Mathematische Logik

Universität Freiburg

SS 2009

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/flum/ss09/

Was ist ein mathematischer Beweis?

Analyse des Beweisbegriffes, der Beweise, wie wir sie in der Mathematik antreffen.

Der/Die Mathematiker/in muss seine/ihre Behauptungen beweisen.

- Wandel im Laufe der Jahrhunderte
- “Experimente” in der Mathematik
- weitere Tätigkeiten
  - das Aufspüren wichtiger Zusammenhänge und Behauptungen
  - das Herauskristallisieren des mathematischen Kerns eines Problems
  - das geeignete Modellieren
  - die geschickte Einführung von Begriffen

Was ist ein mathematischer Beweis?

- Welches Interesse haben wir an der Behandlung dieser Frage?
- Welchen Nutzen ziehen wir aus der Behandlung dieser Frage?

Welches Interesse haben wir an der Behandlung dieser Frage?

Erkenntnistheoretisches Anliegen

Aristoteles (384 - 322 v. Chr.)

- Regeln des Schließens

Welchen Nutzen ziehen wir aus der Behandlung dieser Frage?

(1) Ist jede wahre mathematische Aussage beweisbar?

GOLDBACHSCHE VERMUTUNG: Jede gerade Zahl ≥ 4 ist die Summe von zwei Primzahlen.

2. Ist jede mathematische Aussage wahr oder falsch?

KONTINUUMSHYPOTHESE (CH): Für jede nichtleere Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ gilt:
Es gibt $f : \mathbb{N} \to X$ surjektiv oder es gibt $f : X \to \mathbb{R}$ surjektiv.

3. Ist die Mathematik widerspruchsfrei?

4. Kann man das Beweisen Computern überlassen?

   Gibt es also ein Programm, das folgendes leistet:

   INPUT: Axiome einer mathematischen Theorie und eine Behauptung (Vermutung)

   OUTPUT: Behauptung richtig (Beweis) oder Behauptung ist falsch (Gegenbeispiel).

Aristoteles (384 - 322 v. Chr.)

Schule der Sophisten

Achilles und die Schildkröte

Achilles und die Schildkröte laufen ein Wettrennen. Achilles gewährt der Schildkröte einen Vorsprung. Dann kann Achilles die Schildkröte niemals einholen.

Zenon von Elea (490 - 425 v. Chr.) gibt folgende Begründung: Zu dem Zeitpunkt, an dem Achilles den Startpunkt der Schildkröte erreicht, ist die Schildkröte schon ein Stück weiter. Etwas später erreicht Achilles diesen Punkt, aber die Schildkröte ist schon etwas weiter. Wenn Achilles diesen Punkte erreicht, ist die Schildkröte wieder etwas weiter. So kann Achilles zwar immer näher an die Schildkröte herankommen, sie aber nie erreichen.

Der Barbier

In einem Städtchen wohnt ein Barbier, der genau diejenigen männlichen Einwohner rasieren soll, die sich nicht selbst rasieren.

Rasiert nun der Barbier sich selbst?

Antinomie des Lügners

Epimenides (Kreta, 600 v. Chr.)

Brief des Paulus an Titus 1:12-13:

Einer von ihren eigenen Landsleuten war ein Prophet, als er sagte: "Die Kreter lügen immer. Sie sind Raubtiere, liegen auf der faulen Haut und denken nur ans Fressen." Er hat die Wahrheit gesagt.

Aristoteles: Überblick über die Regeln des Schließens (Syllogismen).

Prämisse:	Alle *Menschen* sind *sterblich*.
Prämisse:	*Sokrates* ist ein *Mensch*.
Konklusion:	*Sokrates* ist *sterblich*.

Prämisse:	Alle *Sura* sind *derung*.
Prämisse:	*Plarq* ist ein *Sura*.
Konklusion:	*Plarq* ist *derung*.

Prämisse:	Alle p sind q.
Prämisse:	a ist ein p.
Konklusion:	a ist q.

Ziel: Alle Schlußregeln.

R. Llullus (1235–1315)

G. W. Leibniz (1646–1716)

G. Boole (1815–1864)

G. Frege (1848–1925)

D. Hilbert (1862–1943)

B. Russell (1872–1970)

K. Gödel (1906–1978)

Ein Chinese hat das Pulver entdeckt.

Ein Chinese ist ein Asiat.

Eine differenzierbare Funktion ist Lösung der Gleichung $f'' + f = 0$.

Eine differenzierbare Funktion ist stetig.

Literatur:

Cori, Lascar: Mathematical Logic I, II. Oxford University Press.

Ebbinghaus, Flum, Thomas: Einführung in die mathematische Logik. Spektrum

Enderton: A mathematical introduction to logic. Academic Press

Prestel: Einführung in die mathematische Logik und Modelltheorie. Vieweg

Rautenberg: Einführung in die mathematische Logik. Vieweg

Bemerkung 1. Sei $M \neq \emptyset$. Dann sind äquivalent:

(i) M ist höchstens abzählbar.

(ii) Es existiert ein surjektives $f : \mathbb{N} \to M$.

(iii) Es existiert ein injektives $f : M \to \mathbb{N}$.

Folgerung. a) ...

b) Für $n \in \mathbb{N}$ sei A_n höchstens abzählbar. Dann ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ höchstens abzählbar.

Natürliche Zahlen als Wörter

$\Sigma := \{|\}$ $\qquad n \mapsto \underbrace{|\ldots|}_{n}$ $\quad (:= [n]_1 \ \in \Sigma^*)$ $\qquad [0]_1 = \lambda$

$b \geq 2,\ \ \Sigma_b := \{0, \ldots, b-1\}.$

$$[\ \ ]_b : \mathbb{N} \longrightarrow \Sigma_b^*$$

$$n \mapsto [n]_b \qquad b\text{-adische Darstellung von } n$$

$[25]_3 = 221, \quad \text{da} \ \ 25 = 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0$

$[0]_3 = 0 \ \ (\text{per definitionem})$

$[81]_3 = 10000, \quad \text{da} \ \ 81 = 1 \cdot 3^4 + 0 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0$

$[b^m]_b = 1\underbrace{0\ldots0}_{m}, \ \text{d.h.} \ |[b^m]| = m + 1.$

$[b^m]_b = 1\underbrace{0\ldots0}_{m}$, d.h. $|[b^m]| = m+1$, d.h.

b^m ist die kleinste Zahl, deren b-adische Darstellung die Länge $m+1$ hat. $(*)$

$b^{m+1}-1$ ist die größte Zahl, deren b-adische Darstellung die Länge $m+1$ hat. $(+)$

Sei $n > 0$. Für $m := |[n]_b| - 1$ erhalten wir mit $(*)$

$$b^{|[n]_b|-1} \leq n$$

und mit $(+)$

$$n < b^{|[n]_b|}.$$

Somit

$$b^{|[n]_b|-1} \leq n < b^{|[n]_b|}.$$

Daher

$$|[n]_b| - 1 \leq \log_b n < |[n]_b|,$$

d.h.

$$|[n]_b| = \lfloor \log_b n \rfloor + 1, \qquad \text{also} \qquad |[n]_b| \approx \log_b n.$$

$$|[n]_b| - 1 \leq \log_b n < |[n]_b|$$

Seien $a, b \in \mathbb{N}$, $a, b \geq 2$, $n > 0$

$$|[n]_b| \quad \leq \quad \log_b n + 1 = \log_b a \cdot \log_a n + 1 \leq \log_b a \cdot |[n]_a| + 1 \leq \underbrace{(\log_b a + 1)}_{c} \cdot |[n]_a|.$$

$c = c(a, b)$ unabhängig von n

Dagegen: $|[n]_1| = n = b^{\log_b n} \approx b^{|[n]_b|}$.

Beispiele von Verfahren (Algorithmus):

(1) zur Addition von natürlichen Zahlen (in Dezimaldarstellung);

(2) zur Prüfung, ob vorgegebene Zahl eine Primzahl ist;

(3) zur Auflistung der Primzahlen.

Unterschiede:

- mehrere, ein oder kein Input;
- stoppt mit Output; mit ja/nein Antwort; läuft unendlich lange und liefert unendlich viele Outputs.

Gemeinsamkeiten und Normierungen, die zu einem “mathematisch brauchbaren” intuitiven Begriff führen werden:

(1) Ein Verfahren ist gegeben durch eine (endliche) Vorschrift. Ausführung, Verlauf und Ergebnis sind durch diese und die Inputs in allen Einzelheiten festgelegt (Reproduzierbarkeit).

(2) Verfahren operiert schrittweise mit konkreten, handhabbaren Objekten; System hat diskrete Zustände.

$2'$. Verfahren operiert mit Zeichenreihen über einem (endlichen) Alphabet.

3. Kein Mangel an Zeit, Raum und Materie.

Σ sei ein endliches Alphabet und $W \subseteq \Sigma^*$.

(1) Sei $\mathcal{V}$ ein Verfahren. $\mathcal{V}$ ist Entscheidungsverfahren für W, falls $\mathcal{V}$ bei jeder Eingabe $x \in \Sigma^*$ schließlich hält; ist $x \in W$, so steht dann λ in der Ergebniszeile sonst ein von λ verschiedenes Wort aus Σ^*.

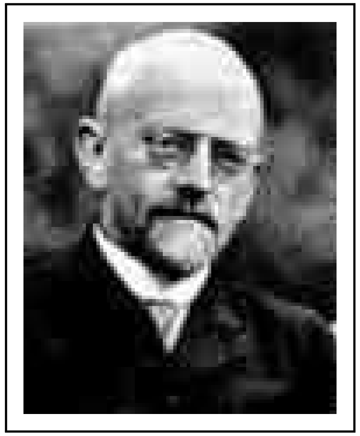
(2) W ist entscheidbar, falls es ein Entscheidungsverfahren für W gibt.

Σ sei ein Alphabet, $r \geq 1$, $\mathcal{V}$ ein Verfahren. $f_{\mathcal{V},r}$ ist die Funktion mit $\mathrm{df}(f_{\mathcal{V},r}) \subseteq (\Sigma^*)^r$, $\mathrm{bd}(f_{\mathcal{V},r}) \subseteq \Sigma^*$ für die gilt:

$$(x_1, \ldots, x_r) \in \mathrm{df}(f_{\mathcal{V},r}) \quad \text{gdw} \quad \text{bei Eingabe } (x_1, \ldots, x_r) \text{ hält } \mathcal{V} \text{ schließlich}$$

und für $(x_1, \ldots, x_r) \in \mathrm{df}(f_{\mathcal{V},r})$ und $y \in \Sigma^*$ gilt $f_{\mathcal{V},r}(x_1, \ldots, x_r) = y$, wenn $\mathcal{V}$ bei Eingabe $(x_1, \ldots, x_r)$ mit y in der Ergebniszeile hält.

3. Eine Funktion f mit $\mathrm{df}(f) \subseteq (\Sigma^*)^r$, $\mathrm{bd}(f) \subseteq \Sigma^*$ ist berechenbar, wenn es ein Verfahren $\mathcal{V}$ gibt mit $f = f_{\mathcal{V},r}$.

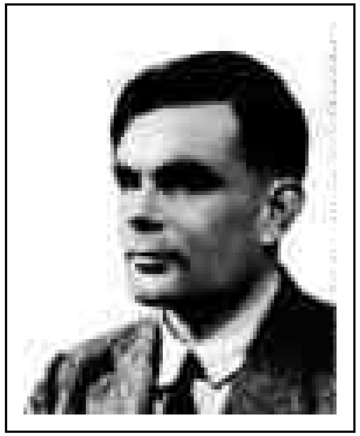


D. HILBERT (1862–1943)

Internationaler Mathematikerkongreß 1900 (Paris)

10. Entscheidung der Lösbarkeit einer diophantischen Gleichung.

Eine diophantische Gleichung mit irgendwelchen Unbekannten und mit ganzen rationalen Zahlkoeffizienten sei vorgelegt; man soll ein Verfahren angeben, nach welchem sich mittels einer endlichen Anzahl von Operationen entscheiden läßt, ob die Gleichung in den ganzen rationalen Zahlen lösbar ist.



ALAN TURING (1912–1954)

On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem (1936)

http://www.turing.org.uk/turing/

(1) $k\ R_i \leftarrow R_i + a$ $\qquad (k, i \in \mathbb{N},\ a \in \Sigma)$

Verlängerungsanwsg.: Füge a an Wort in R_i.

(2) $k\ R_i \leftarrow [R_i)$ $\qquad (k, i \in \mathbb{N})$

Verkürzungsanwsg: Streiche letzten Buchstaben in R_i; falls λ in R_i, so bleibt λ in R_i.

(3) $k\ R_i = [R_i)a \Rightarrow \ell; m$ $\qquad (k, i, \ell, m \in \mathbb{N},\ a \in \Sigma)$

Sprunganwsg.: Falls Wort in R_i mit a endet, gehe zu Zeile mit der Nummer ℓ sonst zur Zeile m.

(4) k PRINT R_i $\qquad (k, i \in \mathbb{N})$

Druckanwsg: Drucke Wort in R_i.

(5) k HALT $\qquad (k \in \mathbb{N})$

Halteanwsg: Halte.

