a} \in X_t$ oder $\bar{a} \in A_{s_1}$.

Dies ergibt sich unmittelbar aus Bemerkung 15.5.

Entsprechend erhält man die zweite Behauptung: $([X_t]^{\mathcal{A}} \cup \mathcal{A}_{\geq s_1}) \cup \mathcal{A}_{\geq s_2} \subseteq \mathcal{A}$. $\square$

Wir halten weiterhin S, n, w fest und einen termreduzierten MSO-Satz φ zur Symbolmenge S vom Quantorenrang $\leq n$. Dann gibt es ein (endliches) Buch, das enthält die Wertetabelle der Funktion F aus Folgerung 16.3 und der Funktion G aus Lemma 16.4 und eine Übersicht über die MSO-n-Isomorphietypen $\psi^n_{\mathcal{A},\bar{a}}$ von $(w+1)$-Tupel $\bar{a}$ in S-Strukturen $\mathcal{A}$, die φ implizieren (d.h. mit $\psi^n_{\mathcal{A},\bar{a}} \models \varphi$). Hiermit zeigen wir den

Satz 16.6 (Satz von Courcelle) *Sei $n, w \in \mathbb{N}$ und φ ein termreduzierter* MSO-*Satz zur relationalen Symbolmenge S vom Quantorenrang $\leq n$. Dann gibt es einen polynomiellen Algorithmus, der für jede S-Struktur $\mathcal{A}$ von Baumweite $\leq w$ entscheidet, ob $\mathcal{A} \models \varphi$.*

Beweis: Bei gegebener S-Struktur arbeitet der Algorithmus in drei Schritten:

1. Er berechnet eine binäre Baumzerlegung $(\mathcal{T}, (X_t)_{t \in T})$ mit nichtleeren Blöcken von $\mathcal{A}$ der Weite $\leq w$ und für jedes $t \in T$ eine Folge $\bar{a}^t = a^t_0 \dots a^t_w$ mit $X_t = \{a^t_0, \dots, a^t_w\}$.

2. Von den Blättern zur Wurzel berechnet er den MSO-n-Typ $\psi^n_{\mathcal{A}_{\geq t},\bar{a}^t}$ von $\bar{a}^t$ in $\mathcal{A}_{\geq t}$.

3. Er entscheidet, ob $\psi^n_{\mathcal{A}_{\geq w},\bar{a}^w}$ den Satz φ impliziert (das ist genau dann der Fall, wenn $(\mathcal{A}_{\geq w} =)\ \mathcal{A} \models \varphi$).

Zu 1: Hier verwenden wir den Algorithmus aus 15.7.

Zu 2: Für Blätter t berchnet der Algorithmus $\psi^n_{\mathcal{A}_{\geq t},\bar{a}^t}$ mit Hilfe der Funktion G aus Lemma 16.4 (der entsprechende Wert wird im Buch nachgeschlagen).

Hat t die Kinder s_1 und s_2, so gilt $\mathcal{A}_{\geq t} = ([X_t]^{\mathcal{A}} \cup \mathcal{A}_{\geq s_1}) \cup \mathcal{A}_{\geq s_2}$. Mit G wird zunächst $\psi^n_{[X_t]^{\mathcal{A}},\bar{a}^t}$ bestimmt, dann mit der Funktion F aus Lemma 16.3 der MSO-n-Typ von $\bar{a}^t$ in $[X_t]^{\mathcal{A}} \cup \mathcal{A}_{\geq s_1}$ und schließlich wiederum mit F der MSO-n-Typ von $\bar{a}^t$ in $\mathcal{A}_{\geq t}$.

Zu 3: Hier schaut der Algorithmus im Buch nach.

Teil 1 ist polynomiell in der Größe von $\mathcal{A}$; insbesondere ist die Anzahl der Knoten von $\mathcal{T}$ polynomiell in der Größe von $\mathcal{A}$. Teil 2 benötigt in jedem Knoten von $\mathcal{T}$ eine konstante Anzahl von Schritten. Teil 3 benötigt eine konstante Anzahl von Schritten. □

Wir geben konkrete Anwendungen des Satzes von Courcelle:

Folgerung 16.7 *Sei $w \geq 1$. Es gibt einen polynomiellen Algorithmus, der für jeden Graphen der Baumweite $\leq w$ entscheidet, ob er 3-färbbar ist.*

Beweis: 3-Färbbarkeit läßt sich durch den folgenden MSO-Satz ausdrücken:

$$\begin{aligned}\exists X \exists Y \exists Z (\forall x((Xx \vee Yx \vee Zx) \wedge \neg(Xx \wedge Yx) \wedge \neg(Yx \wedge Zx) \wedge \neg(Xx \wedge Zx)) \\ \wedge \forall x \forall y (Exy \rightarrow (\neg(Xx \wedge Xy) \wedge \neg(Yx \wedge Yy) \wedge \neg(Zx \wedge Zy)))).\end{aligned}$$

□

Sei $\mathcal{G}$ ein gerichteter Graph. Eine Teilmenge $X \subseteq G$ ist ein *Kern* von $\mathcal{G}$, wenn:

$$\forall a, b \in X : \neg E^G ab \quad \text{und} \quad \forall a \in G \setminus X \, \exists b \in X : E^G ab.$$

Folgerung 16.8 *Sei $w \geq 1$. Es gibt einen polynomiellen Algorithmus, der für jeden gerichteten Graphen der Baumweite $\leq w$ entscheidet, ob er einen Kern besitzt.*

Beweis: Die Existenz eines Kernes läßt sich durch den folgenden MSO-Satz ausdrücken:

$$\exists X (\forall x \forall y ((Xx \wedge Xy) \rightarrow \neg Exy) \wedge \forall x (\neg Xx \rightarrow \exists y (Xy \wedge Exy))).$$

□

17 Formeln beschränkter Baumweite

Weiterhin seien alle Symbolmengen endlich und relational. Wir betrachten aber wieder beliebige, also auch unendliche Strukturen.

Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von endlichen Strukturen und L eine Klasse von Formeln. Mit $\mathrm{MC}(\mathcal{K}, L)$ bezeichnet man das *Model-Checking* Problem für $\mathcal{K}$ und L, d.h. das folgende Problem:

Input:	$\mathcal{A} \in \mathcal{K}$, φ L-Satz.
Frage:	$\mathcal{A} \models \varphi$?

Wir bezeichnen mit $\mathcal{E}$ (bzw. $\mathcal{E}(S)$) die Klasse der endlichen Strukturen (endlichen S-Strukturen) und mit FO (bzw. $\mathrm{FO}(S)$) die Klasse der Ausdrücke der Sprache der ersten Stufe (bzw. der Sprache der ersten Stufe zur Symbolmenge S).

Es gilt:

$$\text{Wenn P} \neq \text{NP, so } \mathrm{MC}(\mathcal{E}, \mathrm{FO}) \notin \mathrm{P}.$$

In der Tat benötigt der kanonische Algorithmus der einen Satz φ der ersten Stufe in einer endlichen Struktur $\mathcal{A}$ auswertet $O(|\varphi| \cdot \|\mathcal{A}\|^{\mathrm{var}(\varphi)})$ Schritte; dabei ist $\|\mathcal{A}\|$ die Größe der Struktur: sie berücksichtigt in natürlicher Weise auch die Mächtigkeiten der Relationen.

Setzen wir für $s \geq 1$

$$\mathrm{FO}^s \;:=\; \{\varphi \in \mathrm{FO} \mid |\mathrm{var}(\varphi)| \leq s\},$$

so erhalten wir

Satz 17.1 *Für* $s \geq 1$ *ist* $\mathrm{MC}(\mathcal{E}, \mathrm{FO}^s) \in \mathrm{P}$.

Im folgenden sei

$$\mathrm{PRIM} \;:=\; \{\varphi \in \mathrm{FO} \mid \varphi \text{ ist eine primitive Formel}\}.$$

Wir erinnern (vgl. 6.11), dass primitive Formeln Ausdrücke der Gestalt

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n (\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_k)$$

mit Literalen λ_i sind. In der Datenbanktheorie werden diese Formeln auch *conjunctive queries with negation* genannt.

Man kann wieder zeigen:

$$\text{Wenn P} \neq \text{NP, so } \mathrm{MC}(\mathcal{E}, \mathrm{PRIM}) \notin \mathrm{P}.$$

Die Situationn ändert sich, wenn wir die Baumweite der primitiven Formeln beschränken. Für $w \geq 1$ sei

$$\mathrm{PRIM}_w \quad := \quad \{\varphi \in \mathrm{PRIM} \mid \mathrm{bw}(\varphi) \leq w\}.$$

So liegen alle Formeln

$$\varphi_k \quad := \quad \exists x_1 \ldots \exists x_k (Ex_1x_2 \wedge \ldots \wedge Ex_{k-1}x_k \wedge Ex_kx_1)$$

in PRIM_2, da $\mathcal{H}(\varphi_k)$ im wesentlichen ein Zyklus der Länge k ist und somit ergibt sich das Ergebnis aus Teil 4) von 15.4.

Dagegen enthält kein PRIM_w alle Formeln

$$\psi_k \quad := \quad \exists x_1 \ldots \exists x_k \bigwedge_{i<j} Ex_ix_j,$$

denn $\mathcal{H}(\psi_k)$ ist im wesentlichen eine Clique mit k Elementen (vgl. 15.4.3)).

Im folgenden sei

$$\varphi := \exists x_1 \ldots \exists x_n (\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_k)$$

ein primitiver Satz. Für $X \subseteq \mathrm{var}(\varphi)$ setzen wir

$$\psi_X \quad := \bigwedge_{i \in \{1,\ldots,k\},\ \mathrm{var}(\lambda_i) \subseteq X} \lambda_i.$$

(Die leere Konjunktion identifizieren wir mit TRUE, einem virtuellen Ausdruck, der in allen Strukturen gilt.) Dann gilt

$$\text{wenn } X \subseteq Y \subseteq \mathrm{var}(\varphi), \text{ so } \psi_Y \models \psi_X \tag{4}$$

und

$$\psi_{\{x_1,\ldots,x_n\}} = \lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_k \tag{5}$$

Weiterhin gilt $\mathrm{fr}(\psi_X) \subseteq X$.

Lemma 17.2 *Sei $(\mathcal{T}, (X_t)_{t \in T})$ eine Baumzerlegung von φ. $s_1, \ldots, s_n$ seien die Kinder vom Knoten $t \in T$. Dann gilt:*

$$\models \gamma_{X_{\geq t}} \leftrightarrow \gamma_{X_t} \wedge \gamma_{X_{\geq s_1}} \wedge \ldots \wedge \gamma_{X_{\geq s_n}}.$$

Beweis: Wegen $X_{\geq t} = X_t \cup X_{\geq s_1} \cup \ldots \cup X_{\geq s_n}$ kommt jedes Literal λ, das auf der rechten Seite der Äquivalenz vorkommt auch links vor. Umgekehrt kommt das Literal λ in $\gamma_{X_{\geq t}}$, so gilt $k \subseteq X_{\geq t}$ für die Kante k, die aus den Variablen von λ besteht. Aus Bemerkung 15.5 ergibt sich $k \subseteq X_t$ oder es gibt ein i mit $k \subseteq X_{\geq s_i}$, also kommt λ_i in γ_{X_t} oder in einem $\gamma_{X_{\geq s_i}}$ vor. $\square$

Ist $\mathcal{A}$ eine Struktur und $\gamma : X \to A$, so ist es also sinnvoll zu fragen, ob $\mathcal{A} \models \psi_X[\gamma]$.

$\gamma : X \to A$ und $\delta : Y \to A$ sind *kompatibel*, wenn $\gamma \restriction (X \cap Y) = \delta \restriction (X \cap Y)$. Dann ist $\gamma \cup \delta : X \cup Y \to A$.

Wir halten im folgenden eine Struktur $\mathcal{A}$ und eine binäre Baumzerlegung $(\mathcal{T}, (X_t)_{t \in T})$ von φ fest.

Wir setzen für $t \in T$

$$B_t(\mathcal{A}) \;:=\; \{\gamma : X_t \to A \mid \text{ex. } \delta : X_{\geq t} \to A \;(\gamma \subseteq \delta,\ \mathcal{A} \models \psi_{X_{\geq t}}[\delta])\}.$$

Ist w die Wurzel, so gilt wegen (5): $\psi_{X_{\geq w}} = \lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_k$. Daher

$$\mathcal{A} \models \varphi \iff B_w(\mathcal{A}) \neq \emptyset. \tag{6}$$

Unter den gegebenen Voraussetzungen erhalten wir:

Lemma 17.3 *Hat t die Kinder s_1 und s_2, so*

$$B_t(\mathcal{A}) = \{\gamma : X_t \to A \mid \mathcal{A} \models \psi_{X_t}[\gamma] \text{ und } \gamma \text{ ist kompatibel zu einem } \gamma_1 \in B_{s_1} \text{ und zu einem } \gamma_2 \in B_{s_2}\}.$$

Beweis: Sei zunächst $\gamma : X_t \to A$ ein Element von $B_t(\mathcal{A})$. Dann gibt es ein $\delta : X_{\geq t} \to A$ mit $\gamma \subseteq \delta$ und $\mathcal{A} \models \psi_{X_{\geq t}}[\delta]$. Wegen $X_t, X_{\geq s_1}, X_{\geq s_2} \subseteq X_{\geq t}$ gilt nach (4)

$$\mathcal{A} \models \psi_{X_t}[\delta],\ \mathcal{A} \models \psi_{X_{\geq s_1}}[\delta] \text{ und } \mathcal{A} \models \psi_{X_{\geq s_2}}[\delta].$$

Somit $\gamma_1 := \delta \restriction X_1 \in B_{s_1}(\mathcal{A})$ und $\gamma_2 := \delta \restriction X_2 \in B_{s_2}(\mathcal{A})$. Wegen $\gamma = \delta \restriction X_t$ gilt $\mathcal{A} \models \psi_{X_t}[\gamma]$ und γ ist mit γ_1 und mit γ_2 kompatibel (denn δ ist eine gemeinsame Erweiterung). Somit liegt γ auch in der Menge auf der rechten Seite der behaupteten Gleichung.

Sei nun $\gamma : X_t \to A$, $\mathcal{A} \models \psi_{X_t}[\gamma]$ und sei γ kompatibel zu einem $\gamma_1 \in B_{s_1}(\mathcal{A})$ und zu einem $\gamma_2 \in B_{s_2}(\mathcal{A})$. Dann gibt es $\delta_1 : X_{\geq s_1} \to A$ mit $\gamma_1 \subseteq \delta_1$ und $\mathcal{A} \models \psi_{\geq s_1}[\delta_1]$ und es gibt ein $\delta_2 : X_{\geq s_2} \to A$ mit $\gamma_2 \subseteq \delta_2$ und $\mathcal{A} \models$

$\psi_{\geq s_2}[\delta_2]$. Es genügt zu zeigen, dass $\delta := \gamma \cup \delta_1 \cup \delta_2$ eine Funktion ist: Dann gilt nämlich $\delta : X_{\geq t} \to A$, $\gamma \subseteq \delta$ und $\mathcal{A} \models \psi_{X_{\geq t}}[\delta]$, letzteres wegen Lemma 17.2, und somit $\gamma \in B_t(\mathcal{A})$. Sei $a \in X_{s_1}$ und $a \in X_{s_2}$. Dann ist $a \in X_t$ und somit $\delta_1(a) = \gamma_1(a) = \gamma(a) = \gamma_2(a) = \delta_2(a)$. □

Satz 17.4 *Sei $w \geq 1$. Dann $\mathrm{MC}(\mathcal{E}, \mathrm{PRIM}_w) \in P$, d.h. es gibt einen polynomiellen Algorithmus der für jede Struktur $\underline{\underline{\mathcal{A}}}$ und jeden primitiven Satz $\underline{\underline{\varphi}}$ der Baumweite $\leq w$ entscheidet, ob $\mathcal{A} \models \varphi$.*

Beweis: Der Algorithmus arbeitet bei gegebenen $\mathcal{A}$ und φ wie folgt:

1. Er berechnet eine binäre Baumzerlegung $(\mathcal{T}, (X_t)_{t \in T})$ von φ der Baumweite $\leq w$.
2. Er berechnet $B_w(\mathcal{A})$.

Wegen (6) gilt dann $\mathcal{A} \models \varphi$ gdw $B_w(\mathcal{A}) \neq \emptyset$.

Zu 1: Hier verwenden wir den Algorithmus aus 15.7.

Zu 2: Wir berechnen von den Blättern zur Wurzel für jedes $t \in T$ die Menge B_t: Ist t ein Blatt, so ist $B_t = \{\gamma : X_t \to A \mid \mathcal{A} \models \psi_{X_t}[\gamma]\}$. Hat t die Kinder s_1 und s_2, so wenden wir die in Lemma 17.3 bewiesene Gleichung an. Dies zeigt, dass wir an jedem Knoten nur $O(\|\mathcal{A}\|^{3\cdot(w+1)})$ Schritte durchzuführen haben. □

Lemma 17.5 *Sei $w \geq 1$. Es gibt einen polynomiellen Algorithmus, der jeder primitiven Formel der Baumweite $\leq w$ eine logisch äquivalente existentielle Formel zuordnet, die die Eigenschaft hat, dass jede Subformel $\leq w + 1$ freie Variable hat.*

Beweis: Sei φ eine primitive Formel und $(\mathcal{T}, (X_t)_{t \in T})$ eine binäre Baumzerlegung von φ mit nichtleeren Blöcken der Baumweite $\leq w$. Für $t \in T$ definieren wir eine existentielle Formel ψ_t mit:

1. Jede Subformel von ψ_t hat $\leq w + 1$ freie Variable.
2. $\mathrm{fr}(\psi_t) \subseteq X_t$.

3. Für alle Struturen $\mathcal{A}$: $\{\gamma : X_t \to A \mid \mathcal{A} \models \psi_t[\gamma]\} = B_t(\mathcal{A})$

Ist w die Wurzel des Baumes und $X_w = \{y_1, \dots, y_\ell\}$, so gilt dann

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \varphi \quad &\Longleftrightarrow \quad B_w(\mathcal{A}) \neq \emptyset \text{ (vgl. (6)} \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathcal{A} \models \exists y_1 \dots \exists y_\ell \psi_w. \end{aligned}$$

Somit ist $\exists y_1 \dots \exists y_\ell \psi_w$ die gesuchte zu φ logisch äquivalente Formel.

Wir defiinieren ψ_t durch Induktion über t von den Blättern zur Wurzel:

- Ist t ein Blatt, so $\psi_t := \psi_{X_t}$.
- Hat t die Kinder s_1 und s_2 und ist $X_{s_1} \setminus X_t = \{u_1, \dots, u_{m_1}\}$ und $X_{s_2} \setminus X_t = \{v_1, \dots, v_{m_2}\}$, so

$$\psi_t := \psi_{X_t} \wedge \exists u_1 \dots \exists u_{m_1} \psi_{s_1} \wedge \exists v_1 \dots \exists v_{m_1} \psi_{s_2}.$$

Die Eigenschaften 1. bis 3. weist man leicht induktiv nach, wobei sich 2. unmittelbar aus Lemma 17.3 ergibt.

Der gesuchte polynomielle Algorithmus berechnet also bei gegebenen Input φ zunächst eine binäre Baumzerlegung der Baumweite $\leq w$ mit dem Verafahren aus 15.7 und berechnet anschließend ψ_w nach dem eben geschilderten Verfahren. □

Satz 17.6 *1) Ausdrücke in* FO^{w+1} *haben die Baumweite* $\leq w$.

2) Jede primitive Formel der Baumweite $\leq w$ *ist zu einem Ausdruck in* FO^{w+1} *logisch äquivalent. Darüberhinaus gibt es einen polynomielles Verfahren, dass jeder primitiven Formel der Baumweite* $\leq w$ *einen logisch äquivalenten Ausdruck in* FO^{w+1} *zuordnet.*

Beweis: Zu 1): Für $\varphi \in \mathrm{FO}^{w+1}$ wähle man die Baumzerlegung mit eineelementigem Baum.

Zu 2): Wegen des vorangehenden Lemmas genügt der Nachweis des folgenden Lemmas. □

Lemma 17.7 *Sei* $s \geq 1$. *Es gibt einen polynomiellen Algorithmus, der jedem Ausdruck in* FO, *bei dem jedem Subformel höchstens* s *freie Variable enthält, einen logisch äquivalenten Ausdruck in* FO^s *zuordnet*

Beweis: Durch Induktion über den Rang ordnen wir jedem $\varphi \in \mathrm{FO}$, bei der jedem Subformel höchstens s freie Variable enthält, einen Ausdruck $\varphi*$ zu mit

$$\models \varphi \leftrightarrow \varphi^*, \quad \mathrm{fr}(\varphi) = \mathrm{fr}(\varphi^*), \quad \varphi^* \in \mathrm{FO}^s.$$

Für atomares φ setzen wir $\varphi^* := \varphi$, für $\varphi = \neg\chi$ bzw. $\varphi = (\chi_1 \vee \chi_2)$ setzen wir $\varphi^* := \neg\chi^*$ bzw. $\varphi^* = (\chi_1^* \vee \chi_2^*)$. Nun sei $\varphi = \exists y \chi$ und $\mathrm{fr}(\varphi) \subseteq \{u_1, \ldots, u_s\}$. Dann

$$(*) \qquad \mathrm{fr}(\chi) \subseteq \{u_1, \ldots, u_s, y\} \quad \text{und} \quad |\mathrm{fr}(\chi)| \leq s.$$

Ist $y \notin \mathrm{fr}(\chi)$, so $\chi = \chi(u_1, \ldots, u_s)$ und χ^* ist nach Induktionsvoraussetzng definiert. Wir setzen $\varphi^* := \chi^*$. Wenn $y \in \mathrm{fr}(\chi)$ und $y \in \{u_1, \ldots, u_s\}$, so gilt wiederum, dass $\chi = \chi(u_1, \ldots, u_s)$ und dass χ^* bereits definiert ist. Wir setzen $\varphi^* := \exists y \chi^*$. Sei schließlich $y \in \mathrm{fr}(\chi)$ and $y \notin \{u_1, \ldots, u_s\}$. Wegen $(*)$ gibt es ein i mit $u_i \notin \mathrm{fr}(\chi)$. Wir setzen $\chi_0 := \chi \begin{pmatrix} u_i & y \\ y & u_i \end{pmatrix}$ (dabei entstehe $\chi \begin{pmatrix} u_i & y \\ y & u_i \end{pmatrix}$ aus χ durch simultane Ersetzung *aller* (d.h. der gebundenen und freien) Vorkommen von y bzw. u_i durch u_i bzw. y). Dann $\models \varphi \leftrightarrow \exists u_i \chi_0$, $\mathrm{fr}(\chi_0) \subseteq \{u_1, \ldots, u_s\}$, und jede Subformel von χ_0 hat höchstens s freie Variable. Somit ist χ_0^* definiert und wir können $\varphi^* := \exists u_i \chi_0^*$ setzen. $\square$

Mit Satz 17.6 erhält man die Aussage $\mathrm{MC}(\mathcal{E}, \mathrm{PRIM}_w) \in P$ (vgl. Satz 17.4) auch unmittelbar aus $\mathrm{MC}(\mathcal{E}, \mathrm{FO}^{w+1}) \in P$ (vgl. Satz 17.1).

18 Boolesche Algebren

Sei S eine beliebige Symbolmenge. Eine *Gleichung* ist ein S-Satz der Gestalt

$$\forall x_1 \ldots \forall x_r \, t_1 = t_2.$$

Wir setzen $S_{\mathrm{BA}} := \{\cup, \sim, 1\}$. Dabei ist $\cup$ ein zweistelliges und $\sim$ ein einstelliges Funktionssymbol. Für Terme $t, t' \in T^{S_{\mathrm{BA}}}$ sei $t \cap t' :=\sim (\sim t \cup \sim t')$ und $0 :=\sim 1$. Für eine Menge A sei die S_{BA}-Struktur $\mathcal{P}(A)$ die Potenzmengenalgebra von A, $\mathcal{P}(A) := (P(A), \cup, \sim, A)$, wobei für $X \subseteq A$: $\sim X := A \setminus X$.

Ist $|A| = n$, so hat $P(A)$ genau 2^n Elemente; ist A unendlich, so hat $P(A)$ überabzählbar viele Elemente. Wegen des Satzes von Löwenheim und Skolem ist daher die Klasse der (zu) Potenzmengenalgebren (isomorphen Strukturen) nicht axiomatisierbar. GL(PMA) sei die Menge der in allen Potenzmengenalgebren gültigen Gleichungen

$$\mathrm{GL(PMA)} \ := \ \{\varphi \mid \varphi \text{ Gleichung}, \mathcal{P}(A) \models \varphi \text{ für alle } A\}.$$

Wir werden in diesem Paragraphen sehen, daß Boolesche Algebren genau die Modelle von GL(PMA) sind. Weiterhin werden wir zeigen, daß Boolesche Algebren genau die Strukturen sind, die sich in Potenzmengenalgebren einbetten lassen.

Definition 18.1 Eine S_{BA}-Struktur $\mathcal{B}$ ist eine *Boolesche Algebra*, wenn $\mathcal{B} \models \Sigma_{\mathrm{BA}}$ ist, wobei Σ_{BA} aus den folgenden Gleichungen besteht:

ψ_0	$:=$	$\forall x \forall y \, x \cup y = y \cup x$	Kommutativität
ψ_1	$:=$	$\forall x \forall y \forall z \, (x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$	Assoziativität
ψ_2	$:=$	$\forall x \forall y \forall z \, x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$	Distributivität
ψ_3	$:=$	$\forall x \forall y \, (x \cup y) \cap y = y$	Absorption
ψ_4	$:=$	$\forall x \sim\sim x = x$	1. Komplementgesetz
ψ_5	$:=$	$\forall x \, x \cup \sim x = 1$	2. Komplementgesetz.

Bemerkungen und Beispiele 18.2 1) Jede Potenzmengenalgebra ist eine Boolesche Algebra. $\mathcal{P}(\emptyset)$ und $\mathcal{P}(\{\emptyset\})$ bezeichnen wir mit **1** und **2**.

2) Die Klasse der Booleschen Algebren ist gegen Substrukturen und reduzierte Produkte abgeschlossen. (Da Σ_{BA} aus universellen Sätzen besteht, die

$\neg$ und $\vee$ nicht enthalten.)