P_1

0 $R_1 = [R_1)| \Rightarrow 1; ?$

1 $R_1 \leftarrow [R_1)$

2 $R_0 \leftarrow R_0 + |$

3 $R_0 \leftarrow R_0 + |$

4 $R_0 = [R_0)| \Rightarrow 0; 0$

P_1

0 $R_1 = [R_1)| \Rightarrow 1; 5$

1 $R_1 \leftarrow [R_1)$

2 $R_0 \leftarrow R_0 + |$

3 $R_0 \leftarrow R_0 + |$

4 $R_0 = [R_0)| \Rightarrow 0; 0$

5 HALT

P_1

0 $R_1 = [R_1)| \Rightarrow 1; 5$

1 $R_1 \leftarrow [R_1)$

2 $R_0 \leftarrow R_0 + 1$

3 $R_0 \leftarrow R_0 + |$

4 $R_0 = [R_0)| \Rightarrow 0; 0$

5 HALT

P_2

0 PRINT R_1

1 $R_1 \leftarrow R_1 + |$

2 $R_1 \leftarrow R_1 + |$

3 $R_0 = [R_0)| \Rightarrow 0; 0$

4 HALT

Einem R-Programm P entspricht auf natürliche Weise ein Verfahren. Wir stellen uns dabei eine Rechenmaschine (Registermaschine) vor, die mit P programmiert ist und über die in P angesprochenen Register verfügt. Soll das Verfahren auf $(x_1, \ldots, x_r)$ angewendet werden, so sind zu Beginn der Berechnung alle Register leer, d.h. es steht in allen Registern das leere Wort, ausgenommen sind die Register $R_1, \ldots, R_r$, in denen sich $x_1, \ldots, x_r$ befinden. Die Berechnung erfolgt schrittweise; ein Schritt entspricht dabei der Ausführung einer Zeile. Beginnend mit der ersten Zeile wird dabei Zeile für Zeile abgearbeitet; es sei denn, dass durch eine Sprunganweisung eine andere Zeile aufgerufen wird. Ausgabewörter sind die evtl. bei Druckanweisungen ausgedruckten Wörter. Die Maschine hält, wenn die Halteanweisung erreicht wird.

P R-Programm, $r \geq 1$.

$f_{P,r}$ sei die Funktion mit

$$\mathrm{df}(f_{P,r}) \subseteq (\Sigma^*)^r \text{ und } \mathrm{bd}(f_{P,r}) \subseteq \Sigma^*$$

für die gilt:

$$(x_1, \ldots, x_r) \in \mathrm{df}(f_{P,r}) \quad \text{gdw} \quad P : (x_1, \ldots, x_r) \to \mathit{halt}$$

und für $(x_1, \ldots, x_r) \in \mathrm{df}(f_{P,r})$:

$$f_{P,r}(x_1, \ldots, x_r) = y \quad \text{gdw} \quad P : (x_1, \ldots, x_r) \to y.$$

Definitionen. $W \subseteq (\Sigma^*)^r$, P R-Programm.

(1) P entscheidet W gdw für $(x_1, \ldots, x_r) \in (\Sigma^*)^r$:

$$P : (x_1, \ldots, x_r) \to \lambda, \ \text{ falls } (x_1, \ldots, x_r) \in W,$$

$$P : (x_1, \ldots, x_r) \to y \text{ mit } y \neq \lambda, \ \text{ falls } (x_1, \ldots, x_r) \notin W.$$

(2) W Register-entscheidbar (R-entscheidbar) gdw ex. R-Programm, das W entscheidet.

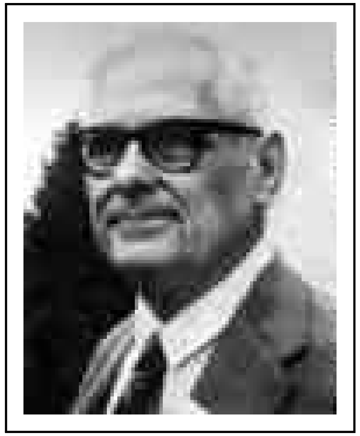
$W \subseteq \Sigma^*$, P R-Programm.

(1) P zählt W auf gdw P angesetzt auf λ druckt genau alle Wörter aus W aus (in irgendeiner Reihenfolge, ggf. mit Wiederholungen).

(2) W R-aufzählbar gdw existiert ein R-Programm, das W aufzählt.

(3) f mit $\text{df}(f) \subseteq (\Sigma^*)^r$ und $\text{bd}(f) \subseteq \Sigma^*$ ist R-berechenbar gdw exitiert ein R-Programm Q mit $f = f_{Q,r}$.

Alonzo Church (1903–1995)



Bemerkungen und Beispiele I

(1) $\Sigma = \{|\}$. Dann: $\{(n,k) \mid n < k\}$ ist R-entscheidbar.

(2) $\Sigma = \{0, \ldots, 9\}$. Die Menge $\{p \mid p \text{ Primzahl}\}$ ist R-entscheidbar.

(3) Σ Alphabet, $r \geq 1$.

- $(\Sigma^*)^r$ ist R-entscheidbar.
- Jede endliche Teilmenge von $(\Sigma^*)^r$ ist R-entscheidbar.
- Sind $W_1, W_2 \subseteq (\Sigma^*)^r$ R-entscheidbar, so auch $W_1 \cap W_2$, $W_1 \cup W_2$, $(\Sigma^*)^r \setminus W_1$ und $W_1 \setminus W_2$.

Beweis: Siehe § 2.

Bemerkungen und Beispiele II

(1) $\Sigma = \{0, \ldots, 9\}$. Die Menge der Primzahlen ist R-aufzählbar.

(2) $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Es gibt ein R-Programm, das Σ^* in lexikographischer Reihenfolge (bzgl. $a_1, \ldots, a_n$) aufzählt.

(3) Jede R-entscheidbare Menge ist R-aufzählbar.

(4) $W \subseteq W_0 \subseteq (\Sigma^*)^r$, W_0 R-entscheidbar. Dann

$$W \text{ R-entscheidbar} \iff W \text{ und } W_0 \setminus W \text{ R-aufzählbar.}$$

Insbesondere

$$W \text{ R-entscheidbar} \iff W \text{ und } (\Sigma^*)^r \setminus W \text{ R-aufzählbar.}$$

Beweis: Siehe § 2.

Es gibt nur endlich viele natürliche Zahlen, welche in der deutschen Sprache mit einem Text der Länge ≤ 1000 definiert werden können.

Es gibt eine kleinste natürliche Zahl n_0, welche nicht in der deutschen Sprache mit einem Text der Länge ≤ 1000 definiert werden kann.

n_0 ist die kleinste natürliche Zahl,
$(*)$ welche nicht in der deutschen Sprache
mit einem Text der Länge ≤ 1000
definiert werden kann.

$(*)$ ist eine Definition von n_0 in der deutschen Sprache mit einem Text der Länge ≤ 1000.

Σ endliches Alphabet.

$$G_0 : \{P \mid P \text{ R-Programm über } \Sigma\} \to \Sigma^*$$

$$x_P := G_0(P) \qquad x_P \text{ die Gödelnummer von } P$$

Bem. 1: $\Pi := \{x_P \mid P$ R-Programm über $\Sigma\}$ ist R-entscheidbar.

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{halt}} &:= \{x_P \mid P : \lambda \to \text{halt}\} \\ \Pi_{\infty} &:= \{x_P \mid P : \lambda \to \infty\} \\ \Pi_{\text{s, halt}} &:= \{x_P \mid P : x_P \to \text{halt}\} \\ \Pi_{\text{s},\infty} &:= \{x_P \mid P : x_P \to \infty\} \end{aligned}$$

Bem. 2: $\Pi_\infty = \Pi \setminus \Pi_{\text{halt}}$ und $\Pi_{\text{s},\infty} = \Pi \setminus \Pi_{\text{s, halt}}$.

Bem. 3: Π_∞ und $\Pi_{\text{s},\infty}$ sind nicht R-aufzählbar.

Unentscheidbarkeit des Halteproblems: Π_{halt} und $\Pi_{\text{s, halt}}$ sind nicht R-entscheidbar.

Bem. 4: Π_{halt} und $\Pi_{\text{s, halt}}$ sind R-aufzählbar.

Es ist unentscheidbar, ob ein R-Programm $\underline{\underline{P}}$ angesetzt auf λ hält.

Es ist unentscheidbar, ob ein R-Programm $\underline{\underline{P}}$ angesetzt auf $\underline{\underline{x}}$ $(\in \Sigma^*)$ hält.

Es ist unentscheidbar, ob ein Verfahren $\underline{\underline{\mathcal{V}}}$ angesetzt auf λ hält.

Es ist unentscheidbar, ob ein R-Programm $\underline{\underline{\mathcal{V}}}$ angesetzt auf einen beliebigen $\underline{\underline{\text{Input}}}$ hält.

PGN Menge der Polynome in mehreren Unbekannten mit ganzzahligen Koeffizienten, die eine ganzzahlige Nullstelle haben.

Satz von Matijasevic (1970):

PGN ist nicht R-entscheidbar.

Somit: Es ist nicht entscheidbar, ob ein Polynom $\underline{\underline{p(x_1, \ldots, x_l)}} \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_l]$ eine Nullstelle in $\mathbb{Z}$ besitzt (d.h. ob ex. $z_1, \ldots, z_l \in \mathbb{Z}$ mit $p(z_1, \ldots, z_l) = 0$).

Lemma von Matijasevic: $M \subseteq \mathbb{N}$ R-aufzählbar.
Dann ex. $l \geq 1$ und $p(x_1, \ldots, x_l) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_l]$ mit

$$M = W_{\mathbb{N}}(p) := \{p(z_1, \ldots, z_l) \mid \bar{n} \in \mathbb{N},\, p(z_1, \ldots, z_l) \geq 0\}.$$

Die Ausgangsfunktionen:

- die Nachfolgerfunktion $nf : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$nf(m) := m + 1.$$

- die Identitätsfunktionen $id_i^k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ $(k \geq 1,\ 1 \leq i \leq k)$

$$id_i^k(m_1, \ldots, m_k) := m_i$$

- die konstante Funktion $c : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$c(m) := 0.$$

Die Prozesse.

– der Einsetzungsprozess: Seien $h_1, \dots, h_r, f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ $(r, k \geq 1)$ und $g : \mathbb{N}^r \to \mathbb{N}$. Gilt für alle $\bar{m} = (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{N}^k$

$$f(\bar{m}) = g(h_1(\bar{m}), \dots, h_r(\bar{m})),$$

so sagt man, dass f aus g durch Einsetzung von $h_1, \dots, h_r$ entsteht.

– der Induktionssprozess: Sei $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$. Gilt für alle $\bar{m} = (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{N}^k$, $\ell \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} f(\bar{m}, 0) &= g(\bar{m}) \\ f(\bar{m}, \ell + 1) &= h(\bar{m}, \ell, f(\bar{m}, \ell)), \end{aligned}$$

so sagt man, dass f durch Induktion aus g und h entsteht.

– der μ-Operator: Sei $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $(k \geq 1)$, $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$. Zu jedem $\bar{m} = (m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{N}^k$ existiere ein ℓ mit $g(\bar{m}, \ell) = 0$. Weiterhin gelte

$$f(\bar{m}) = \text{ das kleinste } \ell \text{ mit } g(\bar{m}, \ell) = 0,$$

so sagt man, dass f aus g durch Anwendung des μ-Operator entsteht.

Definition. Eine Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $(k \geq 1)$, ist μ-rekursiv, wenn sie eine der Ausgangsfunktionen ist, oder wenn sie aus den Ausgangsfunktionen durch endlichmalige Anwendung des Einsetzungsprozesses, des Induktionsprozesses, und des μ-Operators erhalten werden kann.

Satz. Sei $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $(k \geq 1)$. Dann:

$$f \text{ ist R-berechenbar} \iff f \text{ ist } \mu\text{-rekursiv.}$$

Es ist unentscheidbar, ob ein R-Programm $\underline{\underline{P}}$ angesetzt auf λ hält.

Es gibt kein Programm, dass angesetzt auf ein (endliches) $\underline{\underline{\text{Axiomensystem}}}$ und eine $\underline{\underline{\text{Behauptung}}}$ entscheidet, ob die Behauptung aus dem Axiomensystem folgt.

Definition. $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, P R-Programm, V Verfahren, $r \geq 1$,

a) $W \subseteq (\Sigma^*)^r$. P (bzw. V) ist *t-zeitbeschränktes* Entscheidungsverfahren für W, wenn P (bzw. V) W entscheidet und t-zeitbeschränkt ist.

b) $f : (\Sigma^*)^r \to \Sigma^*$. P (bzw. V) ist *t-zeitbeschränktes* Berechnungsverfahren für f, wenn P (bzw. V) f berechnet und t-zeitbeschränkt ist.

- Wenn $p \in \mathbb{R}[x]$, so gibt es ein $q \in \mathbb{N}[x]$ mit

$$\text{für alle } m \in \mathbb{N}\text{:} \quad |p(m)| \leq q(m).$$

- Wenn $p \in \mathbb{N}[x]$, so ist p monoton $(n \leq m \implies p(n) \leq p(m))$.
- Wenn $p, q \in \mathbb{N}[x]$, so sind $p + q$, $p \cdot q$, $p \circ q$ (und für $c \in \mathbb{N}$) $c \cdot p$ in $\mathbb{N}[x]$.

1 Operation $\approx 10^{-6}$ Sekunden

Laufzeit:

	10	30	60
n	10^{-5} Sek.	$3 \cdot 10^{-5}$ Sek.	$6 \cdot 10^{-5}$ Sek.
n^5	10^{-1} Sek.	$24,3$ Sek.	13 Min.
2^n	10^{-3} Sek.	17.9 Min.	366 Jht.