3) Ist A eine Menge, so enthält

$$P_{\mathrm{ece}}(A) \ := \ \{X \subseteq A \mid X \text{ endlich oder } (A \setminus X) \text{ endlich}\}$$

die Menge A und ist abgeschlossen gegen $\cup$ und $\sim$; daher ist $P_{\mathrm{ece}}(A)$ der Träger einer Substruktur $\mathcal{P}_{\mathrm{ece}}(A)$ von $\mathcal{P}(A)$, der *Booleschen Algebra der endlichen oder coendlichen Teilmengen* von A. $\mathcal{P}_{\mathrm{ece}}(\mathbb{N})$ ist abzählbar.

4) Sei $\mathcal{A}$ eine S-Struktur und $n \geq 1$. Für $\varphi \in L_n^S$ bezeichne $\varphi(\mathcal{A})$ die Erfüllungsmenge von φ in $\mathcal{A}$,

$$\varphi(\mathcal{A}) \ := \ \{\bar{a} \in A^n \mid \mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}]\}.$$

$D_n(\mathcal{A}) := \{\varphi(\mathcal{A}) \mid \varphi \in L_n^S\}$ ist der Träger einer Substruktur $\mathcal{D}_n(\mathcal{A})$ von $\mathcal{P}(A^n)$, der *Booleschen Algebra der in $\mathcal{A}$ definierbaren Teilmengen von A^n.*

5) Für eine Symbolmenge S und $\Sigma \subseteq L_0^S$ definieren wir die 2-stellige Relation $\sim_\Sigma$ durch

$$\varphi \sim_\Sigma \psi \quad \text{gdw} \quad \Sigma \models \varphi \leftrightarrow \psi.$$

$\sim_\Sigma$ ist eine Äquivalenzrelation. $\overline{\varphi}$ bezeichne die Äquivalenzklasse von φ, $\overline{\varphi} := \{\psi \mid \varphi \sim_\Sigma \psi\}$. Dann ist $\mathcal{L}(\Sigma) := (L(\Sigma), \dot{\vee}, \dot{\neg}, \overline{\exists v_0 v_0 = v_0})$ eine Boolesche Algebra, wobei

$$\begin{aligned} L(\Sigma) \ &:= \ \{\overline{\varphi} \mid \varphi \in L^S\}; \\ \overline{\varphi} \dot{\vee} \overline{\psi} \ &:= \ \overline{\varphi \vee \psi}; \\ \dot{\neg}\overline{\varphi} \ &:= \ \overline{\neg\varphi}. \end{aligned}$$

Man beachte, daß

$$\begin{aligned} \overline{\varphi} = \overline{\psi} \quad &\text{gdw} \quad \Sigma \models \varphi \leftrightarrow \psi; \\ \overline{\varphi} = 1^{\mathcal{L}(\Sigma)} \quad &\text{gdw} \quad \Sigma \models \varphi; \\ \overline{\varphi} = 0^{\mathcal{L}(\Sigma)} \quad &\text{gdw} \quad \Sigma \models \neg\varphi. \end{aligned}$$

$L_n(\Sigma) := \{\overline{\varphi} \mid \varphi \in L_n^S\}$ ist gegen $\dot{\vee}$, $\dot{\neg}$ abgeschlossen und entält $1^{\mathcal{L}(\Sigma)}$. Somit ist $L_n(\Sigma)$ der Träger einer Substruktur von $\mathcal{L}_n(\Sigma)$ von $\mathcal{L}(\Sigma)$. Es gilt

$$\mathcal{L}_0(\Sigma) \subseteq \mathcal{L}_1(\Sigma) \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{L}(\Sigma) = \bigcup_{\mathbb{N}} \mathcal{L}_n(\Sigma).$$

$\mathcal{L}(\Sigma)$ (bzw. $\mathcal{L}_n(\Sigma)$) ist die (bzw. die n-te) *Lindenbaumalgebra* oder *Formelalgebra* von Σ.

6) Sei $\mathcal{A} = (A, <)$ eine Ordnung mit 1. Element a_0. Die Mengen $[a, b) := \{c \mid a \leq c < b\}$ und $[a, \infty) := \{c \mid a \leq c\}$ mit $a, b \in A$ heißen halboffene Intervalle in $(A, <)$. $H(\mathcal{A})$ ist die Menge der halboffenen Intervalle, $\mathcal{I}(\mathcal{A}) := [H(\mathcal{A})]^{\mathcal{P}(A)}$, die *Intervallalgebra* zu $\mathcal{A}$. Es gilt

$$\begin{aligned} I(\mathcal{A}) &= \{X \subseteq A \mid X \text{ ist Vereinigung von endlich vielen} \\ &\qquad\qquad \text{paarweise disjunkten halboffenen Intervallen}\}. \end{aligned}$$

7) Sei (X, σ) ein topologischer Raum, wobei σ die Menge der offenen Mengen ist. $Y \subseteq X$ ist *clopen*, wenn $Y, X \setminus Y \in \sigma$. $\mathrm{C}(X, \sigma) := \{Y \subseteq X \mid Y \text{ clopen}\}$ ist der Träger einer Subalgebra $\mathcal{C}(X, \sigma)$ von $\mathcal{P}(X)$, der *Booleschen Algebra der clopen Mengen* von (X, σ).

Lemma 18.3 *Jede Boolesche Algebra ist Modell der folgenden Gleichungen*

$$\begin{array}{lll} \chi_0 &:=& \forall x \forall y\, x \cap y = y \cap x \\ \chi_1 &:=& \forall x \forall y \forall z\, (x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z) \\ \chi_2 &:=& \forall x \forall y \forall z\, x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z) \\ \chi_3 &:=& \forall x \forall y\, (x \cap y) \cup y = y \\ \chi_5 &:=& \forall x\, x \cap \sim x = 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{lllllll} \psi_6 &:=& \forall x\, x \cup x = x & \qquad & \chi_6 &:=& \forall x\, x \cap x = x \\ \psi_7 &:=& \forall x\, x \cup 0 = x & & \chi_7 &:=& \forall x\, x \cap 1 = x \\ \psi_8 &:=& \forall x\, x \cup 1 = 1 & & \chi_8 &:=& \forall x\, x \cap 0 = 0 \\ \psi_9 &:=& \forall x \forall y \sim (x \cup y) = \sim x \cap \sim y & & \chi_9 &:=& \forall x \forall y \sim (x \cap y) = \sim x \cup \sim y. \end{array}$$

Beweis: Sei $\mathcal{B}$ eine Boolesche Algebra und $a, b, c \in B$. Zu χ_0: Da $\mathcal{B} \models \psi_0$, gilt $\sim a \cup \sim b = \sim b \cup \sim a$; daher $\sim (\sim a \cup \sim b) = \sim (\sim b \cup \sim a)$, d.h. $a \cap b = b \cap a$. – Der Beweis von $\mathcal{B} \models \chi_1$, $\mathcal{B} \models \chi_2$ und $\mathcal{B} \models \chi_3$ verläuft analog.

Zu χ_5: Da $\mathcal{B} \models \psi_5$, gilt $\sim a \cup \sim\sim a = 1$, somit $\sim (\sim a \cup \sim\sim a) = \sim 1$ und daher $a \cap \sim a = 0$.

Zu ψ_6: Da $\mathcal{B} \models \chi_3$, gilt $(\overbrace{(a \cup a)}^{x} \cap \overbrace{a}^{y}) \cup a = a$; mit $\mathcal{B} \models \psi_3$ somit $a \cup a = a$.

Zu ψ_7: $a \cup 0 \overset{\chi_5}{=} a \cup (a \cap \sim a) \overset{\psi_0, \chi_0}{=} (\sim a \cap a) \cup a \overset{\chi_3}{=} a$.

Zu ψ_9: $\sim (a \cup b) \overset{\psi_4}{=} \sim (\sim\sim a \cup \sim\sim b) = \sim a \cap \sim b$. $\square$

Bemerkung 18.4 *Jede endlich erzeugte Boolesche Algebra ist endlich.*

Beweis: Sei $\mathcal{B}$ eine Boolesche Algebra und $\mathcal{B} = [X]^{\mathcal{B}}$ für ein endliches X. Wir führen den Beweis durch Induktion über die Anzahl $|X|$ der Erzeugenden. Ist $|X| = 0$, so ist $\{0, 1\}$ der Träger von $[X]^{\mathcal{B}}$. Ist nun $X \neq \emptyset$, etwa $x \in X$, so ist nach Induktionsvoraussetzung $\mathcal{B}_0 = [X \setminus \{x\}]^{\mathcal{B}}$ eine endlich Boolesche Algebra. Wir zeigen, dass jedes Element von $\mathcal{B}$ sich in der Form

$$(a \cap x) \cup (b \cap \sim x) \tag{7}$$

mit geeigneten $a, b \in B_0$ schreiben läßt. Hierzu genügt der Nachweis, dass:

1. jedes Element in B_0 hat eine Darstellung (7),
2. x hat eine Darstellung (7),
3. die Menge der Elemente mit einer Darstellung (7) gegen $\cup$ und $\sim$ abgeschlossen ist und die 1 enthält.

Zu 1: Stets gilt $a = a \cap 1 = a \cap (x \cup \sim x) = (a \cap x) \cup (a \cup \sim x)$.

Zu 2: Es gilt $x = x \cup 0 = (1 \cap x) \cup (0 \cap \sim x)$.

Zu 3: Abschluß gegen $\cup$: Für $i = 1, 2$ gelte $c_i = (a_i \cap x) \cup (b_i \cap \sim x)$ mit $a_i, b_i \in B_0$. Dann

$$\begin{aligned} c_1 \cup c_2 = (a_1 \cap x) \cup (b_1 \cap \sim x) \cup (a_2 \cap x) \cup (b_2 \cap \sim x) = (a_1 \cap x) \cup (a_2 \cap x) \cup \\ (b_1 \cap \sim x) \cup (b_2 \cap \sim x) = ((a_1 \cup a_2) \cap x) \cup ((b_1 \cup b_2) \cap \sim x). \end{aligned}$$

Abschluß gegen $\sim$: Sei $c = (a \cap x) \cup (b \cap \sim x)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sim c &= \sim ((a \cap x) \cup (b \cap \sim x)) = \sim (a \cap x) \cap \sim (b \cap \sim x) = (\sim a \cup \sim x) \cap (\sim b \cup x) \\ &= (\sim a \cap (\sim b \cup x)) \cup (\sim x \cap (\sim b \cup x)) \\ &= ((\sim a \cap \sim b) \cup (\sim a \cap x) \cup (\sim x \cap \sim b) \cup (\sim x \cup x) \\ &= ((\sim a \cap \sim b) \cup (\sim a \cap x) \cup (\sim b \cap \sim x). \end{aligned}$$

Somit hat $\sim c$ die Gestalt $d \cup (e \cap x) \cup (f \cap \sim x)$ mit $d, e, f \in B_0$. Wegen $d = (d \cap x) \cup (d \cap \sim x)$ folgt die Behauptung daher aus dem Abschluß gegen $\cup$. $\square$

Ist $\mathcal{B}$ eine Boolesche Algebra, so bezeichne $\leq$ die zweistellige Relation auf B mit

$$a \leq b \quad \text{gdw} \quad a \cap b = a.$$

Bemerkungen und Beispiele 18.5 1) $a \leq a$. (Da $a \cap a = a$.)

2) Wenn $a \leq b$ und $b \leq c$, so $a \leq c$. (Da $a \cap c = (a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c) = a \cap b = a$.)

3) Wenn $a \leq b$ und $b \leq a$, so $a = b$. (Da $a = a \cap b = b \cap a = b$.)

4) $0 \leq a$, $a \leq 1$. (Da $0 \cap a = 0$ und $a \cap 1 = a$.)

5) a) $a \cup b = \sup\{a, b\}$,
d.h. $a \leq a \cup b$, $b \leq a \cup b$ und $\forall c$(wenn $a \leq c$ und $b \leq c$, so $a \cup b \leq c$).

b) $a \cap b = \inf\{a, b\}$.

Beweis: Zu a): $a \leq a \cup b$, da $a \cap (a \cup b) = a$; $b \leq a \cup b$, da $b \cap (a \cup b) = b$; gelte $a, b \leq c$; dann $(a \cup b) \cap c = (a \cap c) \cup (b \cap c) = a \cup b$. Somit $a \cup b \leq c$.□

6) $a \leq b$ gdw $a \cap \sim b = 0$
gdw $\sim a \cup b = 1$.

Beweis: Wenn $a \leq b$, so $a \cap \sim b = (a \cap b) \cap \sim b = a \cap (b \cap \sim b) = 0$. Wenn $a \cap \sim b = 0$, so $a \cap b = (a \cap b) \cup (a \cap \sim b) = a \cap (b \cup \sim b) = a \cap 1 = a$, und daher $a \leq b$. Schließlich gilt

$$\begin{aligned} a \cap \sim b = 0 \quad &\text{gdw} \quad \sim (a \cap \sim b) = 1 \\ &\text{gdw} \quad \sim a \cup b = 1. \end{aligned}$$

7) $a \leq b$ gdw $\sim b \leq \sim a$.

Beweis: Wegen 6) ist $a \leq b$ äquivalent zu $a \cap \sim b = 0$ und damit zu $\sim b \cap \sim\sim a = 0$, was wiederum zu $\sim b \leq \sim a$ äquivalent ist. □

8) In $\mathcal{L}(\Sigma)$: $\overline{\varphi} \leq \overline{\psi}$ gdw $\Sigma \models \varphi \to \psi$.

Beweis:
$$\begin{aligned} \overline{\varphi} \leq \overline{\psi} \quad &\text{gdw} \quad \overline{\varphi} \cap \overline{\psi} = \overline{\varphi} \\ &\text{gdw} \quad \overline{\varphi \wedge \psi} = \overline{\varphi} \\ &\text{gdw} \quad \Sigma \models (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \varphi \\ &\text{gdw} \quad \Sigma \models \varphi \to \psi. \end{aligned}$$
□

Definition 18.6 Ein Element a einer Booleschen Algebra $\mathcal{B}$ ist ein *Atom*, wenn

$$a \neq 0 \quad \text{und} \quad \forall b, c \in B(\text{wenn } a = b \cup c, \text{ so } (b = a \text{ oder } c = a)).$$

$\mathrm{At}(\mathcal{B}) := \{a \in B \mid a \text{ Atom}\}$. $\mathcal{B}$ ist *atomlos*, wenn $\mathrm{At}(\mathcal{B}) = \emptyset$. $\mathcal{B}$ ist *atomar*, wenn zu jedem $b \in B$, $b \neq 0$, ein Atom a mit $a \leq b$ existiert.

Bemerkungen und Beispiele 18.7 1) Äquivalent sind:

1. a ist ein Atom.

2. $a \neq 0$ und $\forall b$(entweder $a \leq b$ oder $a \leq\sim b$).

3. $a \neq 0$ und $\forall b$(wenn $b \leq a$, so $(b = 0$ oder $b = a))$.

Beweis: Zu $1 \Rightarrow 2$: Wegen $a = (a \cap b) \cup (a \cap \sim b)$ und 1. gilt $a = a \cap b$ oder $a = a \cap \sim b$. Wegen $(a \cap b) \cap (a \cap \sim b) = 0$ kann höchstens eine Glreichung gelten.

Zu $2 \Rightarrow 3$: Sei $a \neq 0$ und $b \leq a$. Nach 2. $(a \leq b$ oder $a \leq\sim b)$. Daher $a = b$ oder $(b \leq a$ und $b \leq\sim a$. Also $a = b$ oder $b \leq a \cap \sim a = 0$.

Zu $3 \Rightarrow 1$: Sei $a = b \cup c$, dann $b \leq a$ und $c \leq a$; wegen 3. also $(b = 0$ oder $b = a)$ und $(c = 0$ oder $c = a)$. Wegen $a \neq 0$, kann nicht zugeich $b = 0$ und $c = 0$ sein. $\square$

2) Jede endliche Boolesche Algebra $\mathcal{B}$ ist atomar.

Beweis: Sei $b \in B$, $b \neq 0$. Wähle $a \neq 0$ mit $a \leq b$ und für alle $c \in B$ (wenn $c \leq a$, so $c = a$ oder $c = 0$). Dann ist a ein Atom.

3) In $\mathcal{P}(A)$ und in $\mathcal{P}_{\mathrm{e,ce}}(A)$ gilt:

$$X \text{ Atom} \quad \text{gdw} \quad \exists a \in A \text{ mit } X = \{a\}.$$

$\mathcal{P}(A)$ und in $\mathcal{P}_{\mathrm{e,ce}}(A)$ sind atomar.

4) G bzw. U bezeichne die Menge der geraden bzw. ungeraden natürlichen Zahlen. In $\mathcal{B}$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$, mit $B = \{\emptyset, G, U, \mathbb{N}\}$, sind G und U Atome; G und U sind keine Atome in $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

5) Sei $\mathbb{Q}_+ := \{q \in \mathbb{Q} \mid q \geq 0\}$ die Menge der positiven rationalen Zahlen. $\mathcal{I}((\mathbb{Q}_+, <))$ ist atomlos.

6) $\mathcal{I}((\mathbb{N}, <) + (\mathbb{Q}_+, <))$ ist weder atomar noch atomlos.

7) Sind $a_1, a_2 \in \mathrm{At}(\mathcal{B})$, $a_1 \neq a_2$, so $a_1 \cap a_2 = 0$.

Beweis: Nach Voraussetzung gilt etwa nicht $a_1 \leq a_2$; daher $a_1 \cap a_2 \neq a_1$; wegen $a_1 \cap a_2 \leq a_1$ somit $a_1 \cap a_2 = 0$, da a_1 ein Atom ist. $\square$

Satz 18.8 *Jede endliche Boolesche Algebra und damit jede endlich erzeugte Boolesche Algebra ist isomorph zu einer Potenzmengenalgebra. Ist $\mathcal{B}$ eine endliche Boolesche Algebra, so gilt $\pi : \mathcal{B} \cong \mathcal{P}(\mathrm{At}(\mathcal{B}))$, wobei*

$$\pi(b) := \{a \in \mathrm{At}(\mathcal{B}) \mid a \leq b\}.$$

Beweis: Trivialerweise gilt $\pi(1) = \mathrm{At}(\mathcal{B})$.

$\pi(\sim b) = \mathrm{At}(\mathcal{B}) \setminus \pi(b)$: Dies gilt wegen Teil 2. von 18.7.1).

$\pi(b \cup c) = \pi(b) \cup \pi(c)$: Sei $a \in \pi(b \cup c)$. Dann ist $a \leq (b \cup c)$. Also $a = a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$. Da a ein Atom ist gilt $a \leq b$ oder $a \leq c$.

Wenn $\pi(b) = \pi(c)$, so $b = c$: Angenommen nicht $b \leq c$. Dann $b \cap \sim c \neq 0$, also gibt es, da $\mathcal{B}$ endlich ist, ein Atom a mit $a \leq b \cap \sim c$. Dann $a \in \pi(b)$ und $a \in \pi(\sim c) = \mathrm{At}(\mathcal{B}) \setminus \pi(c)$, also $\pi(b) \neq \pi(c)$.

π ist surjektiv: $\pi(0) = \emptyset$. Sei $D = \{a_1, \ldots, a_r\} \subseteq \mathrm{At}(\mathcal{B})$. Wir setzen $b := a_1 \cup \ldots \cup a_r$. Ist a ein von den a_i verschiedenes Atom, so gilt $a \cap b = (a \cap a_1) \cup \ldots \cup (a \cap a_r) = 0 \cup \ldots \cup = 0$, also $\pi(b) = D$. $\square$

Folgerung 18.9 *Jeder universelle S_{BA}-Satz, der in allen Potenzmengenalgebren gilt, gilt auch in allen Booleschen Algebren.*

Beweis: Sei φ ein universeller Satz, der in allen Potenzmengenalgebren gilt, und $\mathcal{B}$ eine Booleschen Algebra. Da jede endlich erzeugte Substruktur von $\mathcal{B}$ isomorph zu einer Potenzmengenalgebra ist, gilt φ in jeder endlich erzeugten Substruktur von $\mathcal{B}$ und daher wegen 4.8 auch in $\mathcal{B}$. $\square$

Eine Boolesche Algebra ist *trivial*, wenn $0^{\mathcal{B}} = 1^{\mathcal{B}}$, wenn also $\mathcal{B} \cong \mathbf{1}$.

Folgerung 18.10 *Für jede Gleichung φ und jede nichttriviale Boolesche Algebra $\mathcal{B}$ sind äquivalent:*

1. *φ gilt in allen Booleschen Algebren.*
2. *$\mathcal{B} \models \varphi$.*

Beweis: Da 1 $\Rightarrow$ 2 trivial ist, nehmen wir an, daß $\mathcal{B} \models \varphi$ und zeigen 1. Zunächst bemerken wir, daß jede Gleichung in der trivialen Booleschen Algebra $\mathbf{1}$ gilt. Wegen $\mathbf{2} \subseteq \mathcal{B}$, gilt $\mathbf{2} \models \varphi$. Da φ eine Gleichung ist, gilt für jede nichtleere Menge A, daß die Potenz $\mathbf{2^A}$ ein Modell von A ist. Wegen $\mathcal{P}(A) \cong \mathbf{2^A}$ (vermöge $X \mapsto <1|x \in X> \cup <0|x \in A \setminus X>$), ist jede Potenzmengenalgebra und damit jede Boolesche Algebra ein Modell von φ. $\square$

Definition 18.11 Sei $\mathcal{B}$ eine Boolesche Algebra und $E \subseteq B$.

- E hat die *endliche Durchschnittseigenschaft*, ede E, wenn $E \neq \emptyset$ und $e_0 \cap \ldots \cap e_k \neq 0$ für je endlich viele $e_0, \ldots, e_k \in E$.
- E ist ein *Filter* in $\mathcal{B}$ gdw (*a*) $0 \notin E$, $E \neq \emptyset$.
  (*b*) Wenn $a \in E$, $b \in B$ und $a \leq b$, so $b \in E$.
  (*c*) Wenn $a, b \in E$, so $a \cap b \in E$.
- E *Ultrafilter* in $\mathcal{B}$ gdw (a), (b), (c) und
  (d) $\forall a \in B (a \in E$ oder $\sim a \in E)$.

Bemerkungen und Beispiele 18.12 1) Jeder Ultrafilter ist ein Filter.

2) Jeder Filter hat die ede.

3) Wenn ede E für eine Teilmenge E der Booleschen Algebra $\mathcal{B}$ gilt, so ist

$$F_E \quad := \quad \{b \in B \mid \exists k \geq 0,\ e_0, \ldots, e_k \in E : e_0 \cap \ldots \cap e_k \leq b\}$$

ein Filter, der *von E erzeugte Filter*. Es gilt

- $E \subseteq F_E$;
- Wenn F Filter und $E \subseteq F$, so $F_E \subseteq F$.

Ist $a \in B$, $a \neq 0$, so $F_a := F_{\{a\}} := \{b \in B \mid a \leq b\}$.

4) Sei $a \in B$, $a \neq 0$. Dann

- F_a ist ein Filter.
- F_a ist ein Ultrafilter gdw a ist ein Atom (wegen Teil 2 von 18.7.2).

5) Wenn ede E und $b \in B$, so ede $E \cup \{b\}$ oder ede $E \cup \{\sim b\}$. Insbesondere: Ist F ein Filter, so gibt es einen Filter F' mit ($F \subseteq F'$ und ($b \in F'$ oder $\sim b \in F'$)).

6) Für einen Filter F in $\mathcal{B}$ sind äquivalent:

1. F ist Ultrafilter.

2. $\forall a \in B$ (entweder $a \in F$ oder $\sim a \in F$).

3. F ist ein maximaler Filter. (Für alle Filter F' in $\mathcal{B}$: wenn $F \subseteq F'$, so $F = F'$.)

4. $\forall a, b \in B$ (wenn $a \cup b \in F$, so ($a \in F$ oder $b \in F$)).

7) Sei E eine Teilmenge von $\mathcal{B}$ mit ede E. Gelte $\forall b \in B (b \in E$ oder $\sim b \in E)$. Dann ist E ein Ultrafilter.

Beweis: Wir zeigen, daß E ein Filter ist. $0 \notin E$ und $E \neq \emptyset$ gelten, da ede E. Sei $a \in E$, $b \in B$ und $a \leq b$. Dann $0 = a \cap \sim b$; wegen ede E also $\sim b \notin E$, nach Voraussetzung daher $b \in E$. Wenn $a, b \in E$, so $\sim (a \cap b) \notin E$ wegen ede E und $(a \cap b) \cap \sim (a \cap b) = 0$; also $a \cap b \in E$. □

Unmittelbar aus 7) ergibt sich:

8) Sei $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(A)$ und $x \in A$. Dann ist $\{b \in B \mid x \in b\}$ ein Ultrafilter in $\mathcal{B}$.

Satz 18.13 (Ultrafiltertheorem) *Jede Menge E mit der ede – und damit jeder Filter – läßt sich zu einem Ultrafilter erweitern.*

Beweis: 1. Fall: B ist endlich. Dann auch E, also $E = \{b_0, \ldots, b_n\}$. Dann gilt $b \neq 0$ für $b := b_0 \cap \ldots \cap b_n$. Wir wählen ein Atom a mit $a \leq b$. Dann ist F_a ein Ultrafilter mit $E \subseteq F_a$.

2. Fall: Sei $\mathcal{B}$ eine beliebige Boolesche Algebra. Wir müssen zeigen: Es gibt eine $S_{\mathrm{BA}} \cup \{\underline{E}, \underline{U}\}$-Expansion $(\mathcal{B}, E, U)$ von $(\mathcal{B}, E)$ die Modell der folgenden Sätze ist:

$$\begin{array}{l} \forall x (\underline{E}x \rightarrow \underline{U}x) \\ \neg \underline{U}0 \\ \forall x \forall y ((\underline{U}x \wedge x \cap y = x) \rightarrow \underline{U}y) \\ \forall x \forall y ((\underline{U}x \wedge \underline{U}y) \rightarrow \underline{U}x \cap y) \\ \forall x (\underline{U}x \vee \underline{U} \sim x). \end{array}$$

Wegen Fall 1 hat jede endlich erzeugte (= endliche) Substruktur von $(\mathcal{B}, E)$ eine solche Expansion, wegen 4.17 daher auch $(\mathcal{B}, E)$. □

Satz 18.14 (Stonescher Darstellungssatz) *"Boolesche Algebren sind Subalgebren von Potenzmengenalgebren". Sei $\mathcal{B}$ eine Boolesche Algebra und $\underline{U} := \{U \mid U$ Ultrafilter in $\mathcal{B}\}$. Dann gilt*

$$\pi : \mathcal{B} \overset{a}{\to} \mathcal{P}(\underline{U}),$$

wobei $\pi(b) := \{U \mid b \in U\}$.