Größe des größten behandelbaren Problems:

	2009	100 $\times$ schneller	1000 $\times$ schneller
n	N_1	$100 \cdot N_1$	$1000 \cdot N_1$
n^5	N_2	$2,5 \cdot N_2$	$3,98 \cdot N_2$
2^n	N_3	$N_3 + 6,64$	$N_3 + 9,97$

Pr Menge der Primzahlen.

Entscheidungsverfahren: $\underline{\underline{n}}$

für $k = 2, \ldots, \sqrt{n}$ prüfe, ob $k|n$.

Also: $n^{\frac{1}{2}}$ Divisionen

– $\Sigma := \{|\}$. Dann $|n| = n$.

Jede Division $\leq c \cdot n^2$ Schritte.

Insgesamt: $\leq n^{\frac{1}{2}} \cdot c \cdot n^2 = c \cdot n^{\frac{5}{2}}$ Schritte.

polynomialer Algorithmus.

– $b \geq 2$, $\Sigma_b = \{0, 1, \ldots, b-1\}$. Dann $|[n]_b| \sim \log_b n$.

Divisionen: $n^{\frac{1}{2}} \sim b^{\frac{1}{2} \cdot \log_b n}$

exponentieller Algorithmus.

– $W \subseteq (\Sigma^*)^r$.

$W \in$ PTIME gdw ex. ein R-Programm P und $q \in \mathbb{N}[x]$ mit:

$$P \text{ ist } q\text{-zeitbeschränktes Entscheidungsverfahren für } W.$$

– $f : (\Sigma^*)^r \to \Sigma^*$.

$f \in$ PTIME gdw ex. R-Programm P und $q \in \mathbb{N}[x]$ mit:

$$P \text{ ist } \ q\text{-zeitbeschränktes Berechnungsverfahren für } f.$$

– Seien Σ und Γ Alphabete, $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$.

$f \in$ PTIME gdw $\tilde{f} \in \mathrm{PTIME}$, wobei $\tilde{f} : (\Sigma \cup \Gamma)^* \to (\Sigma \cup \Gamma)^*$ gegeben ist durch:

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & \text{für } x \in \Sigma^* \\ \lambda, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$G = (P, K)$ Graph:

– P (endliche) Menge, die Menge der Punkte

– $K \subseteq \{\{a, b\} \mid a, b \in P,\ a \neq b\}$, die Menge der Kanten

C Clique in G:

$$\text{für alle } a, b \in C \text{ mit } a \neq b\text{: } \{a, b\} \in K.$$

Clique	*Input:*	Graph $G = (P, K)$ und $k \in \mathbb{N}$.
	Frage:	Gibt es in G eine Clique der Größe k (k-Clique)?

$$\textsc{Clique} := \{(G, k) \mid G \text{ Graph},\ k \in \mathbb{N},\ G \text{ hat } k\text{-Clique}\}$$

$$\textsc{VClique} := \{(G, k, C) \mid G \text{ Graph},\ k \in \mathbb{N},\ C \text{ ist } k\text{-Clique}\}$$

– $\textsc{VClique} \in \text{PTIME}$.

– $(G, k) \in \textsc{Clique} \iff \exists C :\ (G, k, C) \in \textsc{VClique}$.

– $(G, k) \in \textsc{Clique} \iff \exists C : \big(\|C\| \leq \|(G, k)\| \text{ und } (G, k, C) \in \textsc{VClique}\big)$.

Ein Hamilton-Kreis in einem Graphen $G = (P, K)$ ist eine Folge

$$C: \ a_1, \ldots, a_n$$

paarweise verschiedener Punkte mit:

- $P = \{a_1, \ldots, a_n\}$
- $\{a_1, a_2\}, \{a_2, a_3\}, \ldots, \{a_{n-1}, a_n\}, \{a_n, a_1\} \in K$.

Ham	*Input:*	Graph $G = (P, K)$.
	Frage:	Besitzt G ein Hamilton-Kreis?

$$\textsc{Ham} := \{G \mid G \text{ Graph und } G \text{ hat Hamilton-Kreis}\}$$

$$\text{V}\textsc{Ham} := \{(G, C) \mid G \text{ Graph und } C \text{ Hamilton-Kreis in } G\}$$

- V$\textsc{Ham}$ $\in$ PTIME.
- $G \in \textsc{Ham} \iff \exists C: \ (G, C) \in \text{V}\textsc{Ham}$.
- $G \in \textsc{Ham} \iff \exists C: \big(\|C\| \leq \|G\| \text{ und } (G, C) \in \text{V}\textsc{Ham}\big)$.

Quadratische Kongruenzen: $\mathrm{QK} \subseteq \mathbb{N}^3$.

QK	*Input:*	$a, b, c \in \mathbb{N}$
	Frage:	ex. $x \in \mathbb{N}$ ($x < c$ und $x^2 \equiv a \bmod b$)?

$$\mathrm{QK} \quad := \quad \{(a,b,c) \mid \text{ex. } x \in \mathbb{N}\text{: } (x < c \text{ und } x^2 \equiv a \bmod b)\}.$$

$$\mathrm{VQK} \quad := \quad \{(a,b,c,x) \mid x < c \text{ und } x^2 \equiv a \bmod b\}.$$

– $\mathrm{VQK} \in \mathrm{PTIME}$.

– $(a,b,c) \in \mathrm{QK} \iff \exists x : \ (a,b,c,x) \in \mathrm{VQK}$.

– $(a,b,c) \in \mathrm{QK} \iff \exists x : \big(x < c \text{ und } (a,b,c,x) \in \mathrm{VQK}\big)$.

Steve Smale (Fields Medaille 1966)

> . . . it is the most important new problem in mathematics in the last half of this century.

Σ Alphabet. Anweisungen für nichtdeterministische R-Programme: Alle alten Anweisungen, jedoch werden die Sprunganweisungen

$$k\ R_i = [R_i)a \Rightarrow \ell; m$$

ersetzt durch

$$k\ R_i = [R_i)a \Rightarrow L; M \qquad (k, i \in \mathbb{N},\ L, M \subseteq \mathbb{N}, L, M \text{ endlich, nicht leer, } a \in \Sigma)$$

(Nichtdeterministische Sprunganweisungen: Falls Wort in R_i mit a endet, gehe zu einer Zeile mit Zeilennummer in L sonst zu Zeile mit Zeilennummer in M.)

Ein nichtdeterministisches R-Programm ist eine endliche Folge $\alpha_0, \ldots, \alpha_k$ von nichtdeterministischen Anweisungen mit:

(i) Für $i = 0, \ldots, k$: α_i hat die Zeilenr. i.

(ii) Jede (nichtdeterministische) Sprunganweisung verweist nur auf Zeilennummern $\leq k$.

(iii) Genau α_k ist eine Halteanweisung.

P nichtdeterministisches R-Programm, $\mathrm{Reg}(P) \subseteq \{0, \ldots, n\}$.

P wird auf $x_1, \ldots, x_r$ angesetzt (wie im det. Fall definiert).

Wird P auf $x_1, \ldots, x_r$ angesetzt, so kann es verschiedene Berechnungen geben.

$$\begin{array}{ccccccc} \lambda & x_1 & \ldots & x_r & \lambda & \ldots & \lambda \\ & & & \Downarrow P & & & \\ y_0 & y_1 & & \ldots & & & y_n \end{array}$$

bedeute: es gibt eine Berechnung von P angesetzt auf $x_1, \ldots, x_r$, die schließlich hält und dann stehen $y_0, \ldots, y_n$ in $R_0, \ldots, R_n$.

$W \subseteq (\Sigma^*)^r$. P akzeptiert (entscheidet) W gdw für alle $\bar{x} \in (\Sigma^*)^r$:

$$\bar{x} \in W \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{ccccccc} \lambda & x_1 & \ldots & x_r & \lambda & \ldots & \lambda \\ & & & \Downarrow P & & & \\ \lambda & * & & \ldots & & & * \end{array}$$

also: $\bar{x} \in W \iff$ es gibt eine akzept. Berechnung von P angesetzt auf $\bar{x}$.

$\Sigma = \{a, b\}$; $\qquad W = \{x \in \Sigma^* \mid x \text{ enthält } aa\}$

0 $R_1 = [R_1)a \Rightarrow \{1, 3\};\{1\}$

1 $R_1 \leftarrow [R_1)$

2 $R_0 = [R_0)a \Rightarrow \{0\};\{0\}$

3 $R_1 \leftarrow [R_1)$

4 $R_1 = [R_1)a \Rightarrow \{5\}; \{4\}$

5 HALT

$W \subseteq (\Sigma^*)^r$

$W \in$ VPTIME gdw es existiert $Z \subseteq (\Sigma^*)^r \times \Sigma^*$, $Z \in$ PTIME, und $q \in \mathbb{N}[x]$ mit:

$$\text{für alle } \bar{x} \in (\Sigma^*)^r: \quad (\bar{x} \in W \iff \text{ex. } y \in \Sigma^* \big(|y| \leq q(|\bar{x}|) \text{ und } (\bar{x}, y) \in Z\big)$$

P nichtdeterministisches R-Programm, $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $r \geq 1$.

P t-zeitbeschränkt gdw für alle $\bar{x} \in (\Sigma^*)^r$ endet jede Berechnung von P angesetzt auf $\bar{x}$ nach $\leq t(|\bar{x}|)$ Schritten.

$W \subseteq (\Sigma^*)^r$.

$W \in$ NPTIME gdw ex. nichtdeterministisches Programm P und $p \in \mathbb{N}[x]$:

$$P \text{ ist } p\text{-zeitbeschränkt und akzeptiert } W.$$

$\Sigma = \{a_1, \ldots, a_3\}$

0 $R_0 = [R_0)a_1 \Rightarrow \{1, 3, 5, 7\}; \{1, 3, 5, 7\}$

1 $R_8 \leftarrow R_8 + a_1$

2 $R_0 = [R_0)a_1 \Rightarrow \{1, 3, 5, 7\}; \{1, 3, 5, 7\}$

3 $R_8 \leftarrow R_8 + a_2$

4 $R_0 = [R_0)a_1 \Rightarrow \{1, 3, 5, 7\}; \{1, 3, 5, 7\}$

5 $R_8 \leftarrow R_8 + a_3$

6 $R_0 = [R_0)a_1 \Rightarrow \{1, 3, 5, 7\}; \{1, 3, 5, 7\}$

7 $\ldots$

Axiome der Theorie der Äquivalenzrelationen

(r) Für alle x: xRx.

(s) Für alle x, y: Wenn xRy, so yRx.

(t) Für alle x, y, z: Wenn xRy und yRz, so xRz.

Seien x, y gegeben und gelte für ein geeignetes u

$$xRu \text{ und } yRu.$$

Aus (s) erhalten wir dann

$$uRx \text{ und } uRy.$$

Aus xRu und uRy ergibt sich mit (t)

$$xRy, \tag{1}$$

und aus yRu und uRx, ebenfalls mit (t),

$$yRx. \tag{2}$$

Sei nun z beliebig gewählt. Gilt

$$xRz, \tag{3}$$

so erhalten wir aus (2) und (3) mit (t)

$$yRz.$$

Gilt umgekehrt

$$yRz, \tag{4}$$

so erhalten wir aus (1) und (4) mit (t) $\qquad xRz.$

Alphabet Σ_S der Sprache der ersten Stufe zur Symbolmenge S:

(a) Variable: v_1, v_2,... $\qquad x, y, z$

(b) Junktoren: $\neg$ "nicht", $\wedge$ "und", $\vee$ "oder",
$\rightarrow$ "wenn – so",$\leftrightarrow$ "genau dann, wenn"

(c) Quantoren: $\forall$ "für alle", $\exists$ "es gibt"

(d) Gleichheitszeichen: $\equiv$

(e) Hilfssymbole:), (, ,

(f) die Symbole in S.

Somit

$$\Sigma_S = \Sigma_0 \cup S,$$

wobei Σ_0 die Menge der in (a) bis (e) vorkommenden Symbole bezeichnet.

$$V := \{v_1, v_2, \ldots\}$$

ist die Menge der Variable.

Für $S = \{\underset{2}{f}, \underset{1}{g}, c, \underset{3}{P}, \underset{4}{R}\}$ ist

$$g(f(c, v_7))$$

ein S-Term.

Ableitung:

1	c	(T2)
2	v_7	(T1)
3	$f(c, v_7)$	(T3) auf 1,2
4	$g(f(c, v_7))$	(T3) auf 3

1	v_7	(T1)
2	c	(T2)
3	$f(c, v_7)$	(T3) auf 2,1
4	$g(f(c, v_7))$	(T3) auf 3

Für $S = \{\underset{2}{+}, \underset{2}{\cdot}\}$ ist

$$+(v_3, \cdot(v_2, v_3))$$

ein S-Term.

Ableitung:

1	v_2	(T1)
2	v_3	(T1)
3	$\cdot(v_2, v_3)$	(T3) auf 1,2
4	$+(v_3, \cdot(v_2, v_3))$	(T3) auf 2,3

Für $S_{\text{Äq}} = \{\underset{2}{R}\}$ sind $S_{\text{Äq}}$-Ausdrücke:

$$\forall v_1 R v_1 v_1$$

$$\forall v_1 \forall v_2 (R v_1 v_2 \rightarrow R v_2 v_1)$$

$$\forall v_1 \forall v_2 \forall v_3 ((R v_1 v_2 \wedge R v_2 v_3) \rightarrow R v_1 v_3)$$

Ableitungen:

1	$R v_1 v_1$	(A2)
2	$\forall v_1 R v_1 v_1$	(A5) auf 1

1	$R v_1 v_2$	(A2)
2	$R v_2 v_1$	(A2)
3	$(R v_1 v_2 \rightarrow R v_2 v_1)$	(A4) auf 1,2
4	$\forall v_2 (R v_1 v_2 \rightarrow R v_2 v_1)$	(A5) auf 3
5	$\forall v_1 \forall v_2 (R v_1 v_2 \rightarrow R v_2 v_1)$	(A5) auf 4

Für $S := \{\underset{1}{P}, \underset{1}{f}, c\}$ ist ein S-Ausdruck:

$$(\forall x \exists x Px \wedge \forall y f(c) \equiv c)$$

Ableitung:

1	$f(c) \equiv c$	(A1)
2	$\forall y f(c) \equiv c$	(A5) auf 2
3	Px	(A2)
4	$\exists x Px$	(A5) auf 3
5	$\forall x \exists x Px$	(A5) auf 4
6	$(\forall x \exists x Px \wedge \forall y f(c) \equiv c)$	(A4) auf 5,2

$$\text{(T1)} \quad \frac{}{x} \qquad\qquad \text{(T2)} \quad \frac{}{c}\; c \in S \qquad\qquad \text{(T3)} \quad \frac{t_1, \ldots, t_n}{f(t_1, \ldots, t_n)}\; f \in S \; n\text{-st.}$$

$$\text{(A1)} \quad \frac{}{t_1 = t_2} \quad t_1, t_2 \in T^S$$

$$\text{(A2)} \quad \frac{}{Rt_1 \ldots t_r} \quad R \in S \text{ r-stellig}, t_1, \ldots, t_r \in T^S$$

$$\text{(A3)} \quad \frac{\varphi}{\neg\varphi}$$

$$\text{(A4)} \quad \frac{\varphi, \psi}{(\varphi * \psi)} \quad * \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$$

$$\text{(A5)} \quad \frac{\varphi}{\forall x\varphi} \qquad\qquad \frac{\varphi}{\exists x\varphi}$$

Beweis durch Induktion über den Kalkül K: Will man zeigen, daß alle mit K ableitbaren Wörter eine Eigenschaft E haben, so genügt hierzu der Nachweis, daß

> für jede Regel
> $$\frac{\xi_1, \ldots, \xi_n}{\xi}$$
> des Kalküls K gilt: Wenn $\xi_1, \ldots, \xi_n$ in K ableitbar sind und die Eigenschaft E haben (*Induktionsvoraussetzung*), so hat auch ξ die Eigenschaft E.

Im Fall $n = 0$ müssen wir also zeigen, daß ξ die Eigenschaft E hat.

Induktion über den Aufbau der Terme: Um nachzuweisen, daß alle S-Terme eine Eigenschaft E haben, reicht es, zu zeigen:

(T1): Jede Variable hat die Eigenschaft E.

(T2): Jede Konstante aus S hat die Eigenschaft E.

(T3): Haben die S-Terme $t_1, \ldots, t_n$ die Eigenschaft E und ist $f \in S$ n-stellig, so hat $f(t_1, \ldots, t_n)$ die Eigenschaft E.

(T3): $t_1 = f(t'_1, \ldots, t'_r)$ mit r-stelligem f.

Dann beginnt s_1 mit f und somit gibt es Terme $s'_1, \ldots, s'_r$ mit $s_1 = f(s'_1, \ldots, s'_r)$. Daher

$$f(t'_1, \ldots, t'_r)t_2 \ldots t_m = f(s'_1, \ldots, s'_r)s_2 \ldots s_k\xi$$

und somit

$$t'_1, \ldots, t'_r)t_2 \ldots t_m = s'_1, \ldots, s'_r)s_2 \ldots s_k\xi$$

Da $|t'_1|, |s'_1| < |t_1 \ldots t_m|$ gilt nach Ind.vor. $t'_1 = s'_1$; entsprechend erhält man nacheinander

$$t'_2 = s'_2, \ldots, t'_r = s'_r.$$

Also insgesamt $t_1 = f(t'_1, \ldots, t'_r) = f(s'_1, \ldots, s'_r) = s_1$. Weiterhin ist

$$t_2 \ldots t_m = s_2 \ldots s_k\xi$$

Da $|t_2 \ldots t_m| < |t_1 \ldots t_m|$ und $m - 1 \leq k - 1$ gilt nach Ind.vor.

$$m - 1 = k - 1, \quad t_2 = s_2, \ldots, t_m = s_m \text{ und } \xi = \lambda.$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{fr}((\exists u Rxu \wedge \exists y \forall x (Ryx \vee Ryu)))\\
&\quad = \quad \mathrm{fr}(\exists u Rxu) \cup \mathrm{fr}(\exists y \forall x (Ryx \vee Ryu))\\
&\quad = \quad \Big(\mathrm{fr}(Rxu) \setminus \{u\}\Big) \cup \Big(\mathrm{fr}(\forall x (Ryx \vee Ryu)) \setminus \{y\}\Big)\\
&\quad = \quad \Big(\{x, u\} \setminus \{u\}\Big) \cup \Big(\mathrm{fr}((Ryx \vee Ryu)) \setminus \{y, x\}\Big)\\
&\quad = \quad \{x\} \cup \Big((\mathrm{fr}(Ryx) \cup \mathrm{fr}(Ryu)) \setminus \{y, x\}\Big)\\
&\quad = \quad \{x\} \cup \Big((\{y, x\} \cup \{y, u\}) \setminus \{y, x\}\Big)\\
&\quad = \quad \{x\} \cup \{u\}\\
&\quad = \quad \{x, u\}.
\end{aligned}
$$

Sei S eine Symbolmenge.

Eine S-Struktur ist ein Paar

$$\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{a})$$

bestehend aus

- einer nicht leeren Menge A, dem Träger, (Grundbereich, Universum von $\mathfrak{A}$);
- einer auf S definierten Abbildung $\mathfrak{a}$, die
  - für alle $n \geq 1$ jedem n-stelligen Relationssymbol $R \in S$ eine n-stellige Relation $\mathfrak{a}(R) \subseteq A^n$ zuordnet;
  - für alle $n \geq 1$ jedem n-stelligen Funktionssymbol $f \in S$ eine n-stellige Funktion $\mathfrak{a}(f) : A^n \to A$ zuordnet;
  - jedem Konstantensymbol $c \in S$ ein Element $\mathfrak{a}(c) \in A$ zuordnet.

$$S = \{\underset{2}{g}\}, \quad \mathfrak{R} = (\mathbb{R}, \cdot), \quad \mathfrak{I} = (\mathfrak{R}, \beta) \text{ mit } \beta(v_n) = \begin{cases} n & n \text{ ungerade} \\ -n & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{I} \models \neg\exists v_1 g(v_1, v_1) \equiv v_2 \\
\Longleftrightarrow \quad & \text{nicht } \mathfrak{I} \models \exists v_1 g(v_1, v_2) \equiv v_2 \\
\Longleftrightarrow \quad & \text{nicht ex. } r \in \mathbb{R} : \ \mathfrak{I}\frac{r}{v_1} \models g(v_1, v_1) \equiv v_2 \\
\Longleftrightarrow \quad & \text{nicht ex. } r \in \mathbb{R} : \ \mathfrak{I}\frac{r}{v_1}(g(v_1, v_1)) = \mathfrak{I}\frac{r}{v_1}(v_2) \\
\Longleftrightarrow \quad & \text{nicht ex. } r \in \mathbb{R} : \ \mathfrak{I}\frac{r}{v_1}(v_1) \cdot \mathfrak{I}\frac{r}{v_1}(v_1) = \beta\frac{r}{v_1}(v_2) \\
\Longleftrightarrow \quad & \text{nicht ex. } r \in \mathbb{R} : \ \beta\frac{r}{v_1}(v_1) \cdot \beta\frac{r}{v_1}(v_1) = -2 \\
\Longleftrightarrow \quad & \text{nicht ex. } r \in \mathbb{R} : \ r \cdot r = -2.
\end{aligned}$$

Somit $\mathfrak{I} \models \neg\exists v_1 g(v_1, v_1) \equiv v_2$.

Entsprechend: $\mathfrak{I} \models \neg\exists v_{116} g(v_{116}, v_{116}) \equiv v_2$.

Dagegen: $\mathfrak{I} \not\models \neg\exists v_1 g(v_1, v_1) \equiv v_3$, da $\mathfrak{I} \models \exists v_1 g(v_1, v_1) \equiv v_3$.

$S_{\text{Äq}} = \{\underset{2}{R}\}$:

$$\Phi_{\text{Äq}} \begin{cases} \forall v_1 R v_1 v_1 \\ \forall v_1 \forall v_2 (R v_1 v_2 \rightarrow R v_2 v_1) \\ \forall v_1 \forall v_2 \forall v_3 ((R v_1 v_2 \wedge R v_2 v_3) \rightarrow R v_1 v_3) \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
\varphi^* &:= \varphi \quad \text{wenn } \varphi \text{ atomar} \\
[\neg\varphi]^* &:= \neg\, [\varphi]^* \\
(\varphi \wedge \psi)^* &:= \neg(\neg\, [\varphi]^* \vee \neg\, [\psi]^*) \\
(\varphi \vee \psi)^* &:= (\varphi^* \vee \psi^*) \\
(\varphi \rightarrow \psi)^* &:= (\neg\, [\varphi]^* \vee \psi^*) \\
(\varphi \leftrightarrow \psi)^* &:= (\neg(\varphi^* \vee \psi^*) \vee \neg(\neg\, [\varphi]^* \vee \neg\, [\psi]^*)) \\
[\forall x \varphi]^* &:= \neg\exists x \neg\, [\varphi]^* \\
[\exists x \varphi]^* &:= \exists x\, [\varphi]^*
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\forall x(Rx \rightarrow Pf(x))^* \quad &= \quad \neg\exists x \neg(Rx \rightarrow Pf(x))^* \\
&= \quad \neg\exists x \neg(\neg Rx^* \vee Pf(x)^*) \\
&= \quad \neg\exists x \neg(\neg Rx \vee Pf(x))
\end{aligned}
$$

Koinzidenzlemma. S, S_1, S_2 Symbolmengen und $S \subseteq S_1 \cap S_2$.
Für $j = 1, 2$ sei $\mathfrak{I}_j := (\mathfrak{A}_j, \beta_j)$ eine S_j-Interpretation.
Gelte $\mathfrak{A}_1 \restriction S = \mathfrak{A}_2 \restriction S$ (d.h. $A_1 = A_2$ und $k^{\mathfrak{A}_1} = k^{\mathfrak{A}_2}$ für $k \in S$). Dann

(a) Für $t \in T^S$: Wenn $\beta_1 \restriction \mathrm{var}(t) = \beta_2 \restriction \mathrm{var}(t)$, so $\mathfrak{I}_1(t) = \mathfrak{I}_2(t)$.

(b) Für $\varphi \in L^S$: Wenn $\beta_1 \restriction \mathrm{fr}(\varphi) = \beta_2 \restriction \mathrm{fr}(\varphi)$, so $(\mathfrak{I}_1 \models \varphi \iff \mathfrak{I}_2 \models \varphi)$.

(a) Induktion über den Termkalkül: Sei $t \in T^S$ und gelte $\beta_1 \restriction \mathrm{var}(t) = \beta_2 \restriction \mathrm{var}(t)$.

$$
\begin{array}{ll}
t = x: & \mathfrak{I}_1(x) = \beta_1(x) = \beta_2(x) = \mathfrak{I}_2(x). \\
t = c: & \mathfrak{I}_1(c) = c^{\mathfrak{A}_1} = c^{\mathfrak{A}_2} = \mathfrak{I}_2(c). \\
t = f(t_1, \ldots, t_n): & \mathfrak{I}_1(f(t_1, \ldots, t_n)) \; = \; f^{\mathfrak{A}_1}(\mathfrak{I}_1(t_1), \ldots, \mathfrak{I}_1(t_n)) \\
\quad \text{(Ind.vor.)} & = f^{\mathfrak{A}_1}(\mathfrak{I}_2(t_1), \ldots, \mathfrak{I}_2(t_n)) \\
\quad (\text{Vor. } f^{\mathfrak{A}_1} = f^{\mathfrak{A}_2}) & = f^{\mathfrak{A}_2}(\mathfrak{I}_2(t_1), \ldots, \mathfrak{I}_2(t_n)) \\
 & = \mathfrak{I}_2(f(t_1, \ldots, t_n)).
\end{array}
$$

(b) Indukt. über den Ausdruckskalkül: Sei $\varphi \in L^S$ und gelte $\beta_1 \restriction \mathrm{fr}(\varphi) = \beta_2 \restriction \mathrm{fr}(\varphi)$.