Weiterhin gilt: $\mathrm{bd}(\pi)$ *ist die Basis einer Topologie $\sigma_{\mathcal{B}}$ auf $\underline{U}$; $(\underline{U}, \sigma_{\mathcal{B}})$ ist hausdorffsch, kompakt und $\pi : \mathcal{B} \cong \mathcal{C}(\underline{U}, \sigma_{\mathcal{B}})$.*

Beweis: π ist injektiv: Sei $a \neq b$, etwa nicht $a \leq b$; somit $a \cap \sim b \neq 0$. Da ede $\{a \cap \sim b\}$, gibt es einen Ultrafilter U mit $a \cap \sim b \in U$; also $a \in U$ und $\sim b \in U$ und somit $b \notin U$. Also $U \in \pi(a)$ und $U \notin \pi(b)$; insgesamt $\pi(a) \neq \pi(b)$.

π ist verträglich mit 1: $\pi(1) = \underline{U}$.

π ist verträglich mit $\cup$: $\pi(a \cup b) = \pi(a) \cup \pi(b)$, da

$$\begin{array}{lll} U \in \pi(a \cup b) & \text{gdw} & (a \cup b) \in U \\ & \text{gdw} & a \in U \text{ oder } b \in U \qquad \text{(vgl. Teil 5) von 18.12)} \\ & \text{gdw} & U \in \pi(a) \text{ oder } U \in \pi(b). \end{array}$$

π ist verträglich mit $\sim$: $\pi(\sim b) = \underline{U} \setminus \pi(b)$, da

$$\begin{array}{lll} U \in \pi(\sim b) & \text{gdw} & \sim b \in U \\ & \text{gdw} & b \notin U \qquad \text{(vgl. Teil 5) von 18.12)} \\ & \text{gdw} & U \in \underline{U} \setminus \pi(b). \end{array}$$

Lemma 18.15 *Ist $\mathcal{B}$ eine unendliche Boolesche Algebra mit* $\mathrm{At}(\mathcal{B}) \neq \emptyset$*, so ede $\{\sim a \mid a \in \mathrm{At}(\mathcal{B})\}$.*

Beweis: Wir nehmen an, daß $\sim a_0 \cap \ldots \cap \sim a_k = 0$ für geeignete $a_0, \ldots, a_k \in \mathrm{At}(\mathcal{B})$. Dann $a_0 \cup \ldots \cup a_k = 1$. Für jedes $b \in B$ gilt somit $b = b \cap 1 = (b \cap a_0) \cup \ldots \cup (b \cap a_k)$. Da $(b \cap a_i) \in \{0, a_i\}$, hätte B höchstens 2^{k+1} viele Elemente. □

Sei U ein Ultrafilter in $\mathcal{B}$. U ist ein *Hauptultrafilter*, wenn ein $a \in B$ existiert mit $U = F_a$ (wegen 18.12.4) ist a dann ein Atom). U ist ein *freier* Ultrafilter, wenn U kein Hauptultrafilter ist.

Satz 18.16 *Für eine Boolesche Algebra $\mathcal{B}$ sind äquivalent:*

1. *$\mathcal{B}$ ist endlich.*

2. *Jeder Ultrafilter in $\mathcal{B}$ ist ein Hauptultrafilter.*

3. *$\mathcal{B}$ hat nur endlich viele Ultrafilter.*

Beweis: $3 \Rightarrow 1$ ergibt sich aus dem Stoneschen Darstellungssatz

$1 \Rightarrow 2$ Sei $\mathcal{B}$ endlich und $U := \{b_0, \ldots, b_n\}$ ein Ultrafilter. Dann ist $U = F_{b_0 \cap \ldots \cap b_n}$

Zu $2 \Rightarrow 3$: Wir nehmen an, daß $\underline{U}$ unendlich ist. Wegen 2. ist dann auch $\mathrm{At}(\mathcal{B})$ und damit B unendlich. Nach dem vorangehenden Lemma hat $\{\sim a \mid a \in \mathrm{At}(\mathcal{B})\}$ die endliche Durchschnittseigenschaft; es gibt also einen Ultrafilter U mit $\{\sim a \mid a \in \mathrm{At}(\mathcal{B})\} \subseteq U$. Somit $a \notin U$ für alle Atome a; also ist U frei. $\square$

Der Satz

$$\neg 0 = 1 \rightarrow \exists x \, x \text{“Atom”}$$

ist äquivalent zu einem $\exists\forall$-Satz; er gilt in allen Potenzmengenalgebren, aber nicht in allen Booleschen Algebren (vgl. Teil 4) von 18.7). Dagegen gilt:

Satz 18.17 *Für einen $\forall\exists$-Satz sind äquivalent:*

1. *φ gilt in allen Booleschen Algebren.*

2. *φ gilt in allen Potenzmengenalgebren.*

3. *φ gilt in allen endlichen Potenzmengenalgebren.*

Beweis: Wir zeigen $3 \Rightarrow 1$. Sei also $\mathcal{B}$ eine beliebige BA. $\mathcal{B}$ ist die Vereinigung des gerichteten Systems, das aus seinen endlich erzeugten Substrukturen, nach Teil 15) von 18.7 somit die Vereinigung eines gerichteten Systems von endlichen Strukturen und daher nach Voraussetzung die Vereinigung eines gerichteten Systems von Modellen von φ. Somit ist $\mathcal{B} \models \varphi$, da φ ein $\forall\exists$-Satz ist (vgl. 7.6). $\square$

Mit Σ_{atlBA} bezeichnen wir ein Axiomensystem für atomlose BA, etwa

$$\Sigma_{\mathrm{atlBA}} \quad := \quad \Sigma_{\mathrm{BA}} \cup \{\forall x \exists y \exists z(\neg x = 0 \rightarrow (x = y \cup z \wedge \neg y = x \wedge \neg z = x))\}.$$

Satz 18.18 *Jede Boolesche Algebra $\mathcal{B}$ läßt sich in eine atomlose algebraisch einbetten. Daher $\Sigma_{\mathrm{atlBA}\forall} = \Sigma_{\mathrm{BA}\forall}$.*

Beweis: Wegen 4.17 genügt es zu zeigen, daß jede endlich erzeugte – also endliche – Subalgebra $\mathcal{A}$ von $\mathcal{B}$ sich in eine atomlose einbetten läßt. Sei also, o.B.d.A. wegen Teil 9) von 18.7, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ mit endlichem X. Ist $X = \emptyset$, so ist $\mathcal{A}$ trivial und somit atomlos. Sei nun $X = \{x_0, \ldots, x_n\}$ mit paarweise verschiedenen x_i. Wir wählen $a_0, \ldots, a_n$ paarweise disjunkte halboffene nichtleere Intervalle in $(\mathbb{Q}_+, <)$ mit $1 = a_0 \cup \ldots \cup a_n$, etwa $a_i := [i, i+1)$ für $i < n$ und $a_n := [n, \infty)$. Wegen Teil 16) von 18.7 sind $a_0, \ldots, a_n$ die Atome der Boolesche Algebra $[a_0, \ldots, a_n]^{\mathcal{I}}$, wobei $\mathcal{I} := \mathcal{I}((\mathbb{Q}_+, <))$und wegen Teil 12) von 18.7 gilt dann $\mathcal{P}(X) \cong [a_0, \ldots, a_n]^{\mathcal{I}}$ und damit $\mathcal{P}(X) \xrightarrow{a} \mathcal{I}$. □

Lemma 18.19 *Sind $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ atomlose Boolesche Algebren, so gilt $I = \emptyset$ oder $I : \mathcal{A} \cong_{\text{part}} \mathcal{B}$ für*

$$I \;:=\; \{p \in \operatorname{Part}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \mid \operatorname{df}(p) \text{ endlich erzeugte Substruktur von } \mathcal{A}\}.$$

Sind $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ nichttrivial, so $I : \mathcal{A} \cong_{\text{part}} \mathcal{B}$.

Beweis: Sei $I \neq \emptyset$. Dann sind $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ beide nichttrivial oder beide trivial; im letzteren Fall ist die Behauptung klar. Seien also $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ nichttrivial; dann ist $0^{\mathcal{A}}1^{\mathcal{A}} \mapsto 0^{\mathcal{B}}1^{\mathcal{B}} \in I$. Wir zeigen die Hin-Eigenschaft. Sei $p \in I$, $p : \mathcal{A}_0 \cong \mathcal{B}_0$ mit endlich erzeugten, also endlichen $\mathcal{A}_0$ und $\mathcal{B}_0$. $a_0, \ldots, a_n$ seien die paarweise verschiedenen Atome von $\mathcal{A}_0$ (somit $1 = a_0 \cup \ldots \cup a_n$); dann sind $p(a_0), \ldots, p(a_n)$ die Atome von $\mathcal{B}_0$. Sei nun $a \in A$. Für $j = 0, \ldots, n$ setzen wir $a'_j := a_j \cap a$ und $J := \{j \mid a'_j \neq a_j,\, a'_j \neq 0\}$. Für $j \in J$ wählen wir $b'_j \in B$ mit $b'_j \leq b_j$,$b'_j \neq b_j$ und $b'_j \neq 0$. $\mathrm{At}_1 := \{a_j \mid j \notin J\} \cup \{a'_j,\, a_j \cap \sim a'_j \mid j \in J\}$ bzw. $\mathrm{At}_2 := \{b_j \mid j \notin J\} \cup \{b'_j,\, b_j \cap \sim b'_j \mid j \in J\}$ ist die Menge der Atome der von At_1 erzeugten Subalgebra $\mathcal{A}_1$ von $\mathcal{A}$ bzw. die Menge der Atome der von At_2 erzeugten Subalgebra $\mathcal{B}_1$ von $\mathcal{B}$. Die “natürliche“ Bijektion zwischen At_1 und At_2 lässt sich zu einem Isomorphismus q von $\mathcal{A}_1$ auf $\mathcal{B}_1$ mit $q \supseteq p$ erweitern; wegen $a \in A_1$ ist a im Definitionsbereich von q. □

Mit 11.5, 12.14 und 18.18 erhalten wir aus dem Lemma

Satz 18.20
1. *Σ_{atlBA} erlaubt Quantorenelimination.*
2. *Σ_{atlBA} ist die Modellvervollständigung von Σ_{BA}; somit $\mathcal{E}_{\Sigma_{\text{BA}}} = \operatorname{Mod}(\Sigma_{\text{atlBA}})$.*
3. *Jede abzählbare atomlose Boolesche Algebra ist zu $\mathcal{I} := \mathcal{I}((\mathbb{Q}_+, <))$ isomorph.*

Eine Familie $(b_{i_1 \dots i_n})_{n \geq 0,\, i_1,\dots,i_n \in \{0,1\}}$ von paarweise verschiedenen Elementen in B ist ein *Baum* in der Booleschen Algebra $\mathcal{B}$, wenn

- $b_{i_1,\dots,i_n,0} \cap b_{i_1,\dots,i_n,1} = 0$;
- $b_{i_1,\dots,i_n,0} \cup b_{i_1,\dots,i_n,1} \leq b_{i_1,\dots,i_n}$.

Bemerkung 18.21 *Sei $\mathcal{B}$ eine Boolesche Algebra.*

1. *Enthält $\mathcal{B}$ ein Baum von Elementen, so gibt es mindestens so viele Ultrafilter, wie es Teilmengen von $\mathbb{N}$ gibt (also mindestens $2^{\aleph}$ viele).*
2. *Ist $b \in B$, $b \neq 0$, und liegt unterhalb von b kein Atom (d.h. wenn $a \in \mathrm{At}(\mathcal{B})$, so nicht $a \leq b$), dann gibt es einen Baum $(b_{i_1 \dots i_n})_{n \geq 0,\, i_1,\dots,i_n \in \{0,1\}}$ in $\mathcal{B}$ mit "Wurzel" b, d.h. $b_\emptyset = b$.*
3. *Eine nichttriviale Boolesche Algebra $\mathcal{B}$, die nicht atomar ist, enthält ein Baum von Elementen.*

Beweis: Zu 1: Sei $(b_{i_1 \dots i_n})_{n \geq 0,\, i_1,\dots,i_n \in \{0,1\}}$ ein Baum in $\mathcal{B}$. Für $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ hat

$$\{b_{f(0),\dots,f(n-1)} \mid n \geq 0\}$$

die endliche Durchschnittseigenschaft. Somit gibt es einen Ultrafilter U_f mit $\{b_{f(0),\dots,f(n-1)} \mid n \geq 0\} \subseteq U_f$. Wir zeigen noch, daß $U_f \neq U_g$ für $f, g : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ mit $f \neq g$. Hierzu sei $n := \min\{k \mid f(k) \neq g(k)\}$. Wegen $b_{f(0),\dots,f(n)} \in U_f$, $b_{g(0),\dots,g(n)} \in U_g$ und $b_{f(0),\dots,f(n)} \cap b_{g(0),\dots,g(n)} = 0$ erhalten wir $U_f \neq U_g$.

Zu 2: Wir wählen die $b_{i_1,\dots,i_n}$ durch Induktion über n: Wir setzen $b_\emptyset = b$; da unterhalb von b und damit unterhalb jedes $b_{i_1,\dots,i_n}$ kein Atom liegt, ist die Existenz von $b_{i_1,\dots,i_n,0}$ und $b_{i_1,\dots,i_n,1}$ aber unmittelbar klar.

Zu 3: Wir wenden 2. auf irgendein Element $b \in B$, $b \neq 0$, an, unter dem kein Atom liegt. $\square$

Folgerung 18.22 *Eine nichttriviale Boolesche Algebra, die nicht atomar ist, hat mindestens so viele Ultrafilter wie es Teilmengen von $\mathbb{N}$ gibt (also mindestens $2^{\aleph}$ viele).*

19 Das Übergehen von Typen

Sei $\Phi = \Phi(v_0, \ldots, v_{n-1}) = \Phi(\bar{v})$ ein n-Typ von $\Sigma \subseteq L_0^S$. Φ ist *frei*, wenn für alle $\psi \in L_n^S$ gilt:

Wenn Erf $\Sigma \cup \{\psi\}$, so $\Sigma \not\models \psi \to \bigwedge \Phi$;

d.h. zu jedem $\psi \in L_n^S$ mit Erf $\Sigma \cup \{\psi\}$ gibt es ein $\varphi \in \Phi$ mit Erf $\Sigma \cup \{\psi, \neg\varphi\}$. Ist Φ frei, so gibt es auch zu jedem $\psi \in L^S$, etwa $\psi = \psi(\bar{v}, \bar{y})$ mit Erf $\Sigma \cup \{\psi\}$ ein $\varphi \in \Phi$ mit Erf $\Sigma \cup \{\psi, \neg\varphi\}$: denn mit Erf $\Sigma \cup \{\psi\}$ gilt Erf $\Sigma \cup \{\exists \bar{y} \psi\}$ und daher existiert $\varphi \in \Phi$ mit Erf $\Sigma \cup \{\exists \bar{y}\psi, \neg\varphi\}$; dann ist auch Erf $\Sigma \cup \{\psi, \neg\varphi\}$.

Satz 19.1 *Sei Σ vollständig und Φ ein n-Typ von Σ. Wenn ein Modell von Σ existiert, das Φ übergeht, so ist Φ frei.*

Beweis: Sei $\mathcal{A}$ ein Modell von Σ, das Φ übergeht. Wenn $\psi \in L_n^S$ und Erf $\Sigma \cup \{\psi\}$, so Erf $\Sigma \cup \{\exists \bar{v} \psi\}$. Da Σ vollständig ist, gilt $\Sigma \models \exists \bar{v}\psi$. Somit gibt es $\bar{a} \in A$ mit $\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}]$. Da $\mathcal{A} \not\models \Phi[\bar{a}]$, gibt es $\varphi \in \Phi$ mit $\mathcal{A} \models \neg\varphi[\bar{a}]$; also Erf $\Sigma \cup \{\psi, \neg\varphi\}$. □

Satz 19.2 (Omitting Types Theorem) *Sei $\Sigma \subseteq L_0^S$ mit höchstens abzählbarem S. Ist Φ_r ein freier n_r-Typ von Σ für jedes $r \in \mathbb{N}$, so gibt es ein Modell von Σ, das alle Φ_r übergeht.*

Beweis: Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf einen 1-Typ. Sei also $\Phi(v_0)$ ein freier 1-Typ von Σ. Da $\mathrm{fr}(\Sigma) = \emptyset$, ist für jede Variable z auch $\Phi(z) := \Phi\frac{z}{v_0}$ "frei", d.h. zu jedem $\psi \in L^S$ mit Erf $\Sigma \cup \{\psi\}$ gibt es ein $\varphi \in \Phi(z)$ mit Erf $\Sigma \cup \{\psi, \neg\varphi\}$. Wir zeigen die folgende Zwischenbehauptung:

Es gibt Ψ mit $\Sigma \subseteq \Psi \subseteq L^S$ mit

1. Erf Ψ;
2. Für jede Variable y existiert ein $\psi(v_0) \in \Phi$ mit $\neg\psi(y) \in \Psi$;
3. Für alle $\chi \in L^s$: ($\chi \in \Psi$ oder $\neg\chi \in \Psi$);
4. Für alle Ausdrücke der Gestalt $\exists x \psi$ existiert eine Variable z mit $(\exists x\psi \to \psi\frac{z}{x}) \in \Psi$.

Hieraus folgt die Behauptung: Denn Ψ ist $\neg$-treu (vgl. 3) und $\exists$-treu (vgl. 4). Nach dem Satz von Henkin gilt daher für die Terminterpretation $\mathcal{I}^\Psi = (\mathcal{T}^\Psi, \beta^\Psi)$

$$\mathcal{I}^\Psi \models \Psi, \quad T^\Psi = \{\bar{t} \mid \bar{t} \in T^S\} \text{ und } \mathcal{I}^\Psi(t) = \bar{t}.$$

Somit ist $\mathcal{T}^\Psi$ ein Modell von Σ. $\mathcal{T}^\Psi$ übergeht Φ: Für $t \in T^S$ zeigen wir $\mathcal{T}^\Psi \not\models \Phi[\bar{t}]$. Wir wählen hierzu Variablen $u \notin \text{var}(t)$ und z (vgl. 4.) mit $(\exists u\, u = t \to z = t) \in \Psi$. Wegen $\Psi \models \exists u\, u = t$ gilt $\Psi \models z = t$, d.h. $\bar{z} = \bar{t}$. Nach 2. existiert $\psi \in \Phi$ mit $\neg\psi(z) \in \Psi$; somit $\mathcal{I}^\Psi \models \neg\psi(z)$, daher $\mathcal{T}^\Psi \models \neg\psi[\bar{z}]$, also $\mathcal{T}^\Psi \not\models \Phi[\bar{t}]$.

Nachweis der Zwischenbehauptung: Sei $(\chi_n)_{n\geq 0}$ eine Aufzählung von L^S und $(\psi_n)_{n\geq 0}$ eine Aufzählung von Φ. Wir definieren Ψ_n mit $\Psi_n = \Sigma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ und mit Erf Ψ_n durch Induktion über n: $\Psi_0 := \Sigma$.

Sei $\Psi_{3\cdot n}$ bereits definiert mit $\Psi_{3\cdot n} = \Sigma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_{3\cdot n}\}$ und Erf $\Psi_{3\cdot n}$. Da $\Phi(v_n)$ "frei" ist, existiert ein kleinstes k mit Erf $\Sigma \cup \{(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_{3\cdot n}), \neg\psi_k(v_n)\}$. Wir setzen

$$\Psi_{3\cdot n+1} \quad := \quad \Psi_{3\cdot n} \cup \{\neg\psi_k(v_n)\}.$$

Weiterhin sei

$$\Psi_{3\cdot n+2} \quad := \quad \begin{cases} \Psi_{3\cdot n+1} \cup \{\chi_n\} & \text{falls Erf } \Psi_{3\cdot n+1} \cup \{\chi_n\} \\ \Psi_{3\cdot n+1} \cup \{\neg\chi_n\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei y die Variable v_l mit kleinstem Index l, die in $\Psi_{3\cdot n+2} \cup \{\chi_n\}$ nicht frei vorkommt.

$$\Psi_{3\cdot n+3} \quad := \quad \begin{cases} \Psi_{3\cdot n+2} \cup \{\exists x\varphi \to \varphi\frac{y}{x}\} & \text{falls } \chi_n \text{ die "Existenzformel" } \exists x\varphi \text{ ist} \\ \Psi_{3\cdot n+2} & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\Psi := \bigcup_{n\geq 0} \Psi_n$ hat die gewünschten Eigenschaften. □

Ist C eine Teilmenge der Ordnung $(A, <)$, $C \subseteq A$, so ist C *kofinal*, wenn

$$\forall a \in A \exists c \in C\, a < c.$$

Bemerkungen und Beispiele 19.3 1) Die Menge der geraden Zahlen ist kofinal in $(\mathbb{N}, <)$. $\mathbb{N}$ ist kofinal in $(\mathbb{R}, <)$. $(0, 1)$ ist nicht kofinal in $(\mathbb{R}, <)$.

2) Jede endliche Teilmenge einer Ordnung ohne letztes Element ist nicht kofinal.

3) Sei $<\in S$. Für $\varphi(y,\bar{u}) \in L^S$ sei

$$\mathrm{Kof}_y\varphi(y,\bar{u}) \quad := \quad \forall z\exists y(z<y \wedge \varphi(y,\bar{u})),$$

wobei z eine neue Variable ist. Ist $\mathcal{A}$ eine S-Struktur, bei der $(A,<)$ eine Ordnung ist, und $\bar{b} \in A$, so gilt

$$\mathcal{A} \models \mathrm{Kof}_y\varphi(y,\bar{b}) \quad \text{gdw} \quad \{a \in A \mid \mathcal{A} \models \varphi(a,\bar{b})\} \text{ ist kofinal.}$$

4) Sei $<\in S$, $\mathcal{A}$ eine S-Struktur, bei der $(A,<)$ eine Ordnung ist. Wir setzen $\Sigma := D_e(\mathcal{A}) \cup \{c_a < c \mid a \in A\}$, wobei c und c_a (für $a \in A$) neue Konstanten sind. Für $\varphi = \varphi(c) \in L^{S\cup\{c_a \mid a\in A\}\cup\{c\}}$ gilt:

$$\mathrm{Erf}\ \Sigma \cup \{\varphi(c)\} \quad \text{gdw} \quad (\mathcal{A},(a)_{a\in A}) \models \mathrm{Kof}_y\varphi(y).$$

Beweis: $\Leftarrow$: Sei Σ_0 eine endliche Teilmenge von Σ und seien $c_{a_1},\ldots,c_{a_n},c$ die neuen Konstanten in $\Sigma_0 \cup \{\varphi(c)\}$. Gemäß Voraussetzung wählen wir $b \in A$ mit $a_1,\ldots,a_n < b$ und $\mathcal{A} \models \varphi(b)$. Dann gilt $(\mathcal{A},a_1,\ldots,a_n,b) \models \Sigma_0 \cup \{\varphi(c)\}$.

$\Rightarrow$: Sei nun $(\mathcal{B},(a)_{a\in A},c^B) \models \Sigma \cup \{\varphi(c)\}$ und o.B.d.A. $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$. Für alle $e \in A$ gilt dann $(\mathcal{B},(a)_{a\in A}) \models \exists y(c_e < y \wedge \varphi(y))$ und damit $(\mathcal{A},(a)_{a\in A}) \models \exists y(c_e < y \wedge \varphi(y))$. Also $(\mathcal{A},(a)_{a\in A}) \models \mathrm{Kof}_y\varphi(y)$. $\square$

Sei S eine Symbolmenge, welche $<$ und ein 1-stelliges Symbol U enthält. Die "Erweiterungsaxiome" Σ_E sind

$$\begin{aligned}\Sigma_E \quad := \quad \{\text{“}< \text{ ist Ordnung”}\} \cup \{\forall x\exists y x<y\} \cup \{\forall\bar{w}(&\mathrm{Kof}_y\exists x(Ux \wedge \varphi) \\ &\to \exists x(Ux \wedge \mathrm{Kof}_y\varphi)) \mid \varphi(x,y,\bar{w}) \in L^S\}.\end{aligned}$$

Bemerkung 19.4 *Sei $\mathcal{A}$ eine höchstens abzählbare S-Struktur mit $\mathcal{A} \models \Sigma_E$. Dann gibt es eine echte elementare Erweiterung $\mathcal{B}$ von $\mathcal{A}$ mit $U^A = U^B$.*

Beweis: Wiederum (vgl. Teil 4) von 19.3) sei $\Sigma := D_e(\mathcal{A}) \cup \{c_a < c \mid a \in A\}$ mit neuen Konstanten c und c_a (für $a \in A$) und $S_1 := S \cup \{c_a \mid a \in A\} \cup \{c\}$. Wir suchen ein Modell von Σ, das

$$\Phi \quad := \quad \{Ux\} \cup \{\neg x = c_a \mid a \in U^A\}$$

übergeht. Wegen des Omitting-Types-Theorems genügt es, zu zeigen, daß Φ ein freier 1-Typ von Σ ist. Sei hierzu $\chi(x) \in L^{S_1}$ und Erf $\Sigma \cup \{\chi(x)\}$, etwa

$\chi(x) = \chi(x, c, c_{b_1}, \dots, c_{b_n})$ mit $\chi(x, y, \bar{w}) \in L^S$. Ist Erf $\Sigma \cup \{\neg Ux, \chi(x)\}$, so sind wir fertig. Sonst ist Erf $\Sigma \cup \{Ux, \chi(x)\}$ und damit Erf $\Sigma \cup \{\exists x(Ux \wedge \chi(x))\}$. Wir setzen $\varphi(c) := \exists x(Ux \wedge \chi(x))$. Nach Teil 4) von 19.3 gilt dann

$$(\mathcal{A}, (a)_{a \in A}) \models \mathrm{Kof}_y \varphi(y),$$

d.h.

$$\mathcal{A} \models \mathrm{Kof}_y \exists x(Ux \wedge \chi(x, y, b_1, \dots, b_n))).$$

Wegen $\mathcal{A} \models \Sigma_E$ daher

$$\mathcal{A} \models \exists x(Ux \wedge \mathrm{Kof}_y \chi(x, y, b_1, \dots, b_n))).$$

Es gibt also $a_0 \in U^A$ mit

$$(\mathcal{A}, (a)_{a \in A}) \models \mathrm{Kof}_y \chi(c_{a_0}, y, c_{b_1}, \dots, c_{b_n}).$$

Wiederum nach Teil 4) somit Erf $\Sigma \cup \{\chi(c_{a_0}, c, c_{b_1}, \dots, c_{b_n})\}$, also

$$\mathrm{Erf}\ \Sigma \cup \{\neg\neg x = c_{a_0}, \chi(x, c, c_{b_1}, \dots, c_{b_n})\}.$$

$\square$

20 Abzählbare Modelle

Hier und im folgenden verstehen wir unter einem *vollständigen* n-Typ von Σ eine Teimenge Φ von Σ mit

$$\text{Erf } \Sigma \cup \Phi \quad \text{gdw} \quad \text{für alle } \psi \in L_n^S \ (\psi \in \Phi \text{ oder } \neg\psi \in \Phi).$$

Somit ist Φ ein vollständiger n-Typ von Σ, wenn es einen vollständigen n-Typ Ψ von Σ im Sinne von § 9 gibt mit

$$\Phi := \{\varphi \in L_n^S \mid \Psi \models \varphi\}.$$

Und wegen 9.1 ist Φ ein vollständiger n-Typ von Σ gdw es gibt $\mathcal{A} \models \Sigma$ und $\bar{a} \in A^n$ mit

$$\Phi = [\bar{a}]_{\mathcal{A}} \, (:= \{\varphi \in L_n^S \mid \mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}]\}.$$

Wir halten $\Sigma \subseteq L_0^S$ und $n \geq 1$ fest. Die Abbildung $^- : L_n^S \to L_n(\Sigma)$, die jedem $\varphi \in L_n^S$ seine Äquivalenzklasse in der Lindenbaumalgebra $\mathcal{L}_n(\Sigma)$ zuordnet, ist surjektiv. Für $\Phi \subseteq L_n^S$ setzen wir $\overline{\Phi} := \{\overline{\varphi} \mid \varphi \in \Phi\}$ und für $E \subseteq L_n(\Sigma)$ setzen wir $E^{-1} := \{\varphi \mid \overline{\varphi} \in E\}$.

Bemerkungen 20.1 1) $(\overline{\Phi})^{-1} \supseteq \Phi$ und $\overline{E^{-1}} = E$.

2) ede $\overline{\Phi}$ gdw Φ ist n-Typ von Σ.

Beweis: ede $\overline{\Phi}$

gdw $\Phi \neq \emptyset$ und Erf $\Sigma \cup \{(\varphi_0 \wedge \ldots \wedge \varphi_k)\}$ für alle $\varphi_0, \ldots, \varphi_k \in \Phi$

gdw $\Phi \neq \emptyset$ und Φ ist n-Typ von Σ.

□

3) Ist Φ ist ein vollständiger n-Typ von Σ, so ist $\overline{\Phi}$ ein Ultrafilter.

4) U ist ein Ultrafilter gdw U^{-1} ist ein vollständiger n-Typ von Σ.

Wegen Teil 3) und 4) entsprechen sich Ultrafilter in $\mathcal{L}_n(\Sigma)$ und vollständige n-Typen von Σ in eineindeutiger Weise. Dies motiviert die folgenden Begriffsbildungen:

Ist $\varphi \in L_n^S$, so ist φ ein *n-Atom* von Σ, wenn $\overline{\varphi}$ ein Atom in $\mathcal{L}_n(\Sigma)$ ist. Somit ist also φ ein n-Atom von Σ gdw ($\Sigma \models \varphi \to \psi$ oder $\Sigma \models \varphi \to \neg\psi$) für $\psi \in L_n^S$ gilt. Und ein vollständiger n-Typ Φ von Σ ist ein *Haupt-n-Typ* von Σ, wenn $\overline{\Phi}$ ein Hauptultrafilter ist, wenn also ein $\varphi \in L_n^S$ existiert mit $\Phi = \{\psi \in L_n^S \mid \Sigma \models \varphi \to \psi\}$. φ ist dann ein n-Atom. Ein vollständiger n-Typ von Σ, der kein Haupt-n-Typ ist, ist ein *freier* n-Typ von Σ.

Bemerkungen und Beispiele 20.2 1) Ist φ ein n–Atom von Σ, $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models \Sigma$ und $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}]$, $\mathcal{B} \models \varphi[\bar{b}]$, so $[\bar{a}]_{\mathcal{A}} = [\bar{b}]_{\mathcal{B}}$ (und somit $(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv (\mathcal{B}, \bar{b})$).

2) Ist $\varphi \in L_1^S$, so *definiert* φ *ein Element in* Σ, wenn $\Sigma \models \exists^{=1} v_0 \varphi(v_0)$. Ist dann $\mathcal{A} \models \Sigma$ und $\mathcal{A} \models \varphi[a]$, so sagen wir φ definiert a.

> Sei Σ vollständig und für $i = 0, \dots, n$ definiere $\varphi_i \in L_1^S$ ein Element in Σ. Dann ist $\chi(v_0, \dots, v_n) := \varphi(v_0) \wedge \ldots \wedge \varphi(v_n)$ ein $(n{+}1)$-Atom von Σ. Ist $\mathcal{A} \models \Sigma$ und $\mathcal{A} \models \varphi_i[a_i]$, so ist $[a_0, \dots, a_n]_{\mathcal{A}}$ also ein Haupttyp von Σ.

Beweis: Seien $\varphi_i, \chi, \mathcal{A}$ und die a_i wie in der Behauptung. Ist $\psi(v_0, \dots, v_n) \in L_{n+1}^S$ und $\mathcal{A} \models \psi[a_0, \dots, a_n]$, so $\mathcal{A} \models \forall v_0 \ldots \forall v_n(\chi \to \psi)$. Da Σ vollständig ist, gilt $\Sigma \models \forall v_0 \ldots \forall v_n(\chi \to \psi)$. Wenn $\mathcal{A} \models \neg\psi[a_0, \dots, a_n]$, so erhalten wir entsprechend $\Sigma \models \forall v_0 \ldots \forall v_n(\chi \to \neg\psi)$.

Σ hat höchstens 5 abzählbare Modelle bedeutet, daß Σ *bis auf Isomorphie* höchstens 5 abzählbare Modelle besitzt. Im folgenden sei

> *S höchstens abzählbar und Σ, $\Sigma \subseteq L_0^S$, eine vollständige Satzmenge, die (nur) unendliche Modelle besitzt.*

Wir erinnern an einige einfache Sachverhalte:

Bemerkungen 20.3 Σ hat höchstens $2^{\aleph_0}$ viele Typen und höchstens $2^{\aleph_0}$ viele abzählbare Modelle.

Beweis: Ein n-Typ von Σ ist eine Teilmenge von L_n^S und somit von L^S; nun ist $|P(L^S)| = 2^{\aleph_0}$.– Jede abzählbare S-Struktur ist bis auf Isomorphie "enthalten" in $\{\mathbb{N}\} \times P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{N}) \times \ldots \times P(\mathbb{N}^2) \times P(\mathbb{N}^2) \times \ldots$, eine Menge der Mächtigkeit $\leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$. $\square$

2) Jedes abzählbare Modell $\mathcal{A}$ von Σ erfüllt höchstens abzählbar viele vollständige n-Typen, nämlich $\{[\bar{a}]_{\mathcal{A}} \mid \bar{a} \in A^n\}$.

3) Jeder n-Typ von Σ wird in einem abzählbaren Modell von Σ erfüllt.

4) Hat Σ überabzählbar (bzw. $2^{\aleph_0}$) viele vollständige n-Typen, so hat Σ überabzählbar (bzw. $2^{\aleph_0}$) viele abzählbare Modelle.

5) Wenn $\pi : \mathcal{A} \overset{e}{\to} \mathcal{B}$ und $\bar{a} \in A$, so $[\bar{a}]_{\mathcal{A}} = [\pi(\bar{a}]_{\mathcal{B}}$. Insbesondere: Wenn $\mathcal{A} \overset{e}{\to} \mathcal{B}$, so erfüllt $\mathcal{B}$ jeden Typ, den $\mathcal{A}$ erfüllt.

Beispiele 20.4 1) $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ hat $2^{\aleph_0}$ viele vollständige Typen (vgl. Teil 8 von 8.2) und somit $2^{\aleph_0}$ viele abzählbare Modelle.

2) Für $S = \{<\}$ hat Σ_{DO}, das Axiomensystem für dichte Ordnungen, genau ein abzählbares Modell. Da für $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models \Sigma_{\mathrm{DO}}$ und $\bar{a} \in A^n$, $\bar{b} \in B^n$

$$(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv (\mathcal{B}, \bar{b}) \quad \text{gdw} \quad (a_i < a_j \Leftrightarrow b_i < b_j) \text{ für } i, j = 1, \ldots, n$$

gilt (vgl. 11.6), hat Σ_{DO} nur endlich viele n-Typen.

3) Für $S = \{<\} \cup \{c_n \mid n \geq 0\}$ sei $\Sigma := \Sigma_{\mathrm{DO}} \cup \{c_n < c_{n+1} \mid n \geq 0\}$. Da Σ_{DO} Quantorenelimination in $L^{\{<\}}$ und damit in L^S erlaubt, erlaubt auch Σ Quantorenelimination. Σ ist vollständig: Sind nämlich $(\mathcal{A}, (a_n)_{n \geq 0})$ und $(\mathcal{B}, (b_n)_{n \geq 0})$ Modelle von Σ, so gilt für $r \geq 0$ wegen 2) $(\mathcal{A}, a_0, \ldots, a_r) \equiv (\mathcal{B}, b_0, \ldots, b_r)$ und daher $(\mathcal{A}, (a_n)_{n \geq 0}) \equiv (\mathcal{B}, (b_n)_{n \geq 0})$. Σ hat genau drei abzählbare Modelle und zwar ein Modell, in dem die Folge (c_n) unbeschränkt ist, ein Modell, in dem sie beschränkt und konvergent ist und ein Modell, in dem sie beschränkt aber nicht konvergent ist. Besipiele sind

$$\mathcal{Q}_1 := (\mathbb{Q}, <, (n)_{n \geq 0}),\ \mathcal{Q}_2 := (\mathbb{Q}, <, (\frac{-1}{n+1})_{n \geq 0}),\ \mathcal{Q}_3 := (\mathbb{Q}, <, ((1 + \frac{1}{n+1})^{n+1})_{n \geq 0}).$$

Man verifiziert leicht, daß $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2 \stackrel{e}{\to} \mathcal{Q}_3$, $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_3 \stackrel{e}{\to} \mathcal{Q}_2$ und $\mathcal{Q}_2 \stackrel{e}{\not\to} \mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_3 \stackrel{e}{\not\to} \mathcal{Q}_1$.

Definition 20.5

- $\mathcal{A}$ ist ein *Primmodell* von Σ, wenn $\mathcal{A} \stackrel{e}{\to} \mathcal{B}$ für alle Modelle $\mathcal{B}$ von Σ gilt (oder gleichbedeutend, wenn $\mathcal{A} \stackrel{e}{\to} \mathcal{B}$ für alle abzählbaren Modelle $\mathcal{B}$ von Σ).
- $\mathcal{A}$ ist *prim*, wenn $\mathcal{A}$ ein Primmodell von $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ ist, wenn also $\mathcal{A} \stackrel{e}{\to} \mathcal{B}$ für alle $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ gilt.
- $\mathcal{A}$ ist ein *atomares* Modell von Σ, wenn für alle $n \geq 1$ jedes Tupel $\bar{a} \in A^n$ ein n-Atom von Σ erfüllt.
- $\mathcal{A}$ ist *atomar*, wenn es ein atomares Modell von $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ ist.

Bemerkungen und Beispiele 20.6 1) $\mathcal{Q}_1$ ist prim, $\mathcal{Q}_2$ und $\mathcal{Q}_3$ sind nicht prim.

2) Ist $\mathcal{A}$ ein *Primmodell* von Σ, so ist A abzählbar.

3) $(\mathbb{Q}, <)$ und $\mathcal{I}(\mathbb{Q}_+, <)$ sind prim.

4) Sind $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models \Sigma$ und ist $\mathcal{A}$ atomar, so hat $I_\equiv(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ die Hin Eigenschaft.

Beweis: Ist nämlich $(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv (\mathcal{B}, \bar{b})$ mit $\bar{a} \in A^n$, $\bar{b} \in B^n$ und $a \in A$, so erfüllt $[\bar{a}, a]_\mathcal{A}$ ein $(n+1)$–Atom φ von Σ. Wegen $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}, a]$, gilt $\mathcal{A} \models \exists v_n \varphi[\bar{a}]$ und damit $\mathcal{B} \models \exists v_n \varphi[\bar{b}]$; es gibt also $b \in B$ mit $\mathcal{B} \models \varphi[\bar{b}, b]$; somit $(\mathcal{A}, \bar{a}, a) \equiv (\mathcal{B}, \bar{b}, b)$ (vgl. Teil 1) von 21.2).

Satz 20.7 *Für ein abzählbares Modell $\mathcal{A}$ von Σ sind äquivalent:*

1. *$\mathcal{A}$ ist ein Primmodell von Σ.*
2. *$\mathcal{A}$ erfüllt nur Haupttypen von Σ (d.h. wenn $\bar{a} \in A$, so ist $[\bar{a}]_\mathcal{A}$ ein Haupttyp von Σ).*
3. *$\mathcal{A}$ ist atomares Modell von Σ.*
4. *$I_\equiv(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ hat die Hin Eigenschaft für alle $\mathcal{B} \models \Sigma$.*

Beweis: $1 \Rightarrow 2$: Sei $\bar{a} \in A^n$ und $\Phi := [\bar{a}]_\mathcal{A}$. Ist Φ kein Haupttyp, so gibt es nach dem Omitting Types Theorem ein Modell $\mathcal{B}$ von Σ, das Φ übergeht; dann ist $\mathcal{A}$ nicht elementar einbettbar in $\mathcal{B}$ (vgl. Teil 6) von 21.3) und somit wäre $\mathcal{A}$ nicht prim.

Die Äquivalenz von 2. und 3. ist klar und $3 \Rightarrow 4$ gilt aufgrund von Teil 3) der vorangehenden Bemerkung.

$4 \Rightarrow 1$: Sei $\mathcal{B}$ ein Modell von Σ. Da Σ vollständig ist, ist $\emptyset \in I_\equiv(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Dann folgt $\mathcal{A} \overset{e}{\to} \mathcal{B}$ aus Teil 6) von 9.2. $\square$

Folgerung 20.8 *Σ hat höchstens ein Primmodell.*

Beweis: Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Primmodelle von Σ, so ist $\emptyset \in I_\equiv(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ und nach dem vorangehenden Satz haben $I_\equiv(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ und $I_\equiv(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ die Hin Eigenschaft; somit $I_\equiv(\mathcal{A}, \mathcal{B}) : \mathcal{A} \cong_{\text{part}} \mathcal{B}$. Da A und B abzählbar sind, gilt $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$. $\square$

Folgerung 20.9 *Ist $\mathcal{A}$ prim und $\mathcal{A}' \preceq \mathcal{A}$, so $\mathcal{A}' \cong \mathcal{A}$.*

Beweis: Da mit $\mathcal{A}$ auch $\mathcal{A}'$ nur Haupttypen erfüllt, ist auch A' prim, somit $\mathcal{A}' \cong \mathcal{A}$ nach der vorangehenden Folgerung.

Folgerung 20.10 *Ist $\mathcal{A}$ prim und $\bar{a} \in A$, so ist auch $(\mathcal{A}, \bar{a})$ prim.*

Beweis: Wir weisen 4. in 21.7 nach. Sei $(\mathcal{B}, \bar{b}) \equiv (\mathcal{A}, \bar{a})$. Dann $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ und somit hat $I_{\equiv}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ die Hin Eigenschaft. Wegen $\bar{a} \mapsto \bar{b} \in I_{\equiv}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, hat auch $I_{\equiv}((\mathcal{A}, \bar{a}), (\mathcal{B}, \bar{b}))$ die Hin Eigenschaft. □

Folgerung 20.11 *Ist A abzählbar und ist jedes $a \in A$ in $\mathcal{A}$ definierbar, so ist $\mathcal{A}$ prim.*

Beweis: Wegen Teil 2) von 19.2 ist $\mathcal{A}$ atomar, also prim nach Satz 21.7. □

Satz 20.12 *Σ hat ein Primmodell gdw für jedes $n \geq 1$ ist die n-te Lindenbaumalgebra $\mathcal{L}_n(\Sigma)$ atomar.*

Beweis: $\Rightarrow$: Sei $\mathcal{A}$ ein Primmodell von Σ, $\psi \in L_n^S$ und $\overline{\psi} \neq 0$ in $\mathcal{L}_n(\Sigma)$. Dann ist Erf $\Sigma \cup \{\exists \bar{v} \psi\}$. Da Σ vollständig ist, also $\Sigma \models \exists \bar{v} \psi$; daher $\mathcal{A} \models \exists \bar{v} \psi$, etwa $\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}]$. Da $\mathcal{A}$ atomar ist, erfüllt $\bar{a}$ ein n–Atom φ. Dann ist $\overline{\varphi}$ ein Atom in $\mathcal{L}_n(\Sigma)$ mit $\overline{\varphi} \leq \overline{\psi}$.

$\Leftarrow$: Wir zeigen, daß es ein abzählbares Modell von Σ gibt, daß atomar ist. Sei $n \geq 1$ und $\mathcal{L}_n(\Sigma)$ unendlich. Nach Voraussetzung ist $\mathrm{At}(\mathcal{L}_n(\Sigma)) \neq \emptyset$, wegen Teil 13) von 18.7 gilt daher ede $\{\overline{\neg\varphi} \mid \varphi \ n\text{–Atom von } \Sigma\}$. Dann ist $\Phi_n := \{\neg\varphi \mid \varphi \ n\text{–Atom von } \Sigma\}$ ein n–Typ von Σ. Φ_n ist frei: Sei nämlich $\chi \in L_n^S$ mit Erf $\Sigma \cup \{\chi\}$, also $\overline{\chi} \neq 0$. Nach Voraussetzung gibt es ein n–Atom φ_0 mit $\overline{\varphi_0} \leq \overline{\chi}$. Somit Erf $\Sigma \cup \{\chi, \neg\neg\varphi_0\}$ und $\neg\varphi_0 \in \Phi_n$.

Nach dem Omitting Types Theorem gibt es ein abzählbares Modell $\mathcal{A}$ von Σ mit

$$\forall n \geq 1 (\text{wenn } \mathcal{L}_n(\Sigma) \text{ unendlich ist, so übergeht } \mathcal{A} \text{ den Typ } \Phi_n).$$

Dann ist $\mathcal{A}$ atomar (und damit prim): Sei $\bar{a} \in A^n$. Ist $\mathcal{L}_n(\Sigma)$ endlich, so ist jeder Ultrafilter in $\mathcal{L}_n(\Sigma)$ ein Hauptultrafilter, also auch $[\bar{a}]_{\mathcal{A}}$. Somit erfüllt $\bar{a}$ ein Atom. Ist $\mathcal{L}_n(\Sigma)$ unendlich, so übergeht $\mathcal{A}$ den Typ Φ_n; somit erfüllt $\bar{a}$ ein Atom. □

Folgerung 20.13 *Hat Σ kein Primmodell, so hat es $2^{\aleph_0}$ viele abzählbare Modelle.*

Beweis: Nach dem vorangehenden Satz gibt es ein n, sodass $\mathcal{L}_n(\Sigma)$ nicht atomar ist; somit gibt es $2^{\aleph_0}$ viele Ultrafilter in $\mathcal{L}_n(\Sigma)$ (vgl. 18.22), Σ hat also $2^{\aleph_0}$ viele vollständige n–Typen und daher $2^{\aleph_0}$ viele abzählbare Modelle. $\square$

Beispiel 20.14 $S := \{R_n \mid n \geq 0\}$, $\mathcal{A} := (P(\mathbb{N}), (R_n^A)_{n\geq 0})$ mit

$$R_n^A X \quad \text{gdw} \quad n \in X.$$

Für $\Sigma := \mathrm{Th}(\mathcal{A})$ gilt: $\mathcal{L}_1(\Sigma)$ ist atomlos und somit hat Σ kein Primmodell.

Beweis: Für $k \in \mathbb{N}$ sei $S_k := \{R_n \mid n < k\}$. Dann gilt $\pi_k : \mathcal{A}|S_k \cong \mathcal{A}|S_k$, wobei

$$\pi_k(X) := \begin{cases} X \cup \{k\} & \text{falls } k \notin X \\ X \setminus \{k\} & \text{falls } k \in X. \end{cases}$$

Sei $\varphi \in L_1^S$, $\overline{\varphi} \neq 0$. Wir zeigen, dass φ kein 1–Atom ist. Wegen $\overline{\varphi} \neq 0$ gibt es $X \in P(\mathbb{N})$ mit $\mathcal{A} \models \varphi[X]$. Wir wählen k mit $\varphi \in L_1^{S_k}$. Dann gilt $\mathcal{A} \models \varphi[\pi_k(X)]$ und somit weder $\Sigma \models \varphi \to R_k v_0$ noch $\Sigma \models \varphi \to \neg R_k v_0$. $\square$

Satz 20.15 *Äquivalent sind:*

1. *Σ hat genau ein abzählbares Modell (Σ ist $\aleph_0$-*kategorisch*).*

2. *$\forall n \geq 1$ $\mathcal{L}_n(\Sigma)$ ist endlich, d.h., für jedes $n \geq 1$ gibt es in L_n^S nur endlich viele nicht in Σ paarweise äquivalente Ausdrücke.*

Beweis: 2 $\Rightarrow$ 1: Wenn $\forall n \geq 1$ $\mathcal{L}_n(\Sigma)$ endlich ist, so ist jeder Ultrafilter in $\mathcal{L}_n(\Sigma)$ ein Hauptultrafilter; jedes Modell von Σ erfüllt somit nur Haupttypen, d.h. ist atomar. Jedes abzählbare Modell ist somit prim; dann folgt 1. aus 21.8.

1 $\Rightarrow$ 2: Ist ein $\mathcal{L}_n(\Sigma)$ unendlich, so gibt es einen freien n–Typ Φ von Σ. Dann gibt es abzählbare Modelle $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, die Φ übergehen bzw. erfüllen, im Widerspruch zu 1. $\square$

Definition 20.16 $\mathcal{B}$ ist *ω-universales* Modell von Σ, wenn sich jedes abzählbare Modell von Σ in $\mathcal{B}$ elementar einbetten läßt.

$\mathcal{B}$ ist *ω–universal*, wenn sich jedes elementar äquivalente abzählbare Modell in $\mathcal{B}$ elementar einbetten läßt, wenn also $\mathcal{B}$ ein ω–universales Modell von $\mathrm{Th}(\mathcal{B})$ ist.

Somit sind $\mathcal{Q}_2$ und $\mathcal{Q}_3$ ω-universal, nicht jedoch $\mathcal{Q}_1$.

Satz 20.17 *Für ein Modell $\mathcal{B}$ von Σ sind äquivalent:*

1. *$\mathcal{B}$ ist ω-homogen und ω-universal.*
2. *$\mathcal{B}$ ist ω-homogen und erfüllt alle (vollständigen) Typen für alle $n \geq 1$.*
3. *$\mathcal{B}$ ist ω-saturiert.*
4. *Für alle Modelle $\mathcal{A}$ von Σ hat $I_{\equiv}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ die Hin Eigenschaft.*

Beweis: 1 $\Rightarrow$ 2: Ist Φ ein Typ von Σ, so gibt es ein abzählbares Modell $\mathcal{A}$ von Σ, das Φ erfüllt. Da $\mathcal{A} \overset{e}{\to} \mathcal{B}$ wegen 1, erfüllt auch $\mathcal{B}$ den Typ Φ.

Für 2 $\Rightarrow$ 3 vgl. Teil 5) von 9.11 und für 3 $\Rightarrow$ 4 vgl. Teil 4) von 9.2.

4 $\Rightarrow$ 1: Es gilt $I_{\equiv}(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ wegen 4, also ist $\mathcal{B}$ ω-homogen. $\mathcal{B}$ ist auch ω-universal: Ist nämlich $\mathcal{A}$ ein abzählbares Modell von Σ, so ist $I_{\equiv}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \neq \emptyset$ und hat die Hin Eigenschaft; also $\mathcal{A} \overset{e}{\to} \mathcal{B}$. $\square$

Folgerung 20.18 *Σ hat höchstens ein abzählbares ω-homogenes und ω-universales Modell.*

Beweis: Je zwei ω-saturierte elementar äquivalente Modelle sind partiell isomorph (vgl. 9.4), also isomorph, wenn sie beide abzählbar sind. $\square$

Satz 20.19 *Äquivalent sind:*

1. *Σ hat ein abzählbares ω-saturiertes Modell.*
2. *Für alle $n \geq 1$ hat Σ höchstens abzählbar viele vollständige n-Typen.*
3. *Für alle $n \geq 1$ hat $\mathcal{L}_n(\Sigma)$ höchstens abzählbar viele Ultrafilter.*

Beweis: Die Äquivalenz von 2. und 3. gilt wegen 21.1.

1 $\Rightarrow$ 2 gilt, da in einem abzählbaren ω-saturierten Modell alle Typen erfüllt werden.

2 $\Rightarrow$ 1: Wegen 2. gibt es ein abzählbares Modell $\mathcal{A}$ von Σ, das für alle $n \geq 1$ alle vollständige n-Typen erfüllt. Nach Teil 8 von 9.11 gibt es eine abzählbare elementare Erweiterung $\mathcal{B}$ von $\mathcal{A}$, die ω-homogen ist. Dann ist aber $\mathcal{B}$ ω-saturiert wegen 2 $\Leftrightarrow$ 3 in 21.17. $\square$

Folgerung 20.20 *Hat Σ ein abzählbares ω-saturiertes Modell, so auch ein Primmodell.*

Beweis: Hat nämlich Σ ein abzählbares ω-saturiertes Modell, so haben – wie gerade bewiesen – die Booleschen Algebren $\mathcal{L}_n(\Sigma)$ höchstens abzählbar viele Ultrafilter, sind also nach 18.22 atomar. Die Behauptung folgt dann aus 21.12. $\square$

Beispiele 20.21 1) $\mathcal{Q}_2$ ist nicht ω-homogen: Denn $(\mathcal{Q}_2, 5) \equiv (\mathcal{Q}_2, 0)$, aber es gibt kein $b \in \mathbb{Q}$ mit $(\mathcal{Q}_2, 5, 1) \equiv (\mathcal{Q}_2, 0, b)$.