$\varphi = Rt_1 \ldots t_r$:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathfrak{I}_1 \models Rt_1 \ldots t_r & \iff & R^{\mathfrak{A}_1} \mathfrak{I}_1(t_1) \ldots \mathfrak{I}_1(t_r) \\
\text{(wegen (a))} & \iff & R^{\mathfrak{A}_1} \mathfrak{I}_2(t_1) \ldots \mathfrak{I}_2(t_r) \\
(\text{wegen } R^{\mathfrak{A}_1} = R^{\mathfrak{A}_2}) & \iff & R^{\mathfrak{A}_2} \mathfrak{I}_2(t_1) \ldots \mathfrak{I}_2(t_r) \\
 & \iff & \mathfrak{I}_2 \models Rt_1 \ldots t_r.
\end{array}
$$

$\varphi = \neg\psi$: $\quad \mathfrak{I}_1 \models \neg\psi$ gdw nicht $\mathfrak{I}_1 \models \psi$

$$\begin{aligned} &\text{gdw} \quad \text{nicht } \mathfrak{I}_2 \models \psi \quad \text{(Ind.vor.)} \\ &\text{gdw} \quad \mathfrak{I}_2 \models \neg\psi. \end{aligned}$$

$\varphi = (\psi \vee \chi)$: $\mathfrak{I}_1 \models (\psi \vee \chi)$ gdw $(\mathfrak{I}_1 \models \psi$ oder $\mathfrak{I}_1 \models \chi)$

$$\begin{aligned} &\text{gdw} \quad (\mathfrak{I}_2 \models \psi \text{ oder } \mathfrak{I}_2 \models \chi) \quad \text{(Ind.vor.)} \\ &\text{gdw} \quad \mathfrak{I}_2 \models (\psi \vee \chi). \end{aligned}$$

$\varphi = \exists x\psi$: $\mathfrak{I}_1 \models \exists x\psi$ gdw es gibt ein $a \in A_1$: $\mathfrak{I}_1\dfrac{a}{x} \models \psi$

$$\text{gdw} \quad \text{es gibt ein } a \in A_2\,(= A_1): \ \mathfrak{I}_1\frac{a}{x} \models \psi$$

wegen $\mathrm{fr}(\psi) \subseteq \mathrm{fr}(\exists x\psi) \cup \{x\}$ stimmen $\mathfrak{I}_1\frac{a}{x}$ und $\mathfrak{I}_2\frac{a}{x}$ auf $\mathrm{fr}(\psi)$ überein; somit nach Ind.vor.

$$\begin{aligned} &\text{gdw} \quad \text{es gibt ein } a \in A_2: \ \mathfrak{I}_2\frac{a}{x} \models \psi \\ &\text{gdw} \quad \mathfrak{I}_2 \models \exists x\psi. \end{aligned}$$

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ S-Strukturen

(1) (a) $\pi : A \to B$, π ist Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach (auf) $\mathfrak{B}$, $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, wenn

(1) π ist bijektiv;

(2) Für $R \in S$, R r-stellig, $a_1, \ldots, a_r \in A$:

$$R^{\mathfrak{A}} a_1 \ldots a_r \iff R^{\mathfrak{B}} \pi(a_1) \ldots \pi(a_r);$$

(3) Für $f \in S$, f r-stellig, $a_1, \ldots, a_r \in A$:

$$\pi(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_r)) = f^{\mathfrak{B}}(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_r));$$

(4) Für $c \in S$: $\qquad \pi(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$.

(b) $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind isomorph, $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, gdw. ex. π mit $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

(2) $\pi : A \to B$, π Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ gdw π erfüllt (3), (4) und

(2′) für $R \in S$, R r-stellig, $a_1, \ldots, a_r \in A$,

$$\text{wenn } R^{\mathfrak{A}} a_1 \ldots a_r, \text{ so } R^{\mathfrak{B}} \pi(a_1) \ldots \pi(a_r).$$

Schreibweise: $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ Homomorphismus.

Zu (b): Induktion über t:

x_j: $\pi(x_j^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]) = \pi(a_j) = x_j^{\mathfrak{B}}[\pi(\bar{a})]$.

c: $\pi(c^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]) = \pi(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}} = c^{\mathfrak{B}}[\pi(\bar{a})]$.

$f(t_1, \ldots, t_r)$:

$$\begin{array}{rcl}
\pi(f(t_1,\ldots,t_r)^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]) & = & \pi(f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[\bar{a}],\ldots,t_r^{\mathfrak{A}}[\bar{a}])) \\
(\pi \text{ Homom.}) & = & f^{\mathfrak{B}}(\pi(t_1^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]),\ldots,\pi(t_r^{\mathfrak{A}}[\bar{a}])) \\
(\text{Ind.Vor.}) & = & f^{\mathfrak{B}}(t_1^{\mathfrak{B}}[\pi(\bar{a})],\ldots,t_r^{\mathfrak{B}}[\pi(\bar{a})]) \\
 & = & f(t_1,\ldots,t_r)^{\mathfrak{B}}[\pi(\bar{a})].
\end{array}$$

Zu (a): $t_1 \equiv t_2$:

$$\begin{array}{rcl}
\mathfrak{A} \models t_1 \equiv t_2[\bar{a}] & \iff & t_1^{\mathfrak{A}}[\bar{a}] = t_2^{\mathfrak{A}}[\bar{a}] \\
(\Leftarrow, \text{ da } \pi \text{ inj.}) & \iff & \pi(t_1^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]) = \pi(t_2^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]) \\
(\text{wegen (b)}) & \iff & t_1^{\mathfrak{B}}[\pi(\bar{a})] = t_2^{\mathfrak{B}}[\pi(\bar{a})] \\
 & \iff & \mathfrak{B} \models t_1 \equiv t_2[\pi(\bar{a})].
\end{array}$$

$Rt_1 \dots t_r$:

$$\begin{array}{rcl}
\mathfrak{A} \models Rt_1 \dots t_r[\bar{a}] & \iff & R^{\mathfrak{A}} t_1^{\mathfrak{A}}[\bar{a}] \dots t_r^{\mathfrak{A}}[\bar{a}] \\
& \iff & R^{\mathfrak{B}} \pi(t_1^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]) \dots \pi(t_r^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]) \\
(\Rightarrow, \text{ da } \pi \text{ Hom.} & & \Leftarrow, \text{ da } \pi \text{ Isom.}) \\
(\text{wegen (b)}) & \iff & R^{\mathfrak{B}} t_1^{\mathfrak{B}}[\pi(\bar{a})] \dots t_r^{\mathfrak{B}}[\pi(\bar{a})] \\
& \iff & \mathfrak{B} \models Rt_1 \dots t_r[\pi(\bar{a})].
\end{array}$$

Sei $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \exists y \psi$. Da $y \notin \mathrm{fr}(\varphi)$, können wir o.B.d.A. annehmen, dass $y \notin \{x_1, \dots, x_n\}$. Somit $\psi = \psi(x_1, \dots, x_n, y)$. Nun gilt:

$$\begin{array}{rcl}
\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{a}] & \iff & \text{ex. } a \in A\text{: } \mathfrak{A} \models \psi[\bar{a}, a] \\
(\text{Ind.vor.}) & \iff & \text{ex. } a \in A\text{: } \mathfrak{B} \models \psi[\pi(\bar{a}), \pi(a)] \\
(\Leftarrow \text{ da } \pi \text{ surjektiv}) & \iff & \text{ex. } b \in B\text{: } \mathfrak{B} \models \psi[\pi(\bar{a}), b] \\
& \iff & \mathfrak{B} \models \varphi[\pi(\bar{a})].
\end{array}$$

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ S-Strukturen. $\mathfrak{A}$ ist Substruktur von $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, wenn

(1) $A \subseteq B$.

(2) (a) für $R \in S$ n-st.: $R^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{B}} \cap A^n$, d.h. für $\bar{a} \in A^n$

$$R^{\mathfrak{A}} \bar{a} \iff R^{\mathfrak{B}} \bar{a}$$

(b) für $f \in S$ n-st.: $f^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{B}} \restriction A^n$, d.h. für $\bar{a} \in A^n$

$$f^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) = f^{\mathfrak{B}}(\bar{a})$$

(c) für $c \in S$: $c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$.

$$\Phi_{\text{Grp}} \begin{cases} \forall x \forall y \forall z ((x \circ y) \circ z) \equiv (x \circ (y \circ z)) \\ \forall x\, x \circ e \equiv x \\ \forall x\, x \circ x^{-1} \equiv e. \end{cases} \qquad S_{\text{Grp}} = \{\circ, {}^{-1}, e\}$$

$$\Phi_{\text{Gr}} \begin{cases} \forall x \forall y \forall z ((x \circ y) \circ z) \equiv (x \circ (y \circ z)) \\ \forall x\, x \circ e \equiv x \\ \forall x \exists y\, x \circ y \equiv e. \end{cases} \qquad S_{\text{Gr}} = \{\circ, e\}$$

$$\Phi_{\text{G}} \begin{cases} \forall x \forall y \forall z ((x \circ y) \circ z) \equiv (x \circ (y \circ z)) \\ \exists x \forall y (y \circ x \equiv y \wedge \exists z\, y \circ z \equiv x). \end{cases} \qquad S_{\text{G}} = \{\circ\}$$

$$\Phi_{\text{Graph}} \begin{cases} \forall x \neg Exx \\ \forall x \forall y (Exy \rightarrow Eyx). \end{cases} \qquad S_{\text{Graph}} = \{E\}$$

$$\Phi_{\text{DGraph}} \quad \forall x \neg Exx$$

$$\Phi_{\mathrm{Ord}} \begin{cases} \forall x \forall y (x \leq y \vee y \leq x) \\ \forall x \forall y ((x \leq y \wedge y \leq x) \rightarrow x \equiv y) \\ \forall x \forall y \forall z ((x \leq y \wedge y \leq z) \rightarrow x \leq z). \end{cases} \qquad S_{\mathrm{Ord}} = \{\leq\}$$

$$\Phi_{\mathrm{Kp}} \begin{cases} \forall x \forall y \forall z (x+y)+z \equiv x+(y+z) & \forall x \forall y \forall z (x \cdot y) \cdot z \equiv x \cdot (y \cdot z) \\ \forall x\, x+0 \equiv x & \forall x\, x \cdot 1 \equiv x \\ \forall x \exists y\, x+y \equiv 0 & \forall x (\neg x \equiv 0 \rightarrow \exists y\, x \cdot y \equiv 1) \\ \forall x \forall y\, x+y \equiv y+x & \forall x \forall y\, x \cdot y \equiv y \cdot x \\ \neg 0 \equiv 1 & \\ \forall x \forall y \forall z\, x \cdot (y+z) \equiv (x \cdot y)+(x \cdot z). & \end{cases}$$

$$\Phi_{\mathrm{gKp}} \begin{cases} \text{die Sätze von } \Phi_{\mathrm{Kp}} \text{ und } \Phi_{\mathrm{Ord}} \\ \forall x \forall y \forall z (x \leq y \rightarrow x+z \leq y+z) \\ \forall x \forall y \forall z ((x \leq y \wedge 0 \leq z) \rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z). \end{cases} \qquad S_{\mathrm{ar}}^{\leq} = S_{\mathrm{ar}} \cup S_{\mathrm{Ord}}$$

$S_{\mathrm{BA}} = \{\underset{2}{\sqcap}, \underset{2}{\sqcup}, \underset{1}{\sim}, 0, 1\}$. Sei Φ_{BA} die Menge der folgenden S_{BA}-Sätze:

$\forall x \forall y\ x \sqcap y \equiv y \sqcap x$	$\sqcap$ kommutat.
$\forall x \forall y \forall z\ (x \sqcap y) \sqcap z \equiv x \sqcap (y \sqcap z)$	$\sqcap$ assoziat.
$\forall x \forall y\ x \sqcup y \equiv y \sqcup x$	$\sqcup$ kommutat.
$\forall x \forall y \forall z\ (x \sqcup y) \sqcup z \equiv x \cup (y \sqcup z)$	$\sqcup$ assoziat.
$\forall x \forall y \forall z\ x \sqcap (y \sqcup z) \equiv (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$	distributiv
$\forall x \forall y \forall z\ x \sqcup (y \sqcap z) \equiv (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$	distributiv
$\forall x \forall y\ (x \sqcup y) \sqcap y \equiv y$	Absorption
$\forall x \forall y\ (x \sqcap y) \sqcup y \equiv y$	Absorption
$\forall x\ x \sqcap 1 \equiv x$	1 neutral bei $\sqcap$
$\forall x\ x \sqcup 0 \equiv x$	0 neutral bei $\sqcup$
$\forall x\ x \sqcap \sim x \equiv 0$	Komplementgesetz
$\forall x\ x \sqcup \sim x \equiv 1$	Komplementgesetz.

S Symbolmenge,

$$K_{<\infty} := \{\mathfrak{A} \ S\text{-Struktur} \mid A \text{ endlich}\}.$$

Ist $K_{<\infty}$ (in der 1. Stufe) axiomatisierbar?

Definition. Sei $\mathfrak{A}$ eine S-Strukur. $\mathfrak{A}$ ist (in der Sprache der) 1. Stufe charakterisierbar (bis auf Isomorphie) gdw ex. $\Phi \subseteq L_0^S$ mit:

$$\mathrm{Mod}(\Phi) = \{\mathfrak{b} \mid \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}\}.$$

Ist die $S_{\mathrm{ar}}^{\leq}$-Struktur

$$\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$$

1. Stufe charakterisierbar?

Axiome des geordneten Körpers und

Vollständigkeitsaxiom: Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge besitzt ein Supremum.

Sind

$$(\exists y(Exy \vee \neg\neg Eyx) \vee \neg\neg Eyx))$$

und

$$(\exists y(Exy \vee Eyx) \vee \neg\neg Eyx))$$

logisch äquivalent?

Ersetzungslemma. (Intuitiv: Ersetzt man in φ einen Teilausdruck ψ durch einen zu ψ logisch äquivalenten Ausdruck, so erhält man einen zu φ logisch äquivalenten Ausdruck.)