2) $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ ist ein Primmodell von $\mathrm{Th}((\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1))$; $\mathrm{Th}((\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1))$ hat aber kein abzählbares ω-saturiertes Modell, da sie überabzählbar viele vollständige 1-Typen besitzt (vgl. Teil 8) von 8.2).

3) Σ_{dkO} hat ein Primmodell und ein abzählbares ω-saturiertes Modell. Σ_{dkO} hat $2^{\aleph_0}$ viele abzählbare Modelle.

Beweis: Wir wissen, daß für Modelle $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ von Σ_{dkO} und $\bar{a} \in A^r$, $\bar{b} \in B^r$:

$$(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv (\mathcal{B}, \bar{b}) \quad \text{iff} \quad \forall i, j((a_i < a_j \Leftrightarrow b_i < b_j) \text{ und } d(a_i, a_j) = d(b_i, b_j)).$$

Hieraus ergeben sich unmittelbar:

(a) Σ_{dkO} hat höchstens abzählbar viele vollständige r-Typen und somit ein abzählbares ω-saturiertes Modell.

(b) $(\mathbb{Z}, <)$ ist ein Primmodell von Σ_{dkO}.

(c) Wenn $\mathcal{A} \models \Sigma_{\mathrm{dkO}}$ und wenn $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ Ordnungen sind und $\pi : \mathcal{B}_1 \xrightarrow{a} \mathcal{B}_2$, so $\tilde{\pi} : \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}_1 \xrightarrow{e} \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}_2$, wobei $\tilde{\pi}((a, b)) := (a, \pi(b))$.

Ist $\mathcal{C}$ ein Modell von Σ_{dkO}, so definieren wir auf C eine Relation durch

$$c \sim c' \quad \text{iff} \quad d(c, c') < \infty.$$

$\sim$ ist eine Äquivalenzrelation, $\bar{c}$ sei die Äquivalenzklasse von c und $C/\sim$ die Menge der Äquivalenzklassen. Auf $C/\sim$ sei $<$ definiert durch:

$$\bar{b} < \bar{c} \quad \text{iff} \quad b <^C c.$$

Dann

(d) Wenn $\mathcal{C} \models \Sigma_{\mathrm{dkO}}$, so $\mathcal{C} \cong (\mathbb{Z},<) \cdot C/\sim$.

(e) Wenn $\mathcal{C}, \mathcal{D} \models \Sigma_{\mathrm{dkO}}$ und $\pi : \mathcal{C} \cong \mathcal{D}$, so $\bar{\pi} : \mathcal{C}/\sim \cong \mathcal{D}/\sim$, wobei $\bar{\pi}(\bar{c}) := \overline{\pi(c)}$.

Wir zeigen:

(f) $\mathcal{Z} \cdot \mathcal{Q}$ ist ein ω-saturiertes Modell von Σ_{dkO}.

Ist nämlich $\mathcal{A}$ ein abzählbares Modell von Σ_{dkO}, so: $\mathcal{A}/\sim \overset{a}{\to} \mathcal{Q}$. Wegen (c) gilt $\mathcal{Z} \cdot \mathcal{A}/\sim \overset{e}{\to} \mathcal{Z} \cdot \mathcal{Q}$ und wegen (d): $\mathcal{A} \cong \mathcal{Z} \cdot \mathcal{A}/\sim$. Insgesamt $\mathcal{A} \overset{e}{\to} \mathcal{Z} \cdot \mathcal{Q}$.

Schließlich zeigen wir:

(g) Σ_{dkO} hat überabzählbar viele abzählbare Modelle.

Beweis: Für $\alpha < \beta < \aleph_1$ gilt $\mathcal{Z} \cdot (\alpha,<) \not\cong \mathcal{Z} \cdot (\beta,<)$. Wäre nämlich $\pi : \mathcal{Z} \cdot (\alpha,<) \cong \mathcal{Z} \cdot (\beta,<)$, so $\bar{\pi} : (\alpha,<) \cong (\beta,<)$ und damit $\alpha = \beta$.

21 Abzählbare Modelle

Hier und im folgenden verstehen wir unter einem *vollständigen* n-Typ von Σ eine Teimenge Φ von Σ mit

$$\text{Erf } \Sigma \cup \Phi \quad \text{gdw} \quad \text{für alle } \psi \in L_n^S \ (\psi \in \Phi \text{ oder } \neg\psi \in \Phi).$$

Somit ist Φ ein vollständiger n-Typ von Σ, wenn es einen vollständigen n-Typ Ψ von Σ im Sinne von § 9 gibt mit

$$\Phi := \{\varphi \in L_n^S \mid \Psi \models \varphi\}.$$

Und wegen 9.1 ist Φ ein vollständiger n-Typ von Σ gdw es gibt $\mathcal{A} \models \Sigma$ und $\bar{a} \in A^n$ mit

$$\Phi = [\bar{a}]_{\mathcal{A}} \, (:= \{\varphi \in L_n^S \mid \mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}]\}.$$

Wir halten $\Sigma \subseteq L_0^S$ und $n \geq 1$ fest. Die Abbildung $^- : L_n^S \to L_n(\Sigma)$, die jedem $\varphi \in L_n^S$ seine Äquivalenzklasse in der Lindenbaumalgebra $\mathcal{L}_n(\Sigma)$ zuordnet, ist surjektiv. Für $\Phi \subseteq L_n^S$ setzen wir $\overline{\Phi} := \{\overline{\varphi} \mid \varphi \in \Phi\}$ und für $E \subseteq L_n(\Sigma)$ setzen wir $E^{-1} := \{\varphi \mid \overline{\varphi} \in E\}$.

Bemerkungen 21.1 1) $(\overline{\Phi})^{-1} \supseteq \Phi$ und $\overline{E^{-1}} = E$.

2) ede $\overline{\Phi}$ gdw Φ ist n-Typ von Σ.

Beweis: ede $\overline{\Phi}$
gdw $\Phi \neq \emptyset$ und Erf $\Sigma \cup \{(\varphi_0 \wedge \ldots \wedge \varphi_k)\}$ für alle $\varphi_0, \ldots, \varphi_k \in \Phi$
gdw $\Phi \neq \emptyset$ und Φ ist n-Typ von Σ.

□

3) Ist Φ ist ein vollständiger n-Typ von Σ, so ist $\overline{\Phi}$ ein Ultrafilter.

4) U ist ein Ultrafilter gdw U^{-1} ist ein vollständiger n-Typ von Σ.

Wegen Teil 3) und 4) entsprechen sich Ultrafilter in $\mathcal{L}_n(\Sigma)$ und vollständige n-Typen von Σ in eineindeutiger Weise. Dies motiviert die folgenden Begriffsbildungen:

Ist $\varphi \in L_n^S$, so ist φ ein *n-Atom* von Σ, wenn $\overline{\varphi}$ ein Atom in $\mathcal{L}_n(\Sigma)$ ist. Somit ist also φ ein n-Atom von Σ gdw ($\Sigma \models \varphi \to \psi$ oder $\Sigma \models \varphi \to \neg\psi$) für $\psi \in L_n^S$ gilt. Und ein vollständiger n-Typ Φ von Σ ist ein *Haupt-n-Typ* von Σ, wenn $\overline{\Phi}$ ein Hauptultrafilter ist, wenn also ein $\varphi \in L_n^S$ existiert mit $\Phi = \{\psi \in L_n^S \mid \Sigma \models \varphi \to \psi\}$. φ ist dann ein n-Atom. Ein vollständiger n-Typ von Σ, der kein Haupt-n-Typ ist, ist ein *freier* n-Typ von Σ.

Bemerkungen und Beispiele 21.2 1) Ist φ ein n–Atom von Σ, $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models \Sigma$ und $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}]$, $\mathcal{B} \models \varphi[\bar{b}]$, so $[\bar{a}]_{\mathcal{A}} = [\bar{b}]_{\mathcal{B}}$ (und somit $(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv (\mathcal{B}, \bar{b})$).

2) Ist $\varphi \in L_1^S$, so *definiert* φ *ein Element in* Σ, wenn $\Sigma \models \exists^{=1} v_0 \varphi(v_0)$. Ist dann $\mathcal{A} \models \Sigma$ und $\mathcal{A} \models \varphi[a]$, so sagen wir φ definiert a.

> Sei Σ vollständig und für $i = 0, \ldots, n$ definiere $\varphi_i \in L_1^S$ ein Element in Σ. Dann ist $\chi(v_0, \ldots, v_n) := \varphi(v_0) \wedge \ldots \wedge \varphi(v_n)$ ein $(n{+}1)$-Atom von Σ. Ist $\mathcal{A} \models \Sigma$ und $\mathcal{A} \models \varphi_i[a_i]$, so ist $[a_0, \ldots, a_n]_{\mathcal{A}}$ also ein Haupttyp von Σ.

Beweis: Seien $\varphi_i, \chi, \mathcal{A}$ und die a_i wie in der Behauptung. Ist $\psi(v_0, \ldots, v_n) \in L_{n+1}^S$ und $\mathcal{A} \models \psi[a_0, \ldots, a_n]$, so $\mathcal{A} \models \forall v_0 \ldots \forall v_n (\chi \to \psi)$. Da Σ vollständig ist, gilt $\Sigma \models \forall v_0 \ldots \forall v_n (\chi \to \psi)$. Wenn $\mathcal{A} \models \neg\psi[a_0, \ldots, a_n]$, so erhalten wir entsprechend $\Sigma \models \forall v_0 \ldots \forall v_n (\chi \to \neg\psi)$.

Σ hat höchstens 5 abzählbare Modelle bedeutet, daß Σ *bis auf Isomorphie* höchstens 5 abzählbare Modelle besitzt. Im folgenden sei

> *S höchstens abzählbar und Σ, $\Sigma \subseteq L_0^S$, eine vollständige Satzmenge, die (nur) unendliche Modelle besitzt.*

Wir erinnern an einige einfache Sachverhalte:

Bemerkungen 21.3 Σ hat höchstens $2^{\aleph_0}$ viele Typen und höchstens $2^{\aleph_0}$ viele abzählbare Modelle.

Beweis: Ein n-Typ von Σ ist eine Teilmenge von L_n^S und somit von L^S; nun ist $|P(L^S)| = 2^{\aleph_0}$.– Jede abzählbare S-Struktur ist bis auf Isomorphie "enthalten" in $\{\mathbb{N}\} \times P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{N}) \times \ldots \times P(\mathbb{N}^2) \times P(\mathbb{N}^2) \times \ldots$, eine Menge der Mächtigkeit $\leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$. $\square$

2) Jedes abzählbare Modell $\mathcal{A}$ von Σ erfüllt höchstens abzählbar viele vollständige n-Typen, nämlich $\{[\bar{a}]_{\mathcal{A}} \mid \bar{a} \in A^n\}$.

3) Jeder n-Typ von Σ wird in einem abzählbaren Modell von Σ erfüllt.

4) Hat Σ überabzählbar (bzw. $2^{\aleph_0}$) viele vollständige n-Typen, so hat Σ überabzählbar (bzw. $2^{\aleph_0}$) viele abzählbare Modelle.

5) Wenn $\pi : \mathcal{A} \overset{e}{\to} \mathcal{B}$ und $\bar{a} \in A$, so $[\bar{a}]_{\mathcal{A}} = [\pi(\bar{a}]_{\mathcal{B}}$. Insbesondere: Wenn $\mathcal{A} \overset{e}{\to} \mathcal{B}$, so erfüllt $\mathcal{B}$ jeden Typ, den $\mathcal{A}$ erfüllt.

Beispiele 21.4 1) $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ hat $2^{\aleph_0}$ viele vollständige Typen (vgl. Teil 8 von 8.2) und somit $2^{\aleph_0}$ viele abzählbare Modelle.

2) Für $S = \{<\}$ hat Σ_{DO}, das Axiomensystem für dichte Ordnungen, genau ein abzählbares Modell. Da für $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models \Sigma_{\mathrm{DO}}$ und $\bar{a} \in A^n$, $\bar{b} \in B^n$

$$(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv (\mathcal{B}, \bar{b}) \quad \text{gdw} \quad (a_i < a_j \Leftrightarrow b_i < b_j) \text{ für } i, j = 1, \ldots, n$$

gilt (vgl. 11.6), hat Σ_{DO} nur endlich viele n-Typen.

3) Für $S = \{<\} \cup \{c_n \mid n \geq 0\}$ sei $\Sigma := \Sigma_{\mathrm{DO}} \cup \{c_n < c_{n+1} \mid n \geq 0\}$. Da Σ_{DO} Quantorenelimination in $L^{\{<\}}$ und damit in L^S erlaubt, erlaubt auch Σ Quantorenelimination. Σ ist vollständig: Sind nämlich $(\mathcal{A}, (a_n)_{n\geq 0})$ und $(\mathcal{B}, (b_n)_{n\geq 0})$ Modelle von Σ, so gilt für $r \geq 0$ wegen 2) $(\mathcal{A}, a_0, \ldots, a_r) \equiv (\mathcal{B}, b_0, \ldots, b_r)$ und daher $(\mathcal{A}, (a_n)_{n\geq 0}) \equiv (\mathcal{B}, (b_n)_{n\geq 0})$. Σ hat genau drei abzählbare Modelle und zwar ein Modell, in dem die Folge (c_n) unbeschränkt ist, ein Modell, in dem sie beschränkt und konvergent ist und ein Modell, in dem sie beschränkt aber nicht konvergent ist. Besipiele sind

$$\mathcal{Q}_1 := (\mathbb{Q}, <, (n)_{n\geq 0}),\ \mathcal{Q}_2 := (\mathbb{Q}, <, (\frac{-1}{n+1})_{n\geq 0}),\ \mathcal{Q}_3 := (\mathbb{Q}, <, ((1+\frac{1}{n+1})^{n+1})_{n\geq 0}).$$

Man verifiziert leicht, daß $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2 \overset{e}{\to} \mathcal{Q}_3$, $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_3 \overset{e}{\to} \mathcal{Q}_2$ und $\mathcal{Q}_2 \overset{e}{\not\to} \mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_3 \overset{e}{\not\to} \mathcal{Q}_1$.

Definition 21.5

- $\mathcal{A}$ ist ein *Primmodell* von Σ, wenn $\mathcal{A} \overset{e}{\to} \mathcal{B}$ für alle Modelle $\mathcal{B}$ von Σ gilt (oder gleichbedeutend, wenn $\mathcal{A} \overset{e}{\to} \mathcal{B}$ für alle abzählbaren Modelle $\mathcal{B}$ von Σ).
- $\mathcal{A}$ ist *prim*, wenn $\mathcal{A}$ ein Primmodell von $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ ist, wenn also $\mathcal{A} \overset{e}{\to} \mathcal{B}$ für alle $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ gilt.
- $\mathcal{A}$ ist ein *atomares* Modell von Σ, wenn für alle $n \geq 1$ jedes Tupel $\bar{a} \in A^n$ ein n-Atom von Σ erfüllt.
- $\mathcal{A}$ ist *atomar*, wenn es ein atomares Modell von $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ ist.

Bemerkungen und Beispiele 21.6 1) $\mathcal{Q}_1$ ist prim, $\mathcal{Q}_2$ und $\mathcal{Q}_3$ sind nicht prim.

2) Ist $\mathcal{A}$ ein *Primmodell* von Σ, so ist A abzählbar.

3) $(\mathbb{Q}, <)$ und $\mathcal{I}(\mathbb{Q}_+, <)$ sind prim.

4) Sind $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models \Sigma$ und ist $\mathcal{A}$ atomar, so hat $I_{\equiv}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ die Hin Eigenschaft.

Beweis: Ist nämlich $(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv (\mathcal{B}, \bar{b})$ mit $\bar{a} \in A^n$, $\bar{b} \in B^n$ und $a \in A$, so erfüllt $[\bar{a}, a]_{\mathcal{A}}$ ein $(n+1)$–Atom φ von Σ. Wegen $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}, a]$, gilt $\mathcal{A} \models \exists v_n \varphi[\bar{a}]$ und damit $\mathcal{B} \models \exists v_n \varphi[\bar{b}]$; es gibt also $b \in B$ mit $\mathcal{B} \models \varphi[\bar{b}, b]$; somit $(\mathcal{A}, \bar{a}, a) \equiv (\mathcal{B}, \bar{b}, b)$ (vgl. Teil 1) von 21.2).

Satz 21.7 *Für ein abzählbares Modell $\mathcal{A}$ von Σ sind äquivalent:*

1. *$\mathcal{A}$ ist ein Primmodell von Σ.*
2. *$\mathcal{A}$ erfüllt nur Haupttypen von Σ (d.h. wenn $\bar{a} \in A$, so ist $[\bar{a}]_{\mathcal{A}}$ ein Haupttyp von Σ).*
3. *$\mathcal{A}$ ist atomares Modell von Σ.*
4. *$I_{\equiv}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ hat die Hin Eigenschaft für alle $\mathcal{B} \models \Sigma$.*

Beweis: $1 \Rightarrow 2$: Sei $\bar{a} \in A^n$ und $\Phi := [\bar{a}]_{\mathcal{A}}$. Ist Φ kein Haupttyp, so gibt es nach dem Omitting Types Theorem ein Modell $\mathcal{B}$ von Σ, das Φ übergeht; dann ist $\mathcal{A}$ nicht elementar einbettbar in $\mathcal{B}$ (vgl. Teil 6) von 21.3) und somit wäre $\mathcal{A}$ nicht prim.

Die Äquivalenz von 2. und 3. ist klar und $3 \Rightarrow 4$ gilt aufgrund von Teil 3) der vorangehenden Bemerkung.

$4 \Rightarrow 1$: Sei $\mathcal{B}$ ein Modell von Σ. Da Σ vollständig ist, ist $\emptyset \in I_{\equiv}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Dann folgt $\mathcal{A} \stackrel{e}{\to} \mathcal{B}$ aus Teil 6) von 9.2. □

Folgerung 21.8 *Σ hat höchstens ein Primmodell.*

Beweis: Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Primmodelle von Σ, so ist $\emptyset \in I_{\equiv}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ und nach dem vorangehenden Satz haben $I_{\equiv}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ und $I_{\equiv}(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ die Hin Eigenschaft; somit $I_{\equiv}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) : \mathcal{A} \cong_{\text{part}} \mathcal{B}$. Da A und B abzählbar sind, gilt $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$. □

Folgerung 21.9 *Ist $\mathcal{A}$ prim und $\mathcal{A}' \preceq \mathcal{A}$, so $\mathcal{A}' \cong \mathcal{A}$.*

Beweis: Da mit $\mathcal{A}$ auch $\mathcal{A}'$ nur Haupttypen erfüllt, ist auch A' prim, somit $\mathcal{A}' \cong \mathcal{A}$ nach der vorangehenden Folgerung.

Folgerung 21.10 *Ist $\mathcal{A}$ prim und $\bar{a} \in A$, so ist auch $(\mathcal{A}, \bar{a})$ prim.*

Beweis: Wir weisen 4. in 21.7 nach. Sei $(\mathcal{B}, \bar{b}) \equiv (\mathcal{A}, \bar{a})$. Dann $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ und somit hat $I_{\equiv}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ die Hin Eigenschaft. Wegen $\bar{a} \mapsto \bar{b} \in I_{\equiv}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, hat auch $I_{\equiv}((\mathcal{A}, \bar{a}), (\mathcal{B}, \bar{b}))$ die Hin Eigenschaft. □

Folgerung 21.11 *Ist A abzählbar und ist jedes $a \in A$ in $\mathcal{A}$ definierbar, so ist $\mathcal{A}$ prim.*

Beweis: Wegen Teil 2) von 19.2 ist $\mathcal{A}$ atomar, also prim nach Satz 21.7. □

Satz 21.12 *Σ hat ein Primmodell gdw für jedes $n \geq 1$ ist die n-te Lindenbaumalgebra $\mathcal{L}_n(\Sigma)$ atomar.*

Beweis: $\Rightarrow$: Sei $\mathcal{A}$ ein Primmodell von Σ, $\psi \in L_n^S$ und $\overline{\psi} \neq 0$ in $\mathcal{L}_n(\Sigma)$. Dann ist Erf $\Sigma \cup \{\exists \bar{v} \psi\}$. Da Σ vollständig ist, also $\Sigma \models \exists \bar{v} \psi$; daher $\mathcal{A} \models \exists \bar{v} \psi$, etwa $\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}]$. Da $\mathcal{A}$ atomar ist, erfüllt $\bar{a}$ ein n–Atom φ. Dann ist $\overline{\varphi}$ ein Atom in $\mathcal{L}_n(\Sigma)$ mit $\overline{\varphi} \leq \overline{\psi}$.

$\Leftarrow$: Wir zeigen, daß es ein abzählbares Modell von Σ gibt, daß atomar ist. Sei $n \geq 1$ und $\mathcal{L}_n(\Sigma)$ unendlich. Nach Voraussetzung ist $\mathrm{At}(\mathcal{L}_n(\Sigma)) \neq \emptyset$, wegen Teil 13) von 18.7 gilt daher ede $\{\overline{\neg\varphi} \mid \varphi\ n\text{–Atom von } \Sigma\}$. Dann ist $\Phi_n := \{\neg\varphi \mid \varphi\ n\text{–Atom von } \Sigma\}$ ein n–Typ von Σ. Φ_n ist frei: Sei nämlich $\chi \in L_n^S$ mit Erf $\Sigma \cup \{\chi\}$, also $\overline{\chi} \neq 0$. Nach Voraussetzung gibt es ein n–Atom φ_0 mit $\overline{\varphi_0} \leq \overline{\chi}$. Somit Erf $\Sigma \cup \{\chi, \neg\neg\varphi_0\}$ und $\neg\varphi_0 \in \Phi_n$.

Nach dem Omitting Types Theorem gibt es ein abzählbares Modell $\mathcal{A}$ von Σ mit

$$\forall n \geq 1 (\text{wenn } \mathcal{L}_n(\Sigma) \text{ unendlich ist, so übergeht } \mathcal{A} \text{ den Typ } \Phi_n).$$

Dann ist $\mathcal{A}$ atomar (und damit prim): Sei $\bar{a} \in A^n$. Ist $\mathcal{L}_n(\Sigma)$ endlich, so ist jeder Ultrafilter in $\mathcal{L}_n(\Sigma)$ ein Hauptultrafilter, also auch $[\bar{a}]_{\mathcal{A}}$. Somit erfüllt $\bar{a}$ ein Atom. Ist $\mathcal{L}_n(\Sigma)$ unendlich, so übergeht $\mathcal{A}$ den Typ Φ_n; somit erfüllt $\bar{a}$ ein Atom. □

Folgerung 21.13 *Hat Σ kein Primmodell, so hat es $2^{\aleph_0}$ viele abzählbare Modelle.*

Beweis: Nach dem vorangehenden Satz gibt es ein n, sodass $\mathcal{L}_n(\Sigma)$ nicht atomar ist; somit gibt es $2^{\aleph_0}$ viele Ultrafilter in $\mathcal{L}_n(\Sigma)$ (vgl. 18.22), Σ hat also $2^{\aleph_0}$ viele vollständige n–Typen und daher $2^{\aleph_0}$ viele abzählbare Modelle. $\square$

Beispiel 21.14 $S := \{R_n \mid n \geq 0\}$, $\mathcal{A} := (P(\mathbb{N}), (R_n^A)_{n\geq 0})$ mit

$$R_n^A X \quad \text{gdw} \quad n \in X.$$

Für $\Sigma := \mathrm{Th}(\mathcal{A})$ gilt: $\mathcal{L}_1(\Sigma)$ ist atomlos und somit hat Σ kein Primmodell.

Beweis: Für $k \in \mathbb{N}$ sei $S_k := \{R_n \mid n < k\}$. Dann gilt $\pi_k : \mathcal{A}|S_k \cong \mathcal{A}|S_k$, wobei

$$\pi_k(X) := \begin{cases} X \cup \{k\} & \text{falls } k \notin X \\ X \setminus \{k\} & \text{falls } k \in X. \end{cases}$$

Sei $\varphi \in L_1^S$, $\overline{\varphi} \neq 0$. Wir zeigen, dass φ kein 1–Atom ist. Wegen $\overline{\varphi} \neq 0$ gibt es $X \in P(\mathbb{N})$ mit $\mathcal{A} \models \varphi[X]$. Wir wählen k mit $\varphi \in L_1^{S_k}$. Dann gilt $\mathcal{A} \models \varphi[\pi_k(X)]$ und somit weder $\Sigma \models \varphi \to R_k v_0$ noch $\Sigma \models \varphi \to \neg R_k v_0$. $\square$

Satz 21.15 *Äquivalent sind:*

1. *Σ hat genau ein abzählbares Modell (Σ ist $\aleph_0$-kategorisch).*
2. *$\forall n \geq 1$ $\mathcal{L}_n(\Sigma)$ ist endlich, d.h., für jedes $n \geq 1$ gibt es in L_n^S nur endlich viele nicht in Σ paarweise äquivalente Ausdrücke.*

Beweis: 2 $\Rightarrow$ 1: Wenn $\forall n \geq 1$ $\mathcal{L}_n(\Sigma)$ endlich ist, so ist jeder Ultrafilter in $\mathcal{L}_n(\Sigma)$ ein Hauptultrafilter; jedes Modell von Σ erfüllt somit nur Haupttypen, d.h. ist atomar. Jedes abzählbare Modell ist somit prim; dann folgt 1. aus 21.8.

1 $\Rightarrow$ 2: Ist ein $\mathcal{L}_n(\Sigma)$ unendlich, so gibt es einen freien n–Typ Φ von Σ. Dann gibt es abzählbare Modelle $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, die Φ übergehen bzw. erfüllen, im Widerspruch zu 1. $\square$

Definition 21.16 $\mathcal{B}$ ist *ω-universales* Modell von Σ, wenn sich jedes abzählbare Modell von Σ in $\mathcal{B}$ elementar einbetten läßt.

$\mathcal{B}$ ist *ω–universal*, wenn sich jedes elementar äquivalente abzählbare Modell in $\mathcal{B}$ elementar einbetten läßt, wenn also $\mathcal{B}$ ein ω–universales Modell von $\mathrm{Th}(\mathcal{B})$ ist.

Somit sind $\mathcal{Q}_2$ und $\mathcal{Q}_3$ ω-universal, nicht jedoch $\mathcal{Q}_1$.

Satz 21.17 *Für ein Modell $\mathcal{B}$ von Σ sind äquivalent:*

1. *$\mathcal{B}$ ist ω-homogen und ω-universal.*
2. *$\mathcal{B}$ ist ω-homogen und erfüllt alle (vollständigen) Typen für alle $n \geq 1$.*
3. *$\mathcal{B}$ ist ω-saturiert.*
4. *Für alle Modelle $\mathcal{A}$ von Σ hat $I_{\equiv}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ die Hin Eigenschaft.*

Beweis: 1 $\Rightarrow$ 2: Ist Φ ein Typ von Σ, so gibt es ein abzählbares Modell $\mathcal{A}$ von Σ, das Φ erfüllt. Da $\mathcal{A} \overset{e}{\to} \mathcal{B}$ wegen 1, erfüllt auch $\mathcal{B}$ den Typ Φ.

Für 2 $\Rightarrow$ 3 vgl. Teil 5) von 9.11 und für 3 $\Rightarrow$ 4 vgl. Teil 4) von 9.2.

4 $\Rightarrow$ 1: Es gilt $I_{\equiv}(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ wegen 4, also ist $\mathcal{B}$ ω-homogen. $\mathcal{B}$ ist auch ω-universal: Ist nämlich $\mathcal{A}$ ein abzählbares Modell von Σ, so ist $I_{\equiv}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \neq \emptyset$ und hat die Hin Eigenschaft; also $\mathcal{A} \overset{e}{\to} \mathcal{B}$. $\square$

Folgerung 21.18 *Σ hat höchstens ein abzählbares ω-homogenes und ω-universales Modell.*

Beweis: Je zwei ω-saturierte elementar äquivalente Modelle sind partiell isomorph (vgl. 9.4), also isomorph, wenn sie beide abzählbar sind. $\square$

Satz 21.19 *Äquivalent sind:*

1. *Σ hat ein abzählbares ω-saturiertes Modell.*
2. *Für alle $n \geq 1$ hat Σ höchstens abzählbar viele vollständige n-Typen.*
3. *Für alle $n \geq 1$ hat $\mathcal{L}_n(\Sigma)$ höchstens abzählbar viele Ultrafilter.*

Beweis: Die Äquivalenz von 2. und 3. gilt wegen 21.1.

1 $\Rightarrow$ 2 gilt, da in einem abzählbaren ω-saturierten Modell alle Typen erfüllt werden.

2 $\Rightarrow$ 1: Wegen 2. gibt es ein abzählbares Modell $\mathcal{A}$ von Σ, das für alle $n \geq 1$ alle vollständige n-Typen erfüllt. Nach Teil 8 von 9.11 gibt es eine abzählbare elementare Erweiterung $\mathcal{B}$ von $\mathcal{A}$, die ω-homogen ist. Dann ist aber $\mathcal{B}$ ω-saturiert wegen 2 $\Leftrightarrow$ 3 in 21.17. $\square$

Folgerung 21.20 *Hat Σ ein abzählbares ω-saturiertes Modell, so auch ein Primmodell.*

Beweis: Hat nämlich Σ ein abzählbares ω-saturiertes Modell, so haben – wie gerade bewiesen – die Booleschen Algebren $\mathcal{L}_n(\Sigma)$ höchstens abzählbar viele Ultrafilter, sind also nach 18.22 atomar. Die Behauptung folgt dann aus 21.12. $\square$

Beispiele 21.21 1) $\mathcal{Q}_2$ ist nicht ω-homogen: Denn $(\mathcal{Q}_2, 5) \equiv (\mathcal{Q}_2, 0)$, aber es gibt kein $b \in \mathbb{Q}$ mit $(\mathcal{Q}_2, 5, 1) \equiv (\mathcal{Q}_2, 0, b)$.

2) $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ ist ein Primmodell von $\mathrm{Th}((\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1))$; $\mathrm{Th}((\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1))$ hat aber kein abzählbares ω-saturiertes Modell, da sie überabzählbar viele vollständige 1-Typen besitzt (vgl. Teil 8) von 8.2).

3) Σ_{dkO} hat ein Primmodell und ein abzählbares ω-saturiertes Modell. Σ_{dkO} hat $2^{\aleph_0}$ viele abzählbare Modelle.

Beweis: Wir wissen, daß für Modelle $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ von Σ_{dkO} und $\bar{a} \in A^r$, $\bar{b} \in B^r$:

$$(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv (\mathcal{B}, \bar{b}) \quad \text{iff} \quad \forall i, j((a_i < a_j \Leftrightarrow b_i < b_j) \text{ und } d(a_i, a_j) = d(b_i, b_j)).$$

Hieraus ergeben sich unmittelbar:

(a) Σ_{dkO} hat höchstens abzählbar viele vollständige r-Typen und somit ein abzählbares ω-saturiertes Modell.

(b) $(\mathbb{Z}, <)$ ist ein Primmodell von Σ_{dkO}.

(c) Wenn $\mathcal{A} \models \Sigma_{\mathrm{dkO}}$ und wenn $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ Ordnungen sind und $\pi : \mathcal{B}_1 \xrightarrow{a} \mathcal{B}_2$, so $\tilde{\pi} : \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}_1 \xrightarrow{e} \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}_2$, wobei $\tilde{\pi}((a, b)) := (a, \pi(b))$.

Ist $\mathcal{C}$ ein Modell von Σ_{dkO}, so definieren wir auf C eine Relation durch

$$c \sim c' \quad \text{iff} \quad d(c, c') < \infty.$$

$\sim$ ist eine Äquivalenzrelation, $\bar{c}$ sei die Äquivalenzklasse von c und $C/\sim$ die Menge der Äquivalenzklassen. Auf $C/\sim$ sei $<$ definiert durch:

$$\bar{b} < \bar{c} \quad \text{iff} \quad b <^C c.$$

Dann

(d) Wenn $\mathcal{C} \models \Sigma_{\mathrm{dkO}}$, so $\mathcal{C} \cong (\mathbb{Z}, <) \cdot C/\sim$.

(e) Wenn $\mathcal{C}, \mathcal{D} \models \Sigma_{\mathrm{dkO}}$ und $\pi : \mathcal{C} \cong \mathcal{D}$, so $\bar{\pi} : \mathcal{C}/\sim \cong \mathcal{D}/\sim$, wobei $\bar{\pi}(\bar{c}) := \overline{\pi(c)}$.

Wir zeigen:

(f) $\mathcal{Z} \cdot \mathcal{Q}$ ist ein ω-saturiertes Modell von Σ_{dkO}.

Ist nämlich $\mathcal{A}$ ein abzählbares Modell von Σ_{dkO}, so: $\mathcal{A}/\sim \xrightarrow{a} \mathcal{Q}$. Wegen (c) gilt $\mathcal{Z} \cdot \mathcal{A}/\sim \xrightarrow{e} \mathcal{Z} \cdot \mathcal{Q}$ und wegen (d): $\mathcal{A} \cong \mathcal{Z} \cdot \mathcal{A}/\sim$. Insgesamt $\mathcal{A} \xrightarrow{e} \mathcal{Z} \cdot \mathcal{Q}$.

Schließlich zeigen wir:

(g) Σ_{dkO} hat überabzählbar viele abzählbare Modelle.

Beweis: Für $\alpha < \beta < \aleph_1$ gilt $\mathcal{Z} \cdot (\alpha, <) \not\cong \mathcal{Z} \cdot (\beta, <)$. Wäre nämlich $\pi : \mathcal{Z} \cdot (\alpha, <) \cong \mathcal{Z} \cdot (\beta, <)$, so $\bar{\pi} : (\alpha, <) \cong (\beta, <)$ und damit $\alpha = \beta$.

22 Ununterscheidbare Elemente

Lemma 22.1 *Sind $\bar{a}, \in A^n$, $\bar{b} \in B^n$ mit $[\bar{a}]_{\mathcal{A}} = [\bar{b}]_{\mathcal{B}}$, so gilt für jedes $t \in T_n^S$*

$$[t^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_n]]_{\mathcal{A}} = [t^{\mathcal{B}}[b_1, \ldots, b_n]]_{\mathcal{B}}.$$

Beweis: Für $\varphi \in L_1^S$ und $\bar{e} \in C^n$ gilt: $\mathcal{C} \models \varphi[t^{\mathcal{C}}[\bar{e}]]$ gdw $\mathcal{C} \models \varphi\frac{t}{v_0}[\bar{e}]$. Da nach Voraussetzung $\mathcal{A} \models \varphi\frac{t}{v_0}[\bar{a}]$ gdw $\mathcal{B} \models \varphi\frac{t}{v_0}[\bar{b}]$, erhalten wir $\mathcal{A} \models \varphi[t^{\mathcal{A}}[\bar{a}]]$ gdw $\mathcal{B} \models \varphi[t^{\mathcal{B}}[\bar{b}]]$. $\square$

Für eine Menge P und $n \geq 1$ sei

$$[P]^n \quad := \quad \{X \subseteq P \mid |X| = n\}$$

die Menge der n-elementigen Teilmengen von P. Ist eine Ordnung auf P gegeben, so entsprechen die n-elementigen Teilmengen von P in eineindeutiger Weise den aufsteigenden Ketten in P der Länge n, $[P]^n = \{\{\bar{a}\} \mid \bar{a} \in A^n,\ a_1 < \ldots < a_n\}$.

Satz 22.2 (Satz von Ramsey) *Sei P unendlich, $n \geq 1$ und $[P]^n \subseteq C_1 \cup C_2$. Dann gibt es ein unendliches Q, $Q \subseteq P$, und ($[Q]^n \subseteq C_1$ oder $[Q]^n \subseteq C_2$).*

Beweis: Wir führen eine Induktion über n. Für $n = 1$ ist die Behauptung trivial. Sei nun $n \geq 1$. Wir definieren durch Induktion für $i = 0, 1, \ldots$ Mengen Q_i und Elemente a_i, die u.a. die folgenden Eigenschaften haben:

- $P = Q_0 \supseteq Q_1 \supseteq \ldots$ und alle Q_i sind unendlich;
- $\forall i \geq 0 : a_i \in (Q_i \setminus Q_{i+1})$.

Für $i = 0$ setzen wir $Q_0 := P$ und wählen ein beliebiges $a_0 \in Q_0$. Seien Q_i, a_i bereits definiert, sei Q_i unendlich und $a_i \in Q_i$. Wir setzen für $s = 1, 2$

$$C_s^i \quad := \quad \{X \in [Q_i \setminus \{a_i\}]^{n-1} \mid X \cup \{a_i\} \in C_s\}.$$

Somit $[Q_i \setminus \{a_i\}]^{n-1} \subseteq C_1^i \cup C_2^i$. Nach dem Satz von Ramsey für $n-1$ gibt es ein unendliches Q_{i+1}, $Q_{i+1} \subseteq Q_i \setminus \{a_i\}$, mit

$$(1) \qquad [Q_{i+1}]^{n-1} \subseteq C_1^i \quad \text{oder} \quad [Q_{i+1}]^{n-1} \subseteq C_2^i.$$

Wir wählen $a_{i+1} \in Q_{i+1}$ beliebig. Wegen (1) gibt es $s \in \{1,2\}$ und $i_0 < i_1 < \ldots$ mit

$$(2) \qquad \forall j \geq 0\ [Q_{i_j+1}]^{n-1} \subseteq C_s^{i_j}.$$

Wir setzen $Q := \{a_{i_0}, a_{i_1}, \ldots\}$ und zeigen $[Q]^n \subseteq C_s$: Ist nämlich $Y \in [Q]^n$ und a_{i_j} das Element in Y mit kleinstem Index, so $X := Y \setminus \{a_{i_j}\} \in [Q_{i_j+1}]^{n-1}$; wegen (2) daher $X \in C_s^{i_j}$, also $Y = X \cup \{a_{i_j}\} \in C_s$ nach Definition von $C_s^{i_j}$. □

Definition 22.3 $(I,<)$ sei eine Ordunung.

- Ist I unendlich und $\mathcal{A}$ eine S-Struktur mit $I \subseteq A$, so ist $(I,<)$ *ununterscheidbar* in $\mathcal{A}$, wenn für alle $n \geq 1$ und je zwei aufsteigende Folgen $i_1 < \ldots < i_n$ und $j_1 < \ldots < j_n$ in $(I,<)$:

  $$[i_1, \ldots, i_n]_{\mathcal{A}} = [j_1, \ldots, j_n]_{\mathcal{A}},$$

  d.h. wenn

  $$\text{für alle } \varphi \in L_n^S\ (\mathcal{A} \models \varphi[\bar{i}] \text{ gdw } \mathcal{A} \models \varphi[\bar{j}]),$$

  oder gleichbedeutend, $(\mathcal{A}, \bar{i}) \equiv (\mathcal{A}, \bar{j})$.

- Für $\bar{i}, \bar{j} \in I^n$ bedeute $\bar{i} \diamond \bar{j}$, dass $\bar{i}$ und $\bar{j}$ gleich geordnet sind, d.h.

  $$i_1 \ldots i_n \diamond j_1 \ldots j_n \quad \text{gdw} \quad \forall r, s\, (i_r < i_s \Leftrightarrow j_r < j_s).$$

Lemma 22.4 *Sei* $(I,<)$ ununterscheidbar *in* $\mathcal{A}$. *Dann gilt für* $i_1, \ldots, i_n$ *und* $j_1, \ldots, j_n$ *in* $(I,<)$ *mit* $i_1, \ldots, i_n \diamond j_1, \ldots, j_n$*:*

$$[i_1, \ldots, i_n]_{\mathcal{A}} = [j_1, \ldots, j_n]_{\mathcal{A}}.$$

Beweis: Sei etwa $n = 4$ und $i_4 < i_1 = i_3 < i_2$. Dann ist $j_4 < j_1 = j_3 < j_2$. Für $\varphi \in L_4^S$ gilt dann

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \varphi[i_1, i_2, i_3, i_4] \quad & \text{gdw} \quad \mathcal{A} \models \varphi\frac{v_1 v_2 v_1 v_0}{v_0 v_1 v_2 v_3}[i_4, i_1, i_2] \\ & \text{gdw} \quad \mathcal{A} \models \varphi\frac{v_1 v_2 v_1 v_0}{v_0 v_1 v_2 v_3}[j_4, j_1, j_2] \quad \text{(nach Vor.)} \\ & \text{gdw} \quad \mathcal{A} \models \varphi[j_1, j_2, j_3, j_4]. \end{aligned}$$

□

Ist S eine Symbolmenge und X eine Menge, so sei $S(X) := S \cup \{c_x \mid x \in X\}$ mit neuen Konstanten c_x. Ist $\mathcal{A}$ eine S-Struktur und $X \subseteq A$, so bezeichne $\mathcal{A}(X)$ die $S(X)$-Struktur mit S-Redukt $\mathcal{A}$ und $c_x^{\mathcal{A}} := x$.

Satz 22.5 *Σ habe ein unendliches Modell und $(I,<)$ sei eine unendliche Ordnung. Dann gibt es ein Modell $\mathcal{A}$ von Σ, in dem $(I,<)$ ununterscheidbar ist. Ist $\varphi \in L_1^S$ und existiert ein Modell von Σ, in dem φ von unendlich vielen Elementen erfüllt wird, so kann $\mathcal{A}$ so gewählt werden, dass $I \subseteq \varphi^{\mathcal{A}}$ $(:= \{a \in A \mid \mathcal{A} \models \varphi[a]\})$.*

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass Erf Σ' für die folgende Menge Σ' von $S(I)$-Sätzen:

$$\begin{aligned}\Sigma' \quad := \quad & \Sigma \cup \{\neg c_i = c_j \mid i,j \in I \; i \neq j\} \cup \{\varphi(c_i) \mid i \in I\} \\ & \cup \{\psi(c_{i_1},\ldots,c_{i_n}) \leftrightarrow \psi(c_{j_1},\ldots,c_{j_n}) \mid n \geq 1, \\ & \qquad \psi \in L_n^S,\, i_1 < \ldots < i_n, j_1 < \ldots < j_n \text{ in } (I,<)\}.\end{aligned}$$

Sei Σ_0 eine endliche Teilmenge von Σ'. Wähle $n \geq 1$ und $\psi_1,\ldots,\psi_l \in L_n^S$, so dass in Σ_0 nur Äquivalenzen für $\psi_1,\ldots,\psi_l$ vorkommen.

Sei $\mathcal{B}$ ein Modell von Σ mit unendlichem $P := \varphi^{\mathcal{B}}$. Wir wählen irgendeine Ordnung auf P. Zu P und ψ_1 finden wir mit dem Satz von Ramsey eine unendliche Teilmenge $Q_1 \subseteq P$, so dass je zwei aufsteigende Folgen in Q_1 beide ψ_1 oder beide $\neg\psi_1$ erfüllen. Zu Q_1 und ψ_2 finden wir mit dem Satz von Ramsey eine unendliche Teilmenge $Q_2 \subseteq Q_1$, so dass je zwei aufsteigende Folgen in Q_2 beide ψ_2 oder beide $\neg\psi_2$ erfüllen. Schließlich finden wir mit dem Satz von Ramsey zu Q_{l-1} und ψ_l eine unendliche Teilmenge $Q_l \subseteq Q_{l-1}$, so dass je zwei aufsteigende Folgen in Q_l beide ψ_l oder beide $\neg\psi_l$ erfüllen.

Seien $c_{i_1},\ldots,c_{i_k}$ die neuen Konstanten in Σ_0 und etwa $i_1 < \ldots < i_k$. Wegen $P \supseteq Q_1 \supseteq \ldots \supseteq Q_l$ gilt $(\mathcal{B}, b_1,\ldots,b_k) \models \Sigma_0$ für eine beliebige aufsteigende Folge $b_1,\ldots,b_k$ in Q_l. □

Lemma 22.6 *Sei $(I,<)$ eine Wohlordnung, $J \subseteq I$ höchstens abzählbar und $n \geq 1$. Die 2-stellige Relation R auf $(I \setminus J)^n$ sei gegeben durch*

$$i_1 \ldots i_n R k_1 \ldots k_n \quad gdw \quad \forall l \geq 1 \forall \bar{j} \in J^l \; \bar{j}\bar{i} \diamond \bar{j}\bar{k}.$$

Dann:

1. *R ist eine Äquivalenzrelation mit höchstens abzählbar vielen Äquivalenzklassen.*

2. *Ist $(I,<)$ ununterscheidbar in $\mathcal{A}$ und sind $\bar{i}, \bar{k} \in (I \setminus J)^n$ und $\bar{i}R\bar{k}$, so $[\bar{i}]_{\mathcal{A}(J)} = [\bar{k}]_{\mathcal{A}(J)}$.*

Beweis: Zu 1: Zunächst bemerken wir, daß

$$i_1 \dots i_n R k_1 \dots k_n \quad \text{gdw} \quad \forall j \in J\, j\bar{i} \diamond j\bar{k}.$$

Da $(I,<)$ eine Wohlordnung ist, ist für $i \in I \setminus J$ das Element $i^* \in J \cup \{\infty\}$ wohldefiniert, wobei

$$i^* \;:=\; \begin{cases} \min\{j \in J \mid i < j\} & \text{falls } \exists j \in J\, i < j \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nun ist klar, dass für $\bar{i}, \bar{k} \in (I \setminus J)^n$

$$i_1 \dots i_n R k_1 \dots k_n \quad \text{gdw} \quad (i_1 \dots i_n \diamond k_1 \dots k_n \;\text{ und } i_r^* = k_r^* \text{ für } r = 1, \dots, n).$$

Hieraus ergibt sich, dass es $\leq \max\{|J|, \omega\}$ viele Äquivalenzklassen gibt.

Zu 2: Da in jeder Formel aus $L^{S(J)}$ nur endlich viele Konstante c_j mit $j \in J$ vorkommen, müssen wir für $\bar{j} \in J$ zeigen, dass $[\bar{i}]_{(\mathcal{A},\bar{j})} = [\bar{k}]_{(\mathcal{A},\bar{j})}$. Da $\bar{i}R\bar{k}$, gilt $\bar{j}\bar{i} \diamond \bar{j}\bar{k}$, also $(\mathcal{A}, \bar{j}\bar{i}) \equiv (\mathcal{A}, \bar{j}\bar{k})$ nach 22.4, also $[\bar{i}]_{(\mathcal{A},\bar{j})} = [\bar{k}]_{(\mathcal{A},\bar{j})}$. $\square$

Lemma 22.7 *Die Wohlordnung $(I,<)$ sei ununterscheidbar in $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A} = [I]^{\mathcal{A}}$. Dann erfüllt für jedes höchstens abzählbare $D \subseteq A$ die Struktur $\mathcal{A}(D)$ höchstens abzählbar viele vollständige 1-Typen ihrer Theorie.*

Beweis: Zu $a \in A$ gibt es ein endliches $J_a \subseteq I$ mit $a \in [J_a]^{\mathcal{A}}$. Somit ist $J := \bigcup_{d \in D} J_d$ höchstens abzählbar und $D \subseteq [J]^{\mathcal{A}}$. Daher gilt für $a, b \in A$ mit $[a]_{\mathcal{A}(D)} \neq [b]_{\mathcal{A}(D)}$ auch $[a]_{\mathcal{A}([J]^{\mathcal{A}})} \neq [b]_{\mathcal{A}([J]^{\mathcal{A}})}$; und wegen Aufgabe 5 der 12. Folge daher $[a]_{\mathcal{A}(J)} \neq [b]_{\mathcal{A}(J)}$. Es genügt also, zu zeigen, dass $\mathcal{A}(J)$ höchstens abzählbar viele vollständige 1-Typen seiner Theorie erfüllt.

Da I die Struktur $\mathcal{A}$ erzeugt, läßt sich jedes Element von A in der Form $t^{\mathcal{A}}[\bar{i}, \bar{j}]$ schreiben, wobei für geeignete $n, l \geq 0$, $t(\bar{u}, \bar{v}) \in T^S_{n+l}$, $\bar{i} \in (I \setminus J)^n$ und $\bar{j} \in J^l$. Nun ist $t^{\mathcal{A}}[\bar{i}, \bar{j}] = \tilde{t}^{\mathcal{A}(J)}[\bar{i}]$ mit $\tilde{t} := t(\bar{v}, c_{j_1}, \dots, c_{j_l}) \in T^{S(J)}_n$. Sind $\bar{i}, \bar{k}$ in der gleichen Äquivalenzklasse von R, wobei R gemäß 22.6 definiert ist, so gilt $[\bar{i}]_{\mathcal{A}(J)} = [\bar{k}]_{\mathcal{A}(J)}$ wegen 22.6; und wegen 22.1 daher $[\tilde{t}^{\mathcal{A}(J)}[\bar{i}]]_{\mathcal{A}(J)} = [\tilde{t}^{\mathcal{A}(J)}[\bar{i}]]_{\mathcal{A}(J)}$. Da $T^{S(J)}$ höchstens abzählbar ist und R höchstens abzählbar viele Äquivalenzklassen besitzt, folgt die Behauptung. $\square$

Satz 22.8 *Habe Σ, $\Sigma \subseteq L^S_0$ mit höchstens abzählbarem S, ein unendliches Modell und sei I eine unendliche Menge. Dann hat Σ ein Modell $\mathcal{A}$ derselben Mächtigkeit wie I, in dem für jedes höchstens abzählbare $D \subseteq A$ die Struktur $(\mathcal{A}(D))$ höchstens abzählbar viele vollständige 1-Typen ihrer Theorie erfüllt.*

Beweis: Es gibt ein höchstens abzählbares S^* und ein Σ^* mit

1. $S \subseteq S^*$ und $\Sigma \subseteq \Sigma^*$.
2. Jedes Modell von Σ hat eine Expansion, die Modell von Σ^* ist.
3. Wenn $\mathcal{B}^* \models \Sigma^*$ und $\mathcal{A}^* \subseteq \mathcal{B}^*$, so $\mathcal{A}^* \models \Sigma^*$.

Wir wählen eine Wohlordnung $<$ auf I. Nach 22.5 gibt es ein Modell $\mathcal{B}^*$ von Σ^*, in dem $(I, <)$ ununterscheidbar ist. Wir setzen $\mathcal{A}^* := [I]^{\mathcal{B}^*}$ und $\mathcal{A} := \mathcal{A}^*|S$. Wegen 3. ist auch $\mathcal{A}^* \models \Sigma^*$ und somit $\mathcal{A} \models \Sigma$. Da wegen **??** die Struktur $\mathcal{A}^*$ "über jeder höchstens abzählbaren Menge nur wenig 1 Typen erfüllt", gilt dies erst recht für $\mathcal{A}$. $\square$

23 Ordinalzahlen und Kardinalzahlen

Wir bezeichnen Ordinalzahlen mit den Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ und erinnern, dass $\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$. α ist eine *Nachfolgerzahl*, wenn $\alpha = \beta + 1$ für ein geeignetes β. α ist eine *Limeszahl*, wenn $\alpha \neq 0$ und $\forall \beta < \alpha : \beta + 1 < \alpha$. Es gilt:

- Jedes Element einer Ordinalzahl ist eine Ordinalzahl.
- $\alpha = \{\beta \mid \beta < \alpha\}$; somit: $\beta < \alpha \Leftrightarrow \beta \epsilon \alpha$.
- Jede Ordinalzahl ist entweder $= 0$ oder eine Nachfolgerzahl oder eine Limeszahl.
- Jede nicht-leere Klasse von Ordinalzahlen enthält ein kleinstes Element. Insbesondere ist $(\alpha, <)$ eine Wohlordnung für jede Ordinalzahl $\alpha > 0$.
- (Beweise durch transfinite Induktion) Sei E eine Eigenschaft von Ordinalzahlen.
  1. Wenn
  $$\begin{aligned} E0 &\qquad \text{und} \\ \forall \alpha (E\alpha \to E\alpha + 1) &\qquad \text{und} \\ \forall \alpha ((\mathrm{Lim}\ \alpha \wedge \forall \beta < \alpha\, E\beta) \to E\alpha) & \end{aligned}$$
  so
  $$\forall \alpha E \alpha.$$
  2. Wenn
  $$\forall \alpha (\forall \beta (\beta < \alpha\, E\beta) \to E\alpha).$$
  so
  $$\forall \alpha E \alpha.$$
- Entsprechend: Definitionen durch transfinite Induktion.

Mengen A und B sind *gleichmächtig*, $A \sim B$, wenn es eine Bijektion von A auf B gibt. Eine Ordinalzahl α ist eine *Kardinalzahl*, wenn $\forall \beta < \alpha : \neg \beta \sim \alpha$, wenn also α zu keiner kleineren Ordinalzahl gleichmächtig ist.

- Ist α eine unendliche Kardinalzahl, so ist α eine Limesordinalzahl.