Gelte $\varphi_1 \equiv \psi_1$ und $\varphi_2 \equiv \psi_2$; dann

$$\neg\varphi_1 \equiv \neg\psi_1, \qquad (\varphi_1 \vee \varphi_2) \equiv (\psi_1 \vee \psi_2), \qquad \exists x\varphi_1 \equiv \exists x\psi_1.$$

$$\begin{aligned}
\neg\neg Eyx &\equiv Eyx \\
(Exy \vee \neg\neg Eyx) &\equiv (Exy \vee Eyx) \\
\exists y(Exy \vee \neg\neg Eyx) &\equiv \exists y(Exy \vee Eyx) \\
(\exists y(Exy \vee \neg\neg Eyx) \vee \neg\neg Eyx)) &\equiv (\exists y(Exy \vee Eyx) \vee \neg\neg Eyx))
\end{aligned}$$

$$t = x : \qquad t^\sigma := \sigma(x)$$

$$t = c : \qquad t^\sigma := c$$

$$t = f(t_1, \ldots, t_n) : \qquad t^\sigma := f(t_1^\sigma, \ldots, t_n^\sigma)$$

$$\varphi = t_1 \equiv t_2 : \qquad \varphi^\sigma := t_1^\sigma \equiv t_2^\sigma$$

$$\varphi = Rt_1 \ldots t_n : \qquad \varphi^\sigma := Rt_1^\sigma \ldots t_n^\sigma$$

$$\varphi = \neg\psi : \qquad \varphi^\sigma := \neg\, \psi^\sigma$$

$$\varphi = (\psi \vee \chi) : \qquad \varphi^\sigma := (\psi^\sigma \vee \chi^\sigma)$$

$\varphi = \exists x \psi$:

$$\varphi^{\sigma} := \exists u \left[\psi \frac{\sigma(y_1) \quad \ldots \quad \sigma(y_r) \quad u}{y_1 \quad \ldots \quad y_r \quad x}\right]$$

Dabei sind $y_1, \ldots, y_r$ paarweise verschieden mit

$$\{y_1, \ldots, y_r\} \quad := \quad \{y \mid y \in \mathrm{fr}(\exists x \psi) \text{ und } y \neq \sigma(y)\}$$

und

$$u := \begin{cases} x, & \text{falls } x \notin \mathrm{var}(\sigma(y_1)) \cup \ldots \cup \mathrm{var}(\sigma(y_r)) \\ \text{die erste Variable, die in} & \\ \psi, \sigma(y_1), \ldots, \sigma(y_r) \text{ nicht vorkommt,} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bemerkung.

$$y \in \mathrm{var}(t\frac{t_1 \ldots t_r}{x_1 \ldots x_r}) \iff \begin{array}{l}(y \in \mathrm{var}(t) \text{ und } y \neq x_1, \ldots, y \neq x_r) \;\text{ oder} \\ \text{es gibt } i \in [r]\text{: } (x_i \in \mathrm{var}(t) \text{ und } y \in \mathrm{var}(t_i)).\end{array}$$

$$y \in \mathrm{fr}(\varphi\frac{t_1 \ldots t_r}{x_1 \ldots x_r}) \iff \begin{array}{l}(y \in \mathrm{fr}(\varphi) \text{ und } y \neq x_1, \ldots, y \neq x_r) \;\text{ oder} \\ \text{es gibt } i \in [r]\text{: } (x_i \in \mathrm{fr}(\varphi) \text{ und } y \in \mathrm{var}(t_i)).\end{array}$$

Insbesondere: Ist $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_r)$, so ist für Konstantensymbole $c_1, \ldots, c_r$

$$\varphi\frac{c_1 \ldots c_r}{x_1 \ldots x_r} \;\text{ ein Satz.}$$

(1) $\neg\exists x\psi \equiv \forall x\neg\psi$, $\qquad\qquad \neg\forall x\psi \equiv \exists x\neg\psi$

(2) $(\exists x\varphi\vee\psi) \equiv \exists y(\varphi\frac{y}{x}\vee\psi)$, wenn $y \notin \mathrm{fr}(\{\exists x\varphi, \psi\})$

insbesondere $(\exists x\varphi\vee\psi) \equiv \exists x(\varphi\vee\psi)$, wenn $x \notin \mathrm{fr}(\psi)$

$(\varphi\vee\exists x\psi) \equiv \exists y(\varphi\vee\psi\frac{y}{x})$, wenn $y \notin \mathrm{fr}(\{\varphi, \exists x\psi\})$

$(\forall x\varphi\vee\psi) \equiv \forall y(\varphi\frac{y}{x}\vee\psi)$, wenn $y \notin \mathrm{fr}(\{\forall x\varphi, \psi\})$

$(\varphi\vee\forall x\psi) \equiv \forall y(\varphi\vee\psi\frac{y}{x})$, wenn $y \notin \mathrm{fr}(\{\varphi, \forall x\psi\})$.

Beispiel: Sei

$$\varphi = (\neg\exists z Pxyz \vee \forall x\exists y Rxy).$$

Dann

$$\begin{aligned}
(\neg\exists z Pxyz \vee \forall x\exists y Rxy) &\overset{1}{\equiv} (\forall z\neg Pxyz \vee \forall x\exists y Rxy)\\
&\overset{2}{\equiv} \forall z(\neg Pxyz \vee \forall x\exists y Rxy)\\
&\overset{2}{\equiv} \forall z\forall u(\neg Pxyz \vee \exists y Ruy)\\
&\overset{2}{\equiv} \forall z\forall u\exists v(\neg Pxyz \vee Ruv).
\end{aligned}$$

Seien x, y gegeben und gelte für ein geeignetes u

$$xRu \text{ und } yRu.$$

Aus (s) erhalten wir dann

$$uRx \text{ und } uRy.$$

Aus xRu und uRy ergibt sich mit (t)

$$xRy, \tag{5}$$

und aus yRu und uRx, ebenfalls mit (t),

$$yRx. \tag{6}$$

Sei nun z beliebig gewählt. Gilt

$$xRz, \tag{7}$$

so erhalten wir aus (2) und (3) mit (t)

$$yRz.$$

Gilt umgekehrt

$$yRz, \tag{8}$$

so erhalten wir aus (1) und (4) mit (t) $\qquad xRz.$

(∃A) $\dfrac{\Gamma\,\varphi\frac{y}{x}\,\psi}{\Gamma\,\exists x\varphi\,\psi}$ $y \notin \mathrm{fr}(\Gamma, \exists x\varphi, \psi)$ ist korrekt:

Beweis: Gelte

$$\Gamma, \varphi\frac{y}{x} \models \psi \tag{9}$$

und sei $\mathfrak{I} \models \Gamma$ und $\mathfrak{I} \models \exists x\varphi$, wobei $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ (z.z.: $\mathfrak{I} \models \psi$). Dann

$$\text{ex. } a \in A\text{: } \mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi.$$

Ist $y \neq x$, so $y \notin \mathrm{fr}(\varphi)$ nach Vor. $y \notin \mathrm{fr}(\exists x\varphi)$; somit nach Koinzidenzlemma

$$\text{ex. } a \in A\text{: } (\mathfrak{I}\frac{a}{x})\frac{a}{y} \models \varphi$$

(für $y = x$ gilt dies trivialerweise). Somit

$$\text{ex. } a \in A\text{: } (\mathfrak{I}\frac{a}{y})\frac{\mathfrak{I}\frac{a}{y}(y)}{x} \models \varphi.$$

Daher nach Substitutionslemma

$$\text{ex. } a \in A\text{: } \mathfrak{I}\frac{a}{y} \models \varphi\frac{y}{x}.$$

Da $\mathfrak{I}\frac{a}{y} \models \Gamma$ (weil $y \notin \mathrm{fr}(\Gamma)$), gilt mit (9) $\mathfrak{I}\frac{a}{y} \models \psi$ und daher $\mathfrak{I} \models \psi$ (weil $y \notin \mathrm{fr}(\psi)$).

(Vor) $\dfrac{}{\Gamma\ \varphi}$ falls φ in Γ

(Ant) $\dfrac{\Gamma\ \varphi}{\Gamma'\ \varphi}$ falls jeder Ausdruck in Γ auch in Γ' vorkommt

(FU) $\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\ \varphi\ \psi\\ \Gamma\ \neg\varphi\ \psi\end{matrix}}{\Gamma\ \psi}$

(Wid) $\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\ \neg\varphi\ \psi\\ \Gamma\ \neg\varphi\ \neg\psi\end{matrix}}{\Gamma\ \varphi}$

($\vee$A) $\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\ \varphi\ \psi\\ \Gamma\ \chi\ \psi\end{matrix}}{\Gamma\ (\varphi\vee\chi)\ \psi}$

($\vee$S$_1$) $\dfrac{\Gamma\ \varphi}{\Gamma\ (\varphi\vee\psi)}$

($\vee$S$_2$) $\dfrac{\Gamma\ \varphi}{\Gamma\ (\psi\vee\varphi)}$

($\exists$S) $\dfrac{\Gamma\ \varphi\frac{t}{x}}{\Gamma\ \exists x\varphi}$

($\exists$A) $\dfrac{\Gamma\ \varphi\frac{y}{x}\ \psi}{\Gamma\ \exists x\varphi\ \psi}$ $y\notin \mathrm{fr}(\Gamma\exists x\varphi\psi)$

($\equiv$ S) $\dfrac{}{t\equiv t}$

($\equiv$ A) $\dfrac{\Gamma\ \varphi\frac{t_1\ldots t_r}{x_1\ldots x_r}}{\Gamma\ t_1\equiv t_1'\ \ldots\ t_r\equiv t_r'\ \varphi\frac{t_1'\ldots t_r'}{x_1\ldots x_r}}$

$\vdash (\varphi \vee \neg\varphi)$

(1)	$\varphi\ \varphi$	(Vor)
(2)	$\varphi\ (\varphi \vee \neg\varphi)$	$(\vee S)$ auf 1
(3)	$\neg\varphi\ \neg\varphi$	(Vor)
(4)	$\neg\varphi\ (\varphi \vee \neg\varphi)$	$(\vee S)$ auf 3
(5)	$(\varphi \vee \neg\varphi)$	(FU) auf 2,4

Rechtfertigung für (Wid'):

(1)	$\Gamma\ \psi$	(Prämisse)
(2)	$\Gamma\ \neg\psi\ \neg\varphi\ \psi$	(Ant) auf 1
(3)	$\Gamma\ \neg\psi\ \neg\varphi\ \neg\psi$	(Vor)
(4)	$\Gamma\ \neg\psi\ \varphi$	(Wid) auf 2,3

Rechtfertigung für (KS):

(1)	$\Gamma\ \varphi\ \psi$	(Prämisse)
(2)	$\Gamma\ \varphi$	(Prämisse)
(3)	$\Gamma\ \neg\varphi\ \psi$	(Wid') auf 2
(4)	$\Gamma\ \psi$	(FU) auf 1,3

Rechtfertigung für (MP):

(1)	$\Gamma\,(\neg\varphi \vee \psi)$	(Prämisse)
(2)	$\Gamma\,\varphi$	(Prämisse)
(3)	$\Gamma\,\neg\varphi\,\psi$	(Wid') auf 2
(4)	$\Gamma\,\psi\,\psi$	(Vor)
(5)	$\Gamma\,(\neg\varphi \vee \psi)\,\psi$	($\vee$A) auf 3,4
(6)	$\Gamma\,\psi$	(KS) auf 5,1

(1)	$\Gamma\psi_1$	(Prämisse)
	$\vdots$	
$n.$	$\Gamma\psi_n$	(Prämisse)
$n+1.$	$\psi_1 \ldots \psi_n \varphi$	(Prämisse)(!)
$n+2.$	$\Gamma\psi_1 \ldots \psi_n \varphi$	(Ant) auf $n+1$
$n+3.$	$\Gamma\psi_1 \ldots \psi_{n-1} \psi_n$	(Ant) auf n
$n+4.$	$\Gamma\psi_1 \ldots \psi_{n-1} \varphi$	(KS) auf $n+2$, $n+3$
$n+5.$	$\Gamma\psi_1 \ldots \psi_{n-2} \psi_{n-1}$	(Ant) auf $n-1$
$n+6.$	$\Gamma\psi_1 \ldots \psi_{n-2} \varphi$	(KS) auf $n+4$, $n+5$
	$\vdots$	
	$\Gamma\varphi$	

$\vdash t_1 \equiv t_2 \; t_2 \equiv t_1$ Wähle x neu:

(1) $t_1 \equiv t_1$ $(\equiv\text{S})$

(2) $t_1 \equiv t_2 \; t_2 \equiv t_1$ $(\equiv\text{A})$ auf 1, da $t_1 \equiv t_1 = [x \equiv t_1]\frac{t_1}{x}$ und $t_2 \equiv t_1 = [x \equiv t_1]\frac{t_2}{x}$

$\vdash t_1 \equiv t_2 \; t_2 \equiv t_3 \; t_1 \equiv t_3$ Wähle x neu:

(1) $t_1 \equiv t_2 \; t_1 \equiv t_2$ (Vor)

(2) $t_1 \equiv t_2 \; t_2 \equiv t_3 \; t_1 \equiv t_3$ $(\equiv\text{A})$ auf 1, da

$t_1 \equiv t_2 = [t_1 \equiv x]\frac{t_2}{x}$ und $t_1 \equiv t_3 = [t_1 \equiv x]\frac{t_3}{x}$

$\vdash Rt_1 \dots t_r \; t_1 \equiv t_1' \dots t_r \equiv t_r' \; Rt_1' \dots t_r'$ Wähle $x_1, \dots, x_r$ neu:

(1) $Rt_1 \dots t_r \; Rt_1 \dots t_r$ (Vor)

(2) $Rt_1 \dots t_r \; t_1 \equiv t_1' \dots t_r \equiv t_r' \; Rt_1' \dots t_r'$ $(\equiv\text{S})$ auf 1,

da $Rt_1 \dots t_r = [Rx_1 \dots x_r]\frac{t_1 \dots t_r}{x_1 \dots x_r}$ und $Rt_1' \dots t_r' = [Rx_1 \dots x_r]\frac{t_1' \dots t_r'}{x_1 \dots x_r}$

§ 8, Folg. aus Bem 2: Wenn $\vdash \varphi_1 \dots \varphi_n \psi$ und $\Phi \vdash \varphi_i$ für $i \in [n]$, so $\Phi \vdash \psi$.