- Ist α endlich, so ist α eine Kardinalzahl.
- ω ist eine Kardinalzahl; $\omega + 1$ ist keine Kardinalzahl.
- $\forall\alpha\exists\beta(\alpha < \beta$ undβ Kardinalzahl).

Ist α eine Ordinalzahl, so bezeichne α^+ die kleinste Kardinalzahl größer als α. Insbesondere: $\alpha < \alpha^+$.

$(\aleph_0 :=)\,\omega$ ist die erste unendliche Kardinalzahl, $(\aleph_1 =)\,\omega_1 := \omega^+$ ist die erste nicht abzählbare Ordinalzahl. $(\aleph_2 =)\,\omega_2 := (\omega_1)^+$.

- Zu jedem A existiert genau eine Kardinalzahl α mit $\alpha \sim A$. Wir schreiben $|A| = \alpha$ und sagen A hat die Mächtigkeit α.
- Jede nicht-leere Menge ist wohlordenbar, d.h. ist A eine Menge, so gibt es eine Relation $<$ auf A, so dass $(A, <)$ eine Wohlordnung ist.
- Wenn $|A| = \alpha$, so gibt es eine "Aufzählung" $(\alpha_\beta)_{\beta<\alpha}$ von A. Insbesondere: $A = \{a_\beta \mid \beta < \alpha\}$ und für jedes γ, $\gamma < \alpha$, gilt $|\{a_\beta \mid \beta < \gamma\}| < |A|$.
- Ist X unendlich, so $|X \cup Y| = \max\{|X|, |Y|\}$.
- Ist X unendlich und $Y \neq \emptyset$, so $|X \times Y| = \max\{|X|, |Y|\}$.
- $|X| < |P(X)| =: 2^{|X|}$. Insbesondere $2^\omega \geq \omega_1$.
- $|A| \leq |B|$ gdw es gibt injektives $f : A \to B$.

24 Saturierte Strukturen

Mit $\kappa, \lambda, \mu, \ldots$ bezeichnen wir stets unendliche Kardinalzahlen.

Definition 24.1 Σ ist *κ-kategorisch*, wenn je zwei Modelle von Σ der Mächtigkeit κ isomorph sind.

Beispiele 24.2 1) Für $S := \emptyset$ ist $\{\varphi_{\geq n} \mid n \geq 1\}$ κ-kategorisch für jedes κ.

2) Für $S := \{+, 0\}$ sei Σ ein Axiomensystem für unendliche, torsionsfreie, divisible abelsche Gruppen. Die Modelle von Σ "sind" die Vektorräume über $\mathbb{Q}$. Ihr Isomorphietyp ist bestimmt durch die Mächtigkeit einer Basis. Dies zeigt, dass Σ κ-kategorisch ist für jedes $\kappa \geq \omega_1$. Die abzählbaren Modelle von Σ sind die Vektorräume der Dimension $n \geq 1$ und der Vektorraum der Dimension $\aleph_0$.

3) Σ_{DO}, das Axiomensystem für dichte Ordnungen, ist ω-kategorisch. Da $(\mathbb{R}, <) \not\cong (\mathbb{R}, <) + (\mathbb{Q}, <)$ ist Σ_{DO} nicht $2^{\aleph_0}$-kategorisch. Auf ähnlichem Wege zeigt man, dass Σ_{DO} nicht κ-kategorisch ist für beliebiges überabzählbare κ.

4) Σ_{dkO} ist für kein κ κ-kategorisch: Wegen $\mathcal{Z} \not\cong \mathcal{Z} + \mathcal{Z}$ ist Σ_{dkO} nicht ω-kategorisch. Für (dichte) Ordnungen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ gilt: $(\mathcal{Z} \cdot \mathcal{A} \cong \mathcal{Z} \cdot \mathcal{B} \;\Leftrightarrow\; \mathcal{A} \cong \mathcal{B})$. Daher ist für $\kappa > \omega$ mit Σ_{DO} auch Σ_{dkO} nicht κ-kategorisch.

Der folgende Satz, den wir mit den nächsten Paragraphen beweisen werden, zeigt, dass die vorangehenden Beipiele charakteristisch sind.

Satz 24.3 (Satz von Morley) *Sei Σ eine vollständige Satzmenge in einer höchstens abzählbaren Symbolmenge. Dann ist Σ entweder in allen überabzählbaren oder in keiner überabzählbaren Mächtigkeit kategorisch.*

Eine Struktur $\mathcal{A}$ ist *κ-saturiert*, wenn für alle $X \subseteq A$ mit $|X| < \kappa$ die Struktur $\mathcal{A}(X)$ jeden 1-Typ von $\mathrm{Th}(\mathcal{A}(X))$ erfüllt. $\mathcal{A}$ ist *saturiert*, wenn $\mathcal{A}$ $|A|$-saturiert ist.

Bemerkungen 24.4 1) Ist A abzählbar, so ist $\mathcal{A}$ saturiert gdw $\mathcal{A}$ ω-saturiert.

2) Ist A unendlich und $\mathcal{A}$ κ-saturiert, so ist $|A| \geq \kappa$.

Beweis: Da A unendlich ist, ist $\{\neg x = c_a \mid a \in A\}$ ein 1-Typ von $\mathrm{Th}(\mathcal{A}(A))$, den $\mathcal{A}(A)$ nicht erfüllt. Da $\mathcal{A}$ κ-saturiert ist, gilt daher $|A| \geq \kappa$. $\square$

3) Ist $\mathcal{A}$ κ-saturiert, $Y \subseteq A$ und $|Y| < \kappa$, so ist $\mathcal{A}(Y)$ κ-saturiert.

Beweis: Ist $X \subseteq A$, $|X| < \kappa$, so wird wegen $|X \cup Y| < \kappa$ nach Voraussetzung jeder 1-Typ von $\mathrm{Th}(\mathcal{A}(X \cup Y))$, d.h. jeder 1-Typ von $\mathrm{Th}(\mathcal{A}(Y)(X))$ in $\mathcal{A}(X \cup Y)$, d.h. in $\mathcal{A}(Y)(X)$, erfüllt. □

4) Ist $\mathcal{A}$ eine κ-saturierte S-Struktur und $S' \subseteq S$, so ist auch $\mathcal{A}|S'$ κ-saturiert.

5) Ist S höchstens abzählbar und U ein freier Ultrafilter, so ist jedes Ultraprodukt $\Pi_{\mathbb{N}}\mathcal{A}_k/U$ ω_1-saturiert (vgl. Teil 5) von 8.6).

6) a) Ist $\mathcal{B}$ κ-saturiert, $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ und $|A| \leq \kappa$, so $\mathcal{A} \xrightarrow{e} \mathcal{B}$.

b) Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ saturiert, $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ und $|A| = |B|$, so $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

Beweis: Wir zeigen a) und geben in eckigen Klammern die Änderungen für b) an: [Wir setzen $\kappa := |A| = |B|$]. Gelte $A = \{a_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ [und $B = \{b_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$]. Durch transfinite Induktion definieren wir $p_\alpha \in \mathrm{Part}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ für $\alpha < \kappa$ mit

1. $p_0 \subseteq p_1 \subseteq \ldots \subseteq p_\alpha \subseteq p_{\alpha+1} \subseteq \ldots$ (d.h. $p_\alpha \subseteq p_\beta$ für $\alpha < \beta < \kappa$);
2. $|p_\alpha| \leq \max\{|\alpha|, \omega\}$;
3. $\mathcal{A}(\mathrm{df}(p_\alpha)) \equiv \mathcal{B}(\mathrm{bd}(p_\alpha))$;
4. $a_\alpha \in \mathrm{df}(p_{\alpha+1})$ [$b_\alpha \in \mathrm{bd}(p_{\alpha+1})$].

Hierzu setzen wir $p_0 := \emptyset$ und $p_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} p_\beta$ für Limesordinalzahlen α. Sei $\alpha = \beta + 1$: Wegen 3. ist $[a_\beta]_{\mathcal{A}(\mathrm{df}(p_\beta))}$ ein 1-Typ von $\mathrm{Th}(\mathcal{B}(\mathrm{bd}(p_\beta))$. Da $\mathcal{B}$ κ-saturiert ist, gibt es ein $b \in B$ mit $(\mathcal{A}(\mathrm{df}(p_\beta)), a_\beta) \equiv (\mathcal{B}(\mathrm{bd}(p_\beta)), b)$. Wir setzen $p_{\beta+1} := p_\beta \cup \{(a_\beta, b)\}$. [Wir setzen $q := p_\beta \cup \{(a_\beta, b)\}$. Dann ist $\mathcal{A}(\mathrm{df}(q)) \equiv \mathcal{B}(\mathrm{bd}(q))$. Daher ist $[b_\beta]_{\mathcal{B}(\mathrm{bd}(q))}$ ein 1-Typ von $\mathrm{Th}(\mathcal{A}(\mathrm{df}(q))$, also gibt es ein $a \in A$ mit $(\mathcal{A}(\mathrm{df}(q)), a) \equiv (\mathcal{B}(\mathrm{bd}(q)), b_\beta)$. Wir setzen $p_{\beta+1} := q \cup \{(a, b_\beta)\}$.] Nun ist $\pi := \bigcup_{\alpha<\kappa} p_\alpha$ die gesuchte elementare Einbettung [der gesuchte Isomorphismus]. □

Das vorangehende Ergebnis läßt sich wie folgt formulieren:

Folgerung 24.5 *Ist Σ vollständig und sind je zwei Modelle von Σ der Mächtigkeit κ saturiert, so ist Σ κ-kategorisch.*

25 Stabile Theorien

Sei $\Sigma \subseteq L_0^S$. Für $n \geq 1$ bezeichne $S_n(\Sigma)$ die Menge der vollständigen n-Typen. Für eine Struktur $\mathcal{A}$ sei $S_n(\mathcal{A}) := S_n(\mathrm{Th}(\mathcal{A}))$; man beachte: $S_n(\mathcal{A})$ ist i.a. nicht die Menge der in $\mathcal{A}$ erfüllten vollständigen n-Typen von $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$.

Definition 25.1 Σ ist κ-stabil, wenn für jedes Modell $\mathcal{A}$ von Σ und jedes $X \subseteq A$ mit $|X| \leq \kappa$ gilt: $|S_1(\mathcal{A}(X))| \leq \kappa$.

Mit ($\Box$) kürzen wir im folgenden die Voraussetzung ab:

> S ist höchstens abzählbar, $\Sigma \subseteq L_0^S$ ist vollständig und hat unendliche Modellle.

Beispiele 25.2 1) Σ_{DO} ist nicht ω-stabil: Sind $r, s \in \mathbb{R}$ und $r \neq s$, so ist $[r]_{(\mathbb{R},<)(\mathbb{Q})} \neq [s]_{(\mathbb{R},<)(\mathbb{Q})}$; daher $|S_1(\mathcal{R}(\mathbb{Q}))| \geq |\mathbb{R}| > \aleph_0$.

2) ($\Box$), $\kappa \geq \omega_1$, Σ sei κ-kategorisch. Dann ist Σ ω-stabil.

Beweis: Ist Σ nicht ω-stabil, so gibt es $\mathcal{A} \models \Sigma$, und $X \subseteq A$ mit $|X| \leq \omega$ und $|S_1(\mathcal{A}(X))| \geq \omega_1$; wir können annehmen, dass A abzählbar ist. Wir wählen eine Teilmenge $\underline{\Phi}$ von $S_1(\mathcal{A}(X))$ der Mächtigkeit ω_1. Mit dem Satz von Löwenheim-Skolem-Tarski (und Teil 3) von 8.2) finden wir $\mathcal{B}$ mit

$$\mathcal{A} \prec \mathcal{B},\ |B| = \kappa,\ \mathcal{B}(X) \text{ erfüllt alle Typen in } \underline{\Phi}.$$

Nach 22.8 gibt es auch ein Modell $\mathcal{C}$ mit: $|C| = \kappa$ und für jedes höchstens abzähhlbare $Y \subseteq C$ erfüllt $\mathcal{C}(Y)$ höchstens abzählbar viele vollständige 1-Typen. $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ können nicht isomorph sein und somit ist Σ nicht κ-kategorisch.

Satz 25.3 ($\Box$). *Für Σ sind äquivalent:*

1. *Σ ist κ-stabil für alle κ.*
2. *Σ ist ω-stabil.*
3. *Für alle $\mathcal{A} \models \Sigma$ und $X \subseteq A$ enthält $\mathcal{L}_1(\mathrm{Th}(\mathcal{A}(X)))$ keinen Baum von Elementen.*

Beweis: 2 $\Rightarrow$ 3: Sei $\mathcal{A} \models \Sigma$, $X \subseteq A$ und $(\overline{\varphi}_{i_1\ldots i_n})_{n\geq 0,\, i_1,\ldots,i_n\in\{0,1\}}$ ein Baum von Elementen in $\mathcal{L}_1(\mathrm{Th}(\mathcal{A}(X))$. Wir wählen eine höchstens abzählbare Teilmenge X_0 von X, so dass $x \in X_0$ für jede Konstante c_x mit $x \in X$, die in einem $\varphi_{i_1\ldots i_n}$ vorkommt. Somit enthält auch $\mathcal{L}_1(\mathrm{Th}(\mathcal{A}(X_0))$ einen Baum von Elementen und damit überabzählbar viele Ultrafilter (vgl. 18.21). $S_1(\mathcal{A}(X_0))$ ist daher überabzählbar, also ist Σ nicht ω-stabil.

3 $\Rightarrow$ 1: Wir nehmen an, dass für ein κ ein Modell $\mathcal{A}$ von Σ und eine Teilmenge X von A existieren mit $|X| \leq \kappa$ und $|S_1(\mathcal{A}(X))| > \kappa$ und zeigen, dass dann $\mathcal{L}_1(\mathrm{Th}(\mathcal{A}(X))$ einen Baum von Elementen enthält.

Für $\varphi \in L_1^{S(X)}$ setzen wir

$$\hat{\varphi} \;:=\; \{\Phi \in S_1(\mathcal{A}(X)) \mid \varphi \in \Phi\}$$

und bezeichnen φ als *groß*, wenn $|\hat{\varphi}| > \kappa$. Wir bemerken:

(a) $v_0 = v_0$ ist groß (da $|S_1(\mathcal{A}(X))| > \kappa$).

(b) $|\bigcup_{\varphi \text{ nicht groß}} \hat{\varphi}| \leq \kappa \cdot \kappa \leq \kappa$.

(c) Für $G := (S_1(\mathcal{A}(X)) \setminus \bigcup_{\varphi \text{ nicht groß}} \hat{\varphi})$ gilt $|G| > \kappa$.

(d) Ist $\Phi \in G$ und $\varphi \in \Phi$, so ist φ groß.

(e) Ist φ groß, so gibt es ein $\psi \in L_1^{S(X)}$ mit: $\varphi \wedge \psi$ und $\varphi \wedge \neg\psi$ sind groß. (Ist nämlich φ groß, so $|\hat{\varphi} \cap G| > \kappa$. Insbesondere gibt es $\Phi_1, \Phi_2 \in \hat{\varphi} \cap G$ mit $\Phi_1 \neq \Phi_2$. Wir wählen ψ mit $\psi \in \Phi_1$, $\psi \notin \Phi_2$. Die Behauptung ergibt sich nun aus (d).)

Wir erhalten nun einen Baum in $\mathcal{L}_1(\mathrm{Th}(\mathcal{A}(X))$ mit Wurzel $v_0 = v_0$ durch wiederholte Anwendung von (e). $\square$

Satz 25.4 ($\square$). *Sei Σ ω-stabil und $\omega \leq \mu < \kappa$. Dann gibt es zu jedem Modell $\mathcal{A}$ von Σ der Mächtigkeit $\leq \kappa$ eine Struktur $\mathcal{B}$ mit*

$$\mathcal{A} \prec \mathcal{B},\ |B| = \kappa,\ \mathcal{B} \text{ ist } \mu^+\text{-saturiert.}$$

Beweis: Wir definieren eine elementare Kette $(\mathcal{A}_\alpha)_{\alpha<\mu^+}$ von Strukturen der Mächtigkeit κ durch transfinite Induktion:

$\mathcal{A}_0$ sei eine elementare Erweiterung von $\mathcal{A}$ der Mächtigkeit κ. Ist α eine Limeszahl, so setzen wir $\mathcal{A}_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{A}_\beta$. Dann ist $\mathcal{A}_\beta \prec \mathcal{A}_\alpha$ für alle $\beta < \alpha$ und $\kappa \leq |A_\alpha| \leq |\alpha| \cdot \kappa \leq \kappa \cdot \kappa = \kappa$.

Sei $\alpha = \beta+1$: Nach Voraussetzung ist Σ ω-stabil und wegen 25.3 κ-stabil. Daher hat $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_\beta(A_\beta)) \leq \kappa$ viele vollständige 1-Typen. Es gibt daher eine Struktur $\mathcal{A}_{\beta+1}$ mit

> $\mathcal{A}_\beta \prec \mathcal{A}_{\beta+1}$, $|A_{\beta+1}| = \kappa$ und $\mathcal{A}_{\beta+1}(A_\beta)$ erfüllt alle 1-Typen von $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_\beta(A_\beta))$.

Schließlich setzen wir $\mathcal{B} := \bigcup_{\alpha<\mu^+} \mathcal{A}_\alpha$.

Dann ist $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ und $|B| = \kappa$. Wir zeigen noch, dass $\mathcal{B}$ μ^+-saturiert ist. Sei $X \subseteq B$, $|X| < \mu^+$, also $|X| \leq \mu$, etwa $X = \{x_\gamma \mid \gamma < \mu\}$, und sei Φ ein 1-Typ von $\mathrm{Th}(\mathcal{B}(X))$. Zu x_γ wählen wir $\alpha_\gamma < \mu^+$ mit $x_\gamma \in A_{\alpha_\gamma}$. Dann ist $\beta := \bigcup_{\gamma<\mu} \alpha_\gamma$ eine Ordinalzahl mit $|\beta| \leq \mu \cdot \mu = \mu$ und daher $\beta < \mu^+$. Wegen $X \subseteq A_\beta$ ist Φ ein 1-Typ von $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_\beta(X))$, erst recht ein 1-Typ von $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_\beta(A_\beta))$. Nach Konstruktion gibt es ein $a \in A_{\beta+1}$ mit $\mathcal{A}_{\beta+1}(A_\beta) \models \Phi[a]$, also mit $\mathcal{A}_{\beta+1}(X) \models \Phi[a]$. Und damit $\mathcal{B}(X) \models \Phi[a]$. $\square$

Folgerung 25.5 ($\square$). *Sei $\kappa \geq \omega_1$. Dann ist Σ κ-kategorisch genau dann, wenn alle Modelle von Σ der Mächtigkeit κ saturiert sind.*

Beweis: Wegen 24.5 müssen wir nur nachweisen, dass jedes Modell $\mathcal{A}$ einer κ-kategorischen Satzmenge mit $|A| = \kappa$ saturiert ist. Hierzu genügt der Nachweis, dass $\mathcal{A}$ μ^+-saturiert für beliebiges $\mu < \kappa$. Nach 25.4 gibt es ein μ^+-saturiertes Modell von Σ der Mächtigkeit κ, diese muss nach Voraussetzung zu $\mathcal{A}$ isomorph sein. $\square$

26 Prime Modelle und Morley abwärts

Definition 26.1 Eine Folge $(a_\gamma)_{\gamma<\alpha}$ in $\mathcal{A}$ ist eine *Konstruktion*, wenn die a_γ's paarweise verschieden sind und wenn für alle $\delta < \alpha$ der Typ $[a_\delta]_{(\mathcal{A},(a_\gamma)_{\gamma<\delta})}$ ein Haupttyp (von $\mathrm{Th}((\mathcal{A},(a_\gamma)_{\gamma<\delta}))$ ist.

Bemerkungen 26.2 1) Ist $(a_\gamma)_{\gamma<\alpha}$ eine Konstruktion in $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \prec \mathcal{A}$ und $\{a_\gamma \mid \gamma < \alpha\} \subseteq B$, so ist $(a_\gamma)_{\gamma<\alpha}$ auch eine Konstruktion in $\mathcal{B}$.

2) Ist $(a_\gamma)_{\gamma<\alpha}$ eine Konstruktion in $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, so gibt es eine Folge $(b_\gamma)_{\gamma<\alpha}$ mit $(\mathcal{A},(a_\gamma)_{\gamma<\alpha}) \equiv (\mathcal{B},(b_\gamma)_{\gamma<\alpha})$. Falls zusätzlich $A = \{a_\gamma \mid \gamma < \alpha\}$, so $\mathcal{A} \overset{e}{\to} \mathcal{B}$.

Beweis: Wir definieren b_δ für $\delta < \alpha$ durch transfinite Induktion. Sei b_γ für $\gamma < \delta$ bereits definiert und gelte $(\mathcal{A},(a_\gamma)_{\gamma<\delta}) \equiv (\mathcal{B},(b_\gamma)_{\gamma<\delta})$. Nach Voraussetzung erfüllt a_δ in $(\mathcal{A},(a_\gamma)_{\gamma<\delta})$ ein 1-Atom $\varphi \in L_1^{S\cup\{c_\gamma|\gamma<\delta\}}$ von $\mathrm{Th}(\mathcal{A},(a_\gamma)_{\gamma<\delta})$ $(:= \mathrm{Th}(\mathcal{B},(b_\gamma)_{\gamma<\delta}))$. Somit gilt $(\mathcal{B},(b_\gamma)_{\gamma<\delta}) \models \exists v_0\varphi$, etwa $(\mathcal{B},(b_\gamma)_{\gamma<\delta}) \models \varphi[b_\delta]$. Daher $(\mathcal{A},(a_\gamma)_{\gamma<\delta+1}) \equiv (\mathcal{B},(b_\gamma)_{\gamma<\delta+1})$. $\square$

3) Ist $C := (a_\gamma)_{\gamma<\alpha}$ eine Konstruktion in $\mathcal{A}$, so gilt

$$\forall n \geq 1 \forall\gamma_1 < \alpha \ldots \forall\gamma_n < \alpha : [a_{\gamma_1}, \ldots , a_{\gamma_n}]_{\mathcal{A}} \text{ ist ein Haupttyp von } \mathrm{Th}(\mathcal{A}).$$

Beweis: (An verschiedenen Stellen verwenden wir stillschweigend die Ergebnisse aus der Übung 1 der 13. Folge) Wir zeigen durch Induktion über β für jedes $\beta \leq \alpha$

$$\forall n \geq 1\, \forall\gamma_1 < \beta \ldots \forall\gamma_n < \beta : [a_{\gamma_1}, \ldots , a_{\gamma_n}]_{\mathcal{A}} \text{ ist ein Haupttyp von } \mathrm{Th}(\mathcal{A}).$$

Für $\beta = 0$ ist nichts zu beweisen und für Limeszahlen β ergibt sich die Behauptung unmittelbar aus der Induktionsvoraussetzung. Sei $\beta = \delta + 1$. Wir zeigen, dass $[a_{\gamma_1}, \ldots , a_{\gamma_n}, a_\delta]_{\mathcal{A}}$ für $\gamma_1, \ldots , \gamma_n < \delta$ ein Haupttyp von $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ ist. Da C eine Konstruktion ist, erfüllt $[a_\delta]_{(\mathcal{A},(a_\gamma)_{\gamma<\delta})}$ ein 1-Atom, etwa $\varphi = \varphi(v_0, c_{\delta_1}, \ldots , c_{\delta_k})$. Dann $(\mathcal{A}, a_{\gamma_1}, \ldots , a_{\gamma_n}, a_{\delta_1}, \ldots , a_{\delta_k}) \models \varphi[a_\delta]$; somit ist $[a_\delta]_{(\mathcal{A},a_{\gamma_1},\ldots,a_{\gamma_n},a_{\delta_1},\ldots,a_{\delta_k})}$ ein Haupttyp. Nach Induktionsvoraussetzung ist $[a_{\gamma_1}, \ldots , a_{\gamma_n}, a_{\delta_1}, \ldots , a_{\delta_k}]_{\mathcal{A}}$ ein Haupttyp , damit auch $[a_{\gamma_1}, \ldots , a_{\gamma_n}, a_{\delta_1}, \ldots , a_{\delta_k}, a_\delta]_{\mathcal{A}}$ (vgl. Übungen 3 der 12. Folge) und somit $[a_{\gamma_1}, \ldots , a_{\gamma_n}, a_\delta]_{\mathcal{A}}$. $\square$

Sind $C_1 := (a_\gamma)_{\gamma<\alpha}$ und $C_2 := (b_\gamma)_{\gamma<\beta}$ Konstruktionen in $\mathcal{A}$, so schreiben wir $C_1 < C_2$, wenn $\alpha < \beta$ und $a_\gamma = b_\gamma$ für alle $\gamma < \alpha$. Eine Konstruktion C in $\mathcal{A}$

ist *maximal*, wenn es keine Konstruktion C' in $\mathcal{A}$ mit $C < C'$ gibt.

4) Gelte ($\square$) und sei Σ ω-stabil. Ist $(a_\gamma)_{\gamma<\alpha}$ eine maximale Konstruktion in $\mathcal{A}$, so ist $B := \{a_\gamma \mid \gamma < \alpha\}$ der Träger einer elementaren Substruktur von $\mathcal{A}$.

Beweis: Wegen 6.3 genügt es, zu zeigen, dass für $\varphi \in L_1^{S\cup\{c_\gamma|\gamma<\alpha\}}$ mit $(\mathcal{A},(a_\gamma)_{\gamma<\alpha}) \models \exists v_0\varphi$ es bereits ein $b \in B$ mit $(\mathcal{A},(a_\gamma)_{\gamma<\alpha}) \models \varphi[b]$ gibt. Wegen **??** ist die Boolesche Algebra $\mathcal{L}_1(\mathrm{Th}((\mathcal{A},(a_\gamma)_{\gamma<\alpha})))$ atomar; es gibt in ihr also ein Atom $\overline{\psi}$ mit $\overline{\psi} \leq \overline{\varphi}$. Somit existiert ein $b \in A$ mit $(\mathcal{A},(a_\gamma)_{\gamma<\alpha}) \models \psi[b]$ und damit $(\mathcal{A},(a_\gamma)_{\gamma<\alpha}) \models \varphi[b]$. Da b das Atom ψ erfüllt, ist $[b]_{(\mathcal{A},(a_\gamma)_{\gamma<\alpha})}$ ein Haupttyp; wäre $b \notin B$, so wäre $(a_\gamma)_{\gamma<\alpha}b$ eine Konstruktion, im Widerspruch zur Maximalität von $(a_\gamma)_{\gamma<\alpha}$. $\square$

.

Definition 26.3

- $\mathcal{A}$ ist *prim*, wenn $\mathcal{A} \overset{e}{\to} \mathcal{B}$ für alle $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ gilt.
- Für Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ und $X \subseteq A$ ist eine Abbildung $\pi : X \to B$ *elementar*, wenn $(\mathcal{A},(x)_{x\in X}) \equiv (\mathcal{B},(\pi(x))_{x\in X})$.
- $\mathcal{A}$ ist *prim über* X, wenn $\mathcal{A}(X)$ prim ist, wenn also für jedes $\mathcal{B}$ und jedes elementare $\pi : X \to B$ eine Erweiterung $\tilde{\pi} : \mathcal{A} \overset{e}{\to} \mathcal{B}$ existiert.
- $\mathcal{A}$ ist *atomar*, wenn für alle $n \geq 1$ jedes Tupel $\bar{a} \in A^n$ ein n-Atom von $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ erfüllt.

Satz 26.4 *Gelte ($\square$), sei Σ ω-stabil, $\mathcal{A} \models \Sigma$ und $X \subseteq A$. Dann gibt es eine Struktur $\mathcal{B}$ mit*

$$\mathcal{B} \prec \mathcal{A},\ X \subseteq B,\ \mathcal{B}(X) \textit{ ist prim und atomar.}$$

Beweis: Da die Vereinigung einer $<$-Kette von Konstruktionen eine Konstruktion ist, gibt es eine maximale Konstruktion $C = (a_\gamma)_{\gamma<\alpha}$ in $\mathcal{A}(X)$. Wegen Teil 4) von 26.2 ist $B := \{a_\gamma \mid \gamma < \alpha\}$ der Träger einer elementaren Substruktur $\mathcal{B}(X)$ von $\mathcal{A}(X)$. Da C auch eine Konstruktion in $\mathcal{B}(X)$ ist (vgl. Teil 1) von 26.2), ist $\mathcal{B}(X)$ atomar (vgl. Teil 3) von 26.2). Wenn $\mathcal{B}(X) \equiv (\mathcal{D},(d_x)_{x\in X})$, so (vgl. Teil 2) von 26.2) $\mathcal{B}(X) \overset{e}{\to} (\mathcal{D},(d_x)_{x\in X})$, d.h. $\mathcal{B}(X)$ ist prim. $\square$

Lemma 26.5 *Gelte ($\Box$), sei Σ ω-stabil und $\mathcal{A}$ ein überabzählbares Modell von Σ. Dann gibt es eine echte elementare Erweiterung $\mathcal{B}$ von $\mathcal{A}$ mit $|A| = |B|$ mit der Eigenschaft, dass für jedes höchstens abzählbare $X \subseteq A$ jeder 1-Typ von $\mathrm{Th}(\mathcal{A}(X))$, der in $\mathcal{B}(X)$ erfüllt wird, bereits in $\mathcal{A}(X)$ erfüllt wird.*

Beweis: Da $v_0 = v_0^{\mathcal{A}(A)}$ überabzählbar ist und $\mathcal{L}_1(\mathrm{Th}(\mathcal{A}(A)))$ keinen Baum enthält, gibt es ein $\varphi \in L_1^{S(A)}$ mit

1. $\varphi^{\mathcal{A}(A)}$ ist überabzählbar;
2. für alle $\psi \in L_1^{S(A)}$: $(\varphi \wedge \psi)^{\mathcal{A}(A)}$ oder $(\varphi \wedge \neg\psi)^{\mathcal{A}(A)}$ ist höchstens abzählbar.

Sei c eine neue Konstante. $\Sigma_1 \subseteq L_0^{S(A)\cup\{c\}}$ sei die folgende Satzmenge:

$\mathrm{Th}(\mathcal{A}) \cup \{\neg c = c_a \mid a \in A\} \cup \{\psi(c) \mid \psi \in L_1^{S(A)},\ (\varphi \wedge \psi)^{\mathcal{A}(A)} \text{ ist überabzählbar}\}.$

Wegen 1. ist Σ_1 vollständig. Wir zeigen, dass Erf Σ_1, in dem wir die Erfüllbarkeit jeder endlichen Teilmenge Σ_0 von Σ_1 nachweisen. Gelte

$$\Sigma_0 \subseteq \mathrm{Th}(\mathcal{A}) \cup \{\neg c = c_{a_1}, \dots, \neg c = c_{a_k}\} \cup \{\psi_1(c), \dots, \psi_l(c)\}.$$

Da wegen 2. $\{a_1, \dots, a_k\} \cup \bigcup_{i=1}^{l} (\varphi \wedge \neg\psi_i)^{\mathcal{A}(A)}$ höchstens abzählbar ist, gibt es wegen 1. ein Element $a \in (\varphi^{\mathcal{A}(A)} \setminus (\{a_1, \dots, a_k\} \cup \bigcup_{i=1}^{l} (\varphi \wedge \neg\psi_i)^{\mathcal{A}(A)}))$. Dann $(\mathcal{A}(A), a) \models \Sigma_0$.

Sei $\mathcal{B}$ eine elementare Erweiterung von $\mathcal{A}$ mit $(\mathcal{B}, (a)_{a\in A}, c^B) \models \Sigma_1$. Insbesondere ist $\mathcal{B} \models \Sigma$ und wegen 26.4 können wir annehmen, dass $\mathcal{B}$ prim über $A \cup \{c^B\}$ und $(\mathcal{B}(A), c^B)$ atomar ist. Somit gilt $|B| = |A|$. Sei $X \subseteq A$ höchstens abzählbar und Φ ein 1-Typ von $\mathrm{Th}(\mathcal{A}(X))$ und gelte $\mathcal{B}(X) \models \Phi[b]$. Wir zeigen, dass es ein $a \in A$ gibt mit $\mathcal{A}(X) \models \Phi[a]$. Da $(\mathcal{B}(A), c^B)$ atomar ist, gibt es ein 1-Atom $\chi \in L_1^{S(A)\cup\{c\}}$ mit $(\mathcal{B}(A), c^B) \models \chi[b]$ und $\Sigma_1 \models \chi \to \bigwedge \Phi$. Weiterhin gilt $\Sigma_1 \models \exists v_0 \chi(v_0)$, da Σ_1 vollständig ist. Da Φ abzählbar ist, finden wir mit dem Endlichkeitssatz ein höchstens abzählbares $\Sigma_2 \subseteq \Sigma_1$ mit

$$\Sigma_2 \models \chi \to \bigwedge \Phi \text{ und } \ \Sigma_2 \models \exists v_0 \chi(v_0).$$

Dann gibt es ein höchstens abzählbares Y mit $X \subseteq Y$ und $\Sigma_2 \subseteq L_0^{S(Y)\cup\{c\}}$. Für

$$a_0 \in \varphi^{\mathcal{A}(A)} \setminus (Y \cup \bigcup_{\psi \in L_1^{S(Y)},\ (\varphi\wedge\neg\psi)^{\mathcal{A}(A)} \text{höchstens abzählbar}} (\varphi \wedge \neg\psi)^{\mathcal{A}(A)})$$

gilt $(\mathcal{A}(A), a_0) \models \Sigma_2$. Daher $(\mathcal{A}(A), a_0) \models \exists v_0 \chi(v_0)$. Somit existiert ein $a \in A$ mit $(\mathcal{A}(A), a_0) \models \chi[a]$. Dann $(\mathcal{A}(A), a_0) \models \Phi[a]$ und daher $\mathcal{A}(X) \models \Phi[a]$. $\square$

Satz 26.6 *Gelte ($\square$), Σ sei ω-stabil und habe ein Modell der Mächtigkeit ω_1, das nicht saturiert ist. Für jedes überabzählbare λ hat dann Σ ein nicht ω_1-saturiertes Modell der Mächtigkeit λ.*

Beweis: Sei $\mathcal{A}_0$ ein nicht saturiertes Modell von Σ mit $|A_0| = \omega_1$ und sei $\lambda \geq \omega_1$. Durch transfinite Induktion definieren wir eine elementare Kette $(\mathcal{A}_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ mit

- $|A_\alpha| \leq \lambda$;
- $A_\alpha \subset A_{\alpha+1}$;
- für alle höchstens abzählbare $X \subseteq A_0$: jeder 1-Typ von $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_0(X))$, der in $\mathcal{A}_\alpha(X)$ erfüllt wird, wird bereits in $\mathcal{A}_0(X)$ erfüllt.

$\mathcal{A}_0$ ist gegeben. Wir setzen $\mathcal{A}_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{A}_\beta$ für Limesordinalzahlen α. Für $\alpha = \beta + 1$ sei $\mathcal{A}_{\beta+1}$ eine Erweiterung von $\mathcal{A}_\beta$ gemäß 26.5. Schließlich setzen wir $\mathcal{B} := \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathcal{A}_\alpha$.

Dann ist $\lambda \leq |B| \leq \lambda \cdot \lambda = \lambda$. $\mathcal{B}$ ist nicht ω_1-saturiert: Nach Voraussetzung gibt es ein höchstens abzählbares $X \subseteq A_0$ und einen 1-Typ Φ, der nicht in $\mathcal{A}_0(X)$ erfüllt wird. Dann wird aber Φ auch nicht in $\mathcal{B}(X)$ erfüllt; somit ist $\mathcal{B}$ nicht ω_1-saturiert. $\square$

Satz 26.7 (Morley abwärts) *Gelte ($\square$) und sei $\kappa \geq \omega_1$. Ist Σ κ-kategorisch, so ist Σ ω_1-kategorisch.*

Beweis: Ist Σ κ-kategorisch, so ist Σ ω-stabil (vgl. Teil 2 von 25.2). Ist Σ nicht ω_1-kategorisch, so hat Σ ein nicht saturiertes Modell der Mächtigkeit ω_1 (vgl. 25.5), wegen 26.6 daher auch ein nicht ω_1-saturiertes, also nicht saturiertes Modell der Mächtigkeit κ. Dann ist aber Σ nicht κ-kategorisch. $\square$

27 Primerweiterungen und Morley aufwärts

Definition 27.1

- $\mathcal{A}'$ ist eine *Primerweiterung* von $\mathcal{A}$, wenn $\mathcal{A} \prec \mathcal{A}'$, $A \neq A'$ und zu jedem $\pi : \mathcal{A} \overset{e}{\to} \mathcal{B}$ mit $\pi(A) \neq B$ ein $\pi' : \mathcal{A}' \overset{e}{\to} \mathcal{B}$ existiert mit $\pi \subseteq \pi'$; oder gleichbedeutend, wenn $\mathcal{A} \prec \mathcal{A}'$, $A \neq A'$ und zu jedem $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ mit $A \neq B$ ein $\pi : \mathcal{A}' \overset{e}{\to} \mathcal{B}$ existiert mit $\mathrm{id}_A \subseteq \pi$.
- Σ *hat Primerweiterungen*, wenn jedes Modell von Σ eine Primerweiterung hat.

Beispiel 27.2 Sei $S := \{P\}$ mit einstelligem P. Ist $\mathcal{A}$ eine S-Struktur mit unendlichem P^A und unendlichem $A \setminus P^A$, so hat $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ keine Primerweiterungen.

Ist $\mathcal{A}'$ ist eine Primerweiterung von $\mathcal{A}$ und $|S| \leq |A|$, so ist $|A| = |A'|$.

Satz 27.3 *Gelte* ($\Box$)*, sei* Σ ω_1*-kategorisch und habe Primerweiterungen. Dann ist* Σ κ*-kategorisch für jedes* $\kappa > \omega_1$*.*

Beweis: Sei $\mathcal{A}$ "das" Modell der Mächtigkeit ω_1. Wir definieren zunächst eine elementare Kette $(\mathcal{A}_\alpha)_{\alpha \leq \kappa}$ wie folgt:

$$\mathcal{A}_0 := \mathcal{A}; \qquad \mathcal{A}_\alpha := \bigcup_{\gamma<\alpha} \mathcal{A}_\gamma \text{ für Limesordinalzahlen } \alpha.$$
$$\mathcal{A}_{\alpha+1} \text{ eine Primerweiterung von } \mathcal{A}_\alpha.$$

Mit der diesem Satz vorangehenden Bemerkungen zeigt man leicht durch transfinite Induktion über α, dass $|A_\alpha| = \max\{\omega_1, |\alpha|\}$. Insbesondere hat $\mathcal{A}_\kappa$ die Mächtigkeit κ. Wir zeigen nun die Zwischenbehauptung

> Ist $\mathcal{B} \models \Sigma$, $|B| = \mu < \kappa$ und $\pi : \mathcal{A}_\alpha \overset{e}{\to} \mathcal{B}$ für ein $\alpha < \kappa$, so gibt es ein α' mit $\alpha \leq \alpha' < \kappa$ und ein $\pi' : \mathcal{A}_{\alpha'} \cong \mathcal{B}$ mit $\pi \subseteq \pi'$.

Wir setzen $\pi_\alpha := \pi$. Ist für δ mit $\alpha \leq \delta < \kappa$ die Einbettung $\pi_\delta : \mathcal{A}_\delta \overset{e}{\to} \mathcal{B}$ bereits definiert und ist sie nicht surjektiv, so gibt es nach der Definition der primen Erweiterung ein $\pi_{\delta+1} : \mathcal{A}_{\delta+1} \overset{e}{\to} \mathcal{B}$. Ist δ eine Limeszahl und π_γ für $\gamma < \delta$ bereits definiert, so gilt $\pi_\delta : \mathcal{A}_\delta \overset{e}{\to} \mathcal{B}$ für $\pi_\delta := \bigcup_{\gamma<\delta} \pi_\gamma$. Da $|B| = \mu < \kappa$, gibt es keine elementare Einbettung von $\mathcal{A}_{\mu^+}$ in $\mathcal{B}$. Es gibt also ein α', sodass $\pi_{\alpha'} : \mathcal{A}_{\alpha'} \cong \mathcal{B}$.

Sei nun $\mathcal{B}$ ein Modell von Σ der Mächtigkeit κ. Wir zeigen $\mathcal{A}_\kappa \cong \mathcal{B}$ (und damit die κ-Kategorizität). Wir können annehmen, dass $\mathcal{B} := \bigcup_{\alpha<\kappa} \mathcal{B}_\alpha$, wobei

$(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ eine elementare Kette ist mit $\omega_1 \leq |B_\alpha| \leq \max\{\omega_1, |\alpha|\}$ (Ist etwa $(b_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ eine Aufzählung von B, so sei $\mathcal{B}_0$ eine elementare Substruktur von $\mathcal{B}$ der Mächtigkeit ω_1, $\mathcal{B}_\alpha := \bigcup_{\delta<\alpha} \mathcal{B}_\gamma$ für Limeszahlen α und $\mathcal{B}_{\alpha+1}$ sei so gewählt, dass $\mathcal{B}_\alpha \prec \mathcal{B}_{\alpha+1} \prec \mathcal{B}$, $b_\alpha \in B_{\alpha+1}$ und $|B_\alpha| = |B_{\alpha+1}|$).

Da Σ ω_1-kategorisch ist, gibt es ρ mit $\rho : \mathcal{A}_0 \cong \mathcal{B}_0$. Für $\alpha < \kappa$ gibt es $\gamma_\alpha < \kappa$ und $\rho_\alpha : \mathcal{A}_{\gamma_\alpha} \cong \mathcal{B}_\alpha$ mit

$$\gamma_\alpha \leq \gamma_{\alpha'} \text{ und } \rho_\alpha \subseteq \rho_{\alpha'} \text{ für } \alpha < \alpha'.$$

Gilt nämlich $\rho_\alpha : \mathcal{A}_{\gamma_\alpha} \cong \mathcal{B}_\alpha$, so $\rho_\alpha : \mathcal{A}_{\gamma_\alpha} \xrightarrow{e} \mathcal{B}_{\alpha+1}$ und wir finden $\gamma_{\alpha+1}$ und $\rho_{\alpha+1}$ aufgrund der Zwischenbehauptung. Ist α eine Limeszahl und gilt $\rho_\beta : \mathcal{A}_{\gamma_\beta} \cong \mathcal{B}_\beta$ für $\beta < \alpha$, so $\bar{\rho} : \mathcal{A}_{\bar{\gamma}} \xrightarrow{e} \mathcal{B}_\alpha$ für $\bar{\rho} := \bigcup_{\beta<\alpha} \rho_\beta$ und $\bar{\gamma} := \bigcup_{\beta<\alpha} \gamma_\beta$. Wiederum finden wir γ_α und ρ_α mit der Zwischenbehauptung.

Nun gilt $\rho : \mathcal{A}_\kappa \cong \mathcal{B}$ für $\rho := \bigcup_{\gamma<\kappa} \rho_\gamma$. $\square$

Für $\varphi(x) \in L_1^S$ und eine S-Struktur $\mathcal{A}$ bezeichnen wir mit $\varphi(\mathcal{A})$ die Erfüllungsmenge von φ in $\mathcal{A}$

$$\varphi(\mathcal{A}) \;\; := \;\; \{a \in A \mid \mathcal{A} \models \varphi[a]\}.$$

Definition 27.4 Sei $\varphi(x) \in L_1^S$. Σ *hat ein Vaughtsches Paar für* φ, wenn es $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models \Sigma$ gibt mit

$$\mathcal{A} \prec \mathcal{B}, A \neq B, \varphi(\mathcal{A}) = \varphi(\mathcal{B}) \text{ und unendlichem } \varphi(\mathcal{A}).$$

Ist $\mathcal{A}$ die Struktur von Beispiel 27.2, so weist man leicht nach, dass $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ ein Vaughtsches Paar für Px hat.

Satz 27.5 (Vaughtscher 2-Kardinalzahlsatz) *Sei* $\varphi(x) \in L_1^S$. *Gelte* ($\square$) *und* Σ *habe ein Vaughtsches Paar für* φ. *Dann gibt es ein Modell* $\mathcal{E}$ *von* Σ *der Mächtigkeit* ω_1 *mit abzählbarem* $\varphi(\mathcal{E})$.

Beweis: Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ wie in der vorangehenden Definition. Wir setzen $S' := S \cup \{P\}$ mit neuem einstelligen P. Für jede S'-Struktur $(\mathcal{D}, C)$ mit $(\mathcal{D}, C) \equiv (\mathcal{B}, A)$ ist C der Träger einer echten elemenetaren Substruktur $\mathcal{C}$ von $\mathcal{D}$ ist mit $\varphi(\mathcal{C}) = \varphi(\mathcal{D})$, da $\mathrm{Th}(\mathcal{B}, A)$ die folgenden Sätze enthält:

$\forall x(\varphi(x) \rightarrow Px)$
$\forall \bar{y}(Py_1 \wedge \ldots \wedge Py_m \rightarrow (\exists x \psi(x, \bar{y}) \rightarrow \exists x(Px \wedge \psi(x, \bar{y}))))$ für $\psi(x, \bar{y}) \in L^S$.

Mit der zum Beweis von Teil 8) von 9.11 verwendeten Idee zeigt man, dass es ein abzählbares $(\mathcal{D}, C)$ gibt mit $(\mathcal{D}, C) \equiv (\mathcal{B}, A)$ und mit

$\mathcal{C}$ – die Substruktur mit Träger C – und $\mathcal{D}$ sind ω-homogen und isomorph.

Wir definieren nun eine elementare Kette $(\mathcal{D}_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ abzählbarer Strukturen mit

$$D_\alpha \subset D_{\alpha+1},\ \mathcal{D}_\alpha \cong \mathcal{C} \text{ und } \ \varphi(\mathcal{D}_\alpha) = \varphi(\mathcal{D}_0).$$

Hierzu setzen wir $\mathcal{D}_0 := \mathcal{C}$. Für Limeszahlen α setzen wir $\mathcal{D}_\alpha := \bigcup_{\gamma<\alpha} \mathcal{D}_\gamma$. $\mathcal{D}_\alpha$ ist als Vereinigung von ω-homogenen Strukturen selbst ω-homogen und da jeder in ihr erfüllter n-Typ bereits in einem $\mathcal{D}_\gamma$ mit $\gamma < \alpha$ erfüllt wird, erfüllt $\mathcal{D}_\alpha$ dieselben n-Typen wie $\mathcal{C}$ (hier haben wir jeweils die Induktionsvoraussetzung auf die $\mathcal{D}_\gamma$ angewendet). Nach Teil 9) von 9.11 ist daher $\mathcal{D}_\alpha \cong \mathcal{C}$. Ist $\alpha = \gamma+1$, so ist nach Induktionsvoraussetzung $\mathcal{D}_\gamma \cong \mathcal{C}$. Wir wählen $\mathcal{D}_{\gamma+1}$ so, dass $(\mathcal{D}_{\gamma+1}, D_\gamma) \cong (\mathcal{D}, C)$.

Nun hat $\mathcal{E} := \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{D}_\alpha$ die Mächtigkeit ω_1 und $\varphi(\mathcal{E})\,(= \varphi(\mathcal{D}_0))$ ist abzählbar. □

Definition 27.6 Σ hat ein Vaughtsches Paar, wenn es ein Modell $\mathcal{A}$ von Σ, $\bar{a} \in A^n$ und $\varphi \in L_1^{S\cup\{\bar{c}\}}$ gibt, so dass $\mathrm{Th}(\mathcal{A}, \bar{a})$ ein Vaughtsches Paar für φ hat.

Satz 27.7 *Gelte ($\square$) und sei Σ ω_1-kategorsich. Dann hat Σ kein Vaughtsches Paar.*

Beweis: Wir nehmen an, Σ habe ein Vaughtsches Paar: $\mathcal{A}$, $\bar{a} \in A^n$ und $\varphi \in L_1^{S\cup\{\bar{c}\}}$ seien wie in der vorangehenden Definition. Der Vaughtsche 2-Kardinalzahlsatz liefert eine Struktur $(\mathcal{B}, \bar{b})$ mit:

$$(\mathcal{B}, \bar{b}) \equiv (\mathcal{A}, \bar{a}),\ |B| = \omega_1 \text{ und } \varphi((\mathcal{B}, \bar{b}), \bar{c}) \text{ abzählbar.}$$

Dann ist $\mathcal{B}$ ein Modell von Σ, das nicht saturiert ist, da $\{\varphi(x, \bar{c})\} \cup \{\neg x = c_a \mid a \in \varphi((\mathcal{B}, \bar{b}), \bar{c})\}$ ein Typ von $\mathrm{Th}(\mathcal{B}, (a)_{a\in\varphi((\mathcal{B},\bar{b}),\bar{c})\}\cup\{\bar{b}\}})$ ist, der nicht erfüllt wird. Wegen 25.5 ist daher $\mathcal{B}$ nicht ω_1-kategorisch. □

Lemma 27.8 *Ist $\mathcal{B}$ eine unendliche Boolesche Algebra, die keinen Baum von Elementen enthält, so gibt es ein $b \in B$, zu dem genau ein freier Ultrafilter U existiert mit $b \in U$.*

Beweis: Wäre die Behauptung falsch, so würde das folgende gelten:

> Zu jedem freien Ultrafilter U und jedem $b \in U$ gibt es einen weiteren freien Ultrafilter U' mit $b \in U'$. Für $a \in U$ mit $a \notin U'$ gilt dann $(b \wedge a) \in U$ und $(b \wedge \sim a) \in U'$.

Hiermit ist es leicht, induktiv einen Baum von Elementen zu gewinnen. $\square$

Bemerkung 27.9 *Gelte* $(\square)$*, sei* Σ ω*-stabil und habe* Σ *kein Vaughtsches Paar. Dann hat* Σ *Primerweiterungen.*

Beweis: Sei $\mathcal{A} \models \Sigma$. Wir zeigen, dass $\mathcal{A}$ eine Primerweiterung besitzt. Da Σ ω-stabil ist, enthält $\mathcal{L}_1(\mathrm{Th}(\mathcal{A}(A))$ keinen Baum von Elementen. Wegen des vorangehenden Lemmas gibt es also ein $\varphi \in L_1^{S(A)}$, $\varphi = \varphi(x, c_{a_1}, \ldots, c_{a_l})$, zu dem genau ein freier vollständiger 1-Typ Φ von $\mathrm{Th}(\mathcal{A}(A))$ existiert mit $\varphi \in \Phi$. Sei $\mathcal{A}'$ eine elementare Erweiterung von $\mathcal{A}$, die Φ erfüllt, etwa $\mathcal{A}'(A) \models \Phi[a_0]$. Wegen 26.4 können wir annehmen, dass $\mathcal{A}'$ prim über $A \cup \{a_0\}$ ist. Wir zeigen, dass $\mathcal{A}'$ eine Primerweiterung von $\mathcal{A}$ ist. Ist nämlich $\mathcal{B}$ eine beliebige echte elementare Erweiterung von $\mathcal{A}$, so gibt es ein $b \in B$ mit $b \in \varphi(\mathcal{B}(A), c_{a_1}, \ldots, c_{a_l})$ und $b \notin \varphi(\mathcal{A}(A), c_{a_1}, \ldots, c_{a_l})$, da Σ kein Vaughtsches Paar hat. Da $[b]_{\mathcal{B}(A)}$ in $\mathcal{A}(A)$ nicht angenommen wird, ist $[b]_{\mathcal{B}(A)}$ kein Haupttyp von $\mathrm{Th}(\mathcal{B}(A))$ $(= \mathrm{Th}(\mathcal{A}(A)))$; somit $[b]_{\mathcal{B}(A)} = \Phi$, also $(\mathcal{A}', (a)_{a \in A}, a_0) \equiv (\mathcal{B}, (a)_{a \in A}, b)$, d.h. $\mathrm{id}_A \cup \{(a_0, b)\} : A \cup \{a_0\} \to B$ ist elementar. Da $\mathcal{A}'$ prim über $A \cup \{a_0\}$ ist, gibt es ein $\pi : \mathcal{A}' \to \mathcal{B}$ mit $\mathrm{id}_A \cup \{(a_0, b)\} \subseteq \pi$. $\square$

Satz 27.10 (Morley aufwärts) *Gelte* $(\square)$*. Ist* Σ ω_1*-kategorisch, so ist* Σ κ*-kategorisch für jedes* $\kappa > \omega_1$*.*

Beweis: Wegen Teil 2) von 25.2 ist Σ ω-stabil und wegen 27.7 hat Σ kein Vaughtsches Paar. Somit hat Σ Primerweiterungen nach der vorangehenden Bemerkung. Die Behauptung folgt nun aus 27.3. $\square$