Beweis von Lemma 1. a) $\sim$ reflexiv: $t \sim t$, da $\vdash t \equiv t$ und somit $\Phi \vdash t \equiv t$.

$\sim$ symmetrisch: Gelte $t_1 \sim t_2$; somit $\Phi \vdash t_1 \equiv t_2$. Wegen $\vdash t_1 \equiv t_2\, t_2 \equiv t_1$ und § 8, Folg. aus Bem 2: $\Phi \vdash t_2 \equiv t_1$; somit $t_2 \sim t_1$.

$\sim$ transitiv: Gelte $t_1 \sim t_2$ und $t_2 \sim t_3$; somit $\Phi \vdash t_1 \equiv t_2$ und $\Phi \vdash t_2 \equiv t_3$. Wegen $\vdash t_1 \equiv t_2\, t_2 \equiv t_3\, t_1 \equiv t_3$ und § 8, Folg. aus Bem 2: $\Phi \vdash t_1 \equiv t_3$; somit $t_1 \sim t_3$.

b) (ii): Nach Vor.

$$\Phi \vdash t_1 \equiv t_1', \dots, \Phi \vdash t_r \equiv t_r'.$$

Nach § 8:

$$\vdash Rt_1 \dots t_r\ t_1 \equiv t_1' \dots t_r \equiv t_r'\ Rt_1' \dots t_r'.$$

Wenn also $\Phi \vdash Rt_1 \dots t_r$, so nach § 8, Folg. aus Bem 2: $\Phi \vdash Rt_1' \dots t_r'$.

Lemma 3. Sei $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ eine Interpretation mit

$$A = \{\mathfrak{I}(t) \mid t \in T^S\}. \tag{10}$$

Dann für paarweise verschiedene $x_1, \ldots, x_n$

$$\mathfrak{I} \models \exists x_1 \ldots \exists x_n \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \text{ex. } t_1, \ldots, t_n \in T^S\text{:} \quad \mathfrak{I} \models \varphi \frac{t_1 \ldots t_n}{x_1 \ldots x_n}$$

$$\mathfrak{I} \models \forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \text{f.a. } t_1, \ldots, t_n \in T^S\text{:} \quad \mathfrak{I} \models \varphi \frac{t_1 \ldots t_n}{x_1 \ldots x_n}.$$

Beachte: (10) ist für jede Henkininterpretation erfüllt.

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I} \models \exists x_1 \ldots \exists x_n \varphi \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{ex } a_1, \ldots, a_n \in A : \ \mathfrak{I}\frac{a_1 \ldots a_n}{x_1 \ldots x_n} \models \varphi \\
&\overset{(10)}{\Longleftrightarrow} \quad \text{ex } t_1, \ldots, t_n \in T^S : \ \mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_1) \ldots \mathfrak{I}(t_n)}{x_1 \ldots x_n} \models \varphi \\
&\overset{(\text{SL})}{\Longleftrightarrow} \quad \text{ex } t_1, \ldots, t_n \in T^S : \ \mathfrak{I} \models \varphi\frac{t_1 \ldots t_n}{x_1 \ldots x_n}.
\end{aligned}$$

(∨S₁) $\dfrac{\Gamma \ \varphi}{\Gamma \ (\varphi \vee \psi)}$ (∨S₂) $\dfrac{\Gamma \ \varphi}{\Gamma \ (\psi \vee \varphi)}$

(MP) $\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \ (\varphi \vee \psi) \\ \Gamma \ \neg\varphi\end{array}}{\Gamma \ \psi}$ (KS) $\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \ (\varphi \longrightarrow \psi) \\ \Gamma \ \varphi\end{array}}{\Gamma \ \psi}$ (∃S) $\dfrac{\Gamma \ \varphi\frac{t}{x}}{\Gamma \ \exists x\varphi}$

Nach §8 Bemerkung 2 daher:

$\vdash \varphi \ (\varphi \vee \psi)$ $\vdash \varphi \ (\psi \vee \varphi)$ $\vdash (\varphi \vee \psi) \ \neg\varphi \ \psi$ $\vdash (\varphi \longrightarrow \psi) \ \varphi \ \psi$ $\vdash \varphi\dfrac{t}{x} \ \exists x\varphi$

Φ $\neg$-treu: für alle $\psi \in L^S$:

$$\Phi \vdash \psi \quad \text{oder} \quad \Phi \vdash \neg\psi$$

Φ $\exists$-treu (enthält Beispiele): für jeden Ausdruck der Gestalt $\exists x\psi \in L^S$ existiert $t \in T^S$ mit:

$$\Phi \vdash (\exists x\psi \rightarrow \psi\frac{t}{x}).$$

Satz von Henkin. Sei Wf Φ, $\neg$-treu und enthalte Beispiele. Dann gilt für alle ψ:

$$\mathfrak{I}^\Phi \models \psi \iff \Phi \vdash \psi.$$

Insbesondere: $\mathfrak{I}^\Phi \models \Phi$.

Lemma 5. S höchstens abzählbar, fr(Φ) endlich, Wf Φ. Dann

$$\text{ex. } \Psi\big(\Phi \subseteq \Psi \subseteq L^S, \text{ Wf } \Psi \text{ und } \Psi \text{ enthält Beispiele}\big).$$

Lemma 6. S höchstens abzählbar, Wf Ψ. Dann

$$\text{ex. } \Theta\big(\Psi \subseteq \Theta \subseteq L^S, \text{ Wf } \Theta \text{ und } \Theta \text{ negationstreu}\big).$$

Folgerung. S höchstens abzählbar, fr(Φ) endlich, Wf Φ. Dann

$$\text{Erf } \Phi \text{ und } \Phi \text{ hat ein Modell mit höchstens abzählbarem Träger.}$$

Hilfssatz. Wf Φ, $\exists x\psi \in L^S$, $y \notin \text{fr}(\Phi \cup \{\exists x\psi\}$. Dann

$$\text{Wf } \Phi \cup \{(\exists x\psi \to \psi\frac{y}{x})\}.$$

§ 8 Bemerkung 3 h). Wenn Wf Φ, so

$$\mathrm{Wf}\ \Phi \cup \{\psi\} \qquad \text{oder} \qquad \mathrm{Wf}\ \Phi \cup \{\neg\psi\}.$$

Beweis von Hilfssatz 2. a) Setze $\mathfrak{I}' := (\mathfrak{A}', \beta)$

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{I} \models \psi \quad & \iff \quad \mathfrak{I}' \models \psi \qquad \text{(Koinzidenzlemma)} \\
& \iff \quad \mathfrak{I}' \frac{\mathfrak{I}'(c_1) \ldots \mathfrak{I}'(c_k)}{v_1 \ldots v_k} \models \psi \qquad (\text{da } \mathfrak{I}'(c_1) = \beta(v_1), \ldots, \mathfrak{I}'(c_k) = \beta(v_k)) \\
& \iff \quad \mathfrak{I}' \models \psi \frac{c_1 \ldots c_k}{v_1 \ldots v_k} \qquad \text{(Substitutionslemma)} \\
& \iff \quad \mathfrak{I}' \models \psi' \qquad (\text{Definition von } \psi') \\
& \iff \quad \mathfrak{A}' \models \psi' \qquad (\psi' \in L_0^{S'}.\ )
\end{aligned}
$$

Bemerkung 1. X nichtleere Menge, $S_X := \{c_u \mid u \in X\}$

$$\Phi_X = \{\neg c_u \equiv c_v \mid u, v \in X, u \neq v\}.$$

Dann

(1) Erf Φ_X

(2) Jedes Modell $\mathfrak{A}$ von Φ_X hat mindestens so viele Elemente wie X.

(1) Was erreicht?

  a) Präzisierung des mathematischen Beweisbegriffes?

  b) Klärung des mathematischen Beweisbegriffes?

  c) Begründung der Regeln des mathematischen Schließens?

(2) Welche Auswirkung hat die Beschränkung auf die Sprache der ersten Stufe?

(3) Welche Möglichkeiten eröffnet die Präzisierung?

(Vor) $$\frac{}{\Gamma\ \varphi}$$ falls φ in Γ

(Ant) $$\frac{\Gamma\ \varphi}{\Gamma'\ \varphi}$$ falls jeder Ausdruck in Γ auch in Γ' vorkommt

(FU) $$\frac{\begin{array}{c}\Gamma\ \varphi\ \psi\\ \Gamma\ \neg\varphi\ \psi\end{array}}{\Gamma\ \psi}$$

(Wid) $$\frac{\begin{array}{c}\Gamma\ \neg\varphi\ \psi\\ \Gamma\ \neg\varphi\ \neg\psi\end{array}}{\Gamma\ \varphi}$$

($\vee$A) $$\frac{\begin{array}{c}\Gamma\ \varphi\ \psi\\ \Gamma\ \chi\ \psi\end{array}}{\Gamma\ (\varphi\vee\chi)\ \psi}$$

($\vee$S$_1$) $$\frac{\Gamma\ \varphi}{\Gamma\ (\varphi\vee\psi)}$$

($\vee$S$_2$) $$\frac{\Gamma\ \varphi}{\Gamma\ (\psi\vee\varphi)}$$

($\exists$S) $$\frac{\Gamma\ \varphi\frac{t}{x}}{\Gamma\ \exists x\varphi}$$

($\exists$A) $$\frac{\Gamma\ \varphi\frac{y}{x}\ \psi}{\Gamma\ \exists x\varphi\ \psi}$$ $y\notin \mathrm{fr}(\Gamma\exists x\varphi\psi)$

($\equiv$ S) $$\frac{}{t\equiv t}$$

($\equiv$ A) $$\frac{\Gamma\ \varphi\frac{t_1\ldots t_r}{x_1\ldots x_r}}{\Gamma\ t_1\equiv t_1'\ldots t_r\equiv t_r'\ \varphi\frac{t_1'\ldots t_r'}{x_1\ldots x_r}}$$

Zunächst definieren wir ψ^* für Ausdrücke der Gestalt $t \equiv x$ durch Induktion über t:

$$
\begin{aligned}
y \equiv x^* \quad &:= \quad y \equiv x \\
c \equiv x^* \quad &:= \quad c \equiv x \\
f(t_1, \ldots, t_n) \equiv x^* \quad &:= \quad \exists x_1 \ldots \exists x_n (t_1 \equiv x_1{}^* \wedge \ldots \wedge t_n \equiv x_n{}^* \wedge f(x_1, \ldots, x_n) \equiv x)
\end{aligned}
$$

($x_1, \ldots, x_n$ neu, etwa die ersten n Variablen, die in $f(t_1, \ldots, t_n) \equiv x$ nicht vorkommen).

Induktion über ψ für alle anderen ψ:

$\psi = t_1 \equiv t_2$ und t_2 keine Variable:

$$t_1 \equiv t_2{}^* \quad := \quad \exists x (t_1 \equiv x^* \wedge t_2 \equiv x^*) \quad x \text{ neu (s.o.).}$$

$$Rt_1 \ldots t_n{}^* \quad := \quad \exists x_1 \ldots \exists x_n (t_1 \equiv x_1{}^* \wedge \ldots \wedge t_n \equiv x_n{}^* \wedge Rx_1 \ldots x_n) \quad x_1, \ldots, x_n \text{ neu (s.o.).}$$

$$\neg\varphi^* := \neg\, \varphi^*, \qquad (\varphi_1 \vee \varphi_2)^* := (\varphi_1^* \vee \varphi_2^*), \qquad \exists x\varphi^* := \exists x\ \varphi^*$$

1) $S_{\mathrm{Grp}} = \{\circ, ^{-1}, e\}$ $\qquad$ $S_{\mathrm{Gr}} = \{\circ, e\}$ $\qquad$ $S_{\mathrm{Gr}} = \{\circ\}$

Φ_{Grp} $\qquad$ Φ_{Gr} $\qquad$ Φ_{G}

$$\Phi_{\mathrm{G}} = \{\text{“}\circ \text{ assoziativ”},\ \exists z(\forall x\ x \circ z \equiv x \wedge \forall x\ \exists y\ x \circ y \equiv z\}$$

2) $S_{\mathrm{Ord}} = \{\leq\}$ $\qquad$ $S_1 = \{\leq, <\}$

Φ_{Ord} $\qquad$ Φ_1

$$\Phi_1 = \Phi_{\mathrm{Ord}} \cup \{\forall x \forall y (x < y \leftrightarrow (\neg x \equiv y \wedge x \leq y))\}$$

– Für $\varphi \in L^{S_{\mathrm{Ord}}}$: $(\Phi_1 \models \varphi \iff \Phi_{\mathrm{Ord}} \models \varphi)$.

– Jedem $\varphi \in L^{S_1}$ kann man effektiv ein $\varphi^+ \in L^{S_{\mathrm{Ord}}}$ zuordnen mit:

$$\Phi_1 \models \varphi \iff \Phi_{\mathrm{Ord}} \models \varphi^+.$$

Wir definieren ψ^I für termreduziertes ψ (für nicht termreduziertes ψ setzen wir $\psi^I := (\psi^*)^I$):

ψ	ψ^I
$Ru_1 \ldots u_n$	$\varphi_R \frac{u_1 \ldots u_n}{x_1 \ldots x_n}$
$x \equiv y$	$x \equiv y$
$c \equiv u$	$\varphi_c \frac{u}{x}$
$f(u_1, \ldots, u_n) \equiv v$	$\varphi_f \frac{u_1 \ldots u_n v}{x_1 \ldots x_n y}$
$\neg\varphi$	$\neg\ \varphi^I$
$(\varphi_1 \vee \varphi_2)$	$(\varphi_1^I \vee \varphi_2^I)$
$\exists u\varphi$	$\exists u(\varphi_{S_1} \frac{u}{x} \wedge \varphi^I)$

$\psi(u_1,\ldots,u_m) := \exists u\varphi \qquad \psi^I := \exists u(\varphi_{S_1}\frac{u}{x} \wedge \varphi^I)$.

O.B.d.A. $u \neq u_1,\ldots,u \neq u_m$. Dann $\varphi = \varphi(u_1,\ldots,u_m,u)$ und nach Ind.vor.

$$(\varphi_{S_1}\frac{u}{x} \wedge \varphi^I) = (\varphi_{S_1}\frac{u}{x} \wedge \varphi^I)(u_1,\ldots,u_m,u)$$

Sei $\mathfrak{A}$ S-Struktur, $\mathfrak{A} \models \Phi_I$ und $a_1,\ldots,a_m \in A^{-I}$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models [\exists u\varphi]^I[a_1,\ldots,a_m] \quad & \text{gdw} \quad \mathfrak{A} \models \exists u(\varphi_{S_1}\frac{u}{x} \wedge \varphi^I)[a_1,\ldots,a_m] \\
& \text{gdw} \quad \text{ex. } a \in A\text{: } \mathfrak{A} \models (\varphi_{S_1}\tfrac{u}{x} \wedge \varphi^I)[a_1,\ldots,a_m,a] \\
& \underset{\text{SL}}{\text{gdw}} \quad \text{ex. } a \in A\ (\mathfrak{A} \models \varphi_{S_1}[a] \text{ und } \mathfrak{A} \models \varphi^I[a_1,\ldots,a_m,a]) \\
& \underset{\text{Ind.Vor. auf } \varphi}{\text{gdw}} \quad \text{ex. } a \in A\ (a \in A^{-I} \text{ und } \mathfrak{A}^{-I} \models \varphi[a_1,\ldots,a_m,a]) \\
& \text{gdw} \quad \text{ex. } a \in A^{-I} : \mathfrak{A}^{-I} \models \varphi[a_1,\ldots,a_m,a] \\
& \text{gdw} \quad \mathfrak{A}^{-I} \models \exists u\varphi[a_1,\ldots,a_m].
\end{aligned}$$

Satz über syntaktische Interpretationen. Sei I eine syntaktische Interpretation von S_1 in S. Jedem $\psi = \psi(x_1, \ldots, x_m) \in L^{S_1}$ kann man in effektiver Weise ein $\psi^I = \psi^I(x_1, \ldots, x_m) \in L^S$ zuordnen, so dass für alle S-Strukturen $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A} \models \Phi_I$ und alle $a_1, \ldots, a_m \in A^{-I}$ gilt:

$$\mathfrak{A}^{-I} \models \psi[a_1, \ldots, a_m] \iff \mathfrak{A} \models \psi^I[a_1, \ldots, a_m].$$

Insbesondere für $m = 0$:

$$\mathfrak{A}^{-I} \models \psi \iff \mathfrak{A} \models \psi^I.$$

Syntaktische Interpretation I von S_1 in S:

$$I : \{S_1\} \cup S_1 \to S$$

$$\begin{array}{ccc} S_1 & \mapsto & \varphi_{S_1}(x) \\ R \in S_1 \ n\text{-stellig} & \mapsto & \varphi_R(x_1, \ldots, x_n) \\ f \in S_1 \ n\text{-stellig} & \mapsto & \varphi_f(x_1, \ldots, x_n, y) \\ c \in S_1 & \mapsto & \varphi_c(x) \end{array}$$

$$\Phi_I := \{\exists x \varphi_{S_1}(x)\} \ \cup \ \{\exists^{=1} x(\varphi_{S_1}\frac{x}{x} \wedge \varphi_c(x)) \mid c \in S_1\} \ \cup \{\forall x_1 \ldots \forall x_n$$
$$\Big((\varphi_{S_1}\frac{x_1}{x} \wedge \ldots \wedge \varphi_{S_1}\frac{x_n}{x}) \rightarrow \exists^{=1} y(\varphi_{S_1}\frac{y}{x} \wedge \varphi_f(x_1, \ldots, x_n, y))\Big) \mid n \geq 1,\ f \in S_1\ n\text{-stellig}\}$$

Beachte: $\Phi_I \subseteq L_0^S$.

Falls $\varphi_{S_1}(x) = x \equiv x$, so $\Phi_I \approx \{\exists^{=1} x \varphi_c(x) \mid c \in S_1\} \cup$

$$\{\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists^{=1} y \varphi_f(x_1, \ldots, x_n, y))\Big) \mid n \geq 1,\ f \in S_1\ n\text{-stellig}\}$$

Falls $\varphi_{S_1}(x) = x \equiv x$ und S_1 relational, so $\Phi_I \approx \emptyset$.

Ist $\mathfrak{A}$ eine S-Struktur, $\mathfrak{A} \models \Phi_I$, so sei $\mathfrak{A}^{-I}$ die S_1-Struktur

- $A^{-I} := \{a \in A \mid \mathfrak{A} \models \varphi_{S_1}[a]\}$;
- für n-st. $R \in S_1$, $\bar{a} \in A^{-I}$: $\quad R^{A^{-I}}\bar{a} \iff \mathfrak{A} \models \varphi_R[\bar{a}]$;
- für n-st. $f \in S_1$, $\bar{a}, a \in A^{-I}$: $\quad f^{A^{-I}}(\bar{a}) = a \iff \mathfrak{A} \models \varphi_f[\bar{a}, a]$;
- für $c \in S$, $a \in A^{-I}$: $\quad c^{A^{-I}} = a$ gdw $\mathfrak{A} \models \varphi_c[a]$.

(P1) $\forall x \neg \underline{\sigma}(x) \equiv x$

(P2) $\forall x \forall y (\underline{\sigma}(x) \equiv \underline{\sigma}(y) \to x \equiv y)$

(P3) $\forall X ((X0 \wedge \forall y (Xy \to X\underline{\sigma}(y))) \to \forall z Xz)$

1. Ziel: Jede mathematische Aussage läßt sich in einer für das Universum geeigneten Sprache der ersten Stufe wiedergeben (symbolisieren).

Erfahrungstatsache 1: Es ist möglich, die ganze Vielfalt der Objekte des "mathematischen Universums" auf den Mengenbegriff zurückzuführen: Man kann daher annehmen, das Universum besteht nur aus Mengen.

Erfahrungstatsache 2: Jede mathematische Aussage läßt sich als Aussage über die Gesamtheit der Mengen auffassen und in $L^{\{\epsilon\}}$ symbolisieren.

2. Ziel: Jeder mathematische Beweis läßt sich mit den Regeln des Sequenzenkalküls nachvollziehen.

Erfahrungstatsache 3: Die Eigenschaften des Universums, die Mathematiker/innen verwenden, sind in ZFC, ZFC $\subseteq L_0^{\{\epsilon\}}$, "enthalten" und die Mathematiker/innen akzeptieren die Eigenschaften von ZFC.

Extensionalitätsaxiom: $\varphi_{\mathrm{EXT}} = \quad \forall x \forall y (\forall z (z \underline{\in} x \leftrightarrow z \underline{\in} y) \rightarrow x \equiv y)$

Paarmengenaxiom: $\varphi_{\mathrm{PAAR}} = \quad \forall x \forall y \exists z \forall w (w \underline{\in} z \leftrightarrow (w \equiv x \vee w \equiv y))$

Vereinigungsmengenaxiom: $\varphi_{\mathrm{VER}} = \quad \forall x \exists y \forall z (z \underline{\in} y \leftrightarrow \exists w (w \underline{\in} x \wedge z \underline{\in} w))$

Potenzmengenaxiom: $\varphi_{\mathrm{POT}} = \quad \forall x \exists y \forall z (z \underline{\in} y \leftrightarrow \forall w (w \underline{\in} z \rightarrow w \underline{\in} x))$

Schema der Aussonderung: Sei $n \geq 0$, $\psi \in L_{n+1}^{\{\underline{\in}\}}$ $(x = v_{n+1}, y = v_{n+2}, z = v_{n+3})$

$$\varphi_{\mathrm{AUS}(\psi)} = \quad \forall v_1 \ldots \forall v_n \forall y \exists z \forall x (x \underline{\in} z \leftrightarrow (x \underline{\in} y \wedge \psi(\bar{v}, x)))$$

Schema der Ersetzung: $n \geq 0$, $\psi \in L_{n+2}^{\{\underline{\in}\}}$, $x = v_{n+1}, y = v_{n+2}, u = v_{n+3}, v = v_{n+4}$

$$\varphi_{\mathrm{ERS}(\psi)} = \quad \forall v_1 \ldots \forall v_n (\forall x \exists^{=1} y\, \psi(\bar{v}, x, y) \rightarrow \forall u \exists v \forall y (y \underline{\in} v \leftrightarrow \exists x (x \underline{\in} u \wedge \psi(\bar{v}, x, y))))$$

Unendlichkeitsaxiom: $\varphi_{\mathrm{INF}} = \quad \exists x (\underline{\emptyset} \underline{\in} x \wedge \forall y (y \underline{\in} x \rightarrow y \underline{\cup} \underline{\{} y \underline{\}} \underline{\in} x))$

Auswahlaxiom: $\varphi_{\mathrm{AC}} = \quad \forall x ((\neg \underline{\emptyset} \underline{\in} x \wedge \forall u \forall v ((u \underline{\in} x \wedge v \underline{\in} x \wedge \neg u \equiv v) \rightarrow u \underline{\cap} v \equiv \underline{\emptyset}))$
$\rightarrow \exists y \forall w (w \underline{\in} x \rightarrow \exists^{=1} z\, z \underline{\in} w \underline{\cap} y))$

SYNTAX

1) Alphabet. Zusätzliche Zeichen:

für $n \geq 1$, n-stellige Relationsvariable: $V_1^n, V_2^n, \ldots$ $\qquad X^n, Y^n, X, Y, \ldots$

($n = 1$: Mengenvariable)

für $n \geq 1$, n-stellige Funktionssvariable: $h_1^n, h_2^n, \ldots$ $\qquad h^n, h, \ldots$

2) Termkalkül. Zusätzliche Regel:

$$\frac{t_1, \ldots, t_n}{h^n(t_1, \ldots, t_n)}$$

3) Ausdruckskalkül. Zusätzliche Regeln:

$$\frac{}{X^n t_1 \ldots t_n} \qquad \frac{\varphi}{\exists X \varphi} \qquad \frac{\varphi}{\exists h \varphi}$$

T_{II}^S Menge der S-Terme der 2. Stufe; $\qquad L_{\mathrm{II}}^S$ Menge der S-Ausdrücke der 2. Stufe

Abkürzungen wie früher:

$$
\begin{aligned}
(\varphi \rightarrow \psi) &\quad \text{für} \quad (\neg\varphi \vee \psi) \\
(\varphi \leftrightarrow \psi) &\quad \text{für} \quad (\neg(\varphi \vee \psi) \vee \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)) \\
(\varphi \wedge \psi) &\quad \text{für} \quad \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \\
\forall x \varphi &\quad \text{für} \quad \neg\exists x \neg\varphi \\
\forall X \varphi &\quad \text{für} \quad \neg\exists X \neg\varphi \\
\forall h \varphi &\quad \text{für} \quad \neg\exists h \neg\varphi
\end{aligned}
$$

SEMANTIK

Eine S-Interpretation der 2. Stufe

$$\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \gamma)$$

besteht aus einer S-Struktur $\mathfrak{A}$ und einer Belegung zweiter Stufe γ.

Eine Belegung zweiter Stufe γ in der Struktur $\mathfrak{A}$ ordnet zu:

$$\begin{aligned} x \mapsto \gamma(x) &\quad \text{mit} \quad \gamma(x) \in A \\ h^n \mapsto \gamma(h^n) &\quad \text{mit} \quad \gamma(h^n) : A^n \to A \\ X^n \mapsto \gamma(X^n) &\quad \text{mit} \quad \gamma(X^n) \subseteq A^n. \end{aligned}$$

Für $t \in T_{\text{II}}^S$ wird $\mathfrak{I}(t)$ mit $\mathfrak{I}(t) \in A$ durch Induktion über den Termkalkül wie früher definiert mit der zusätzlichen Festlegung:

$$\mathfrak{I}(h^n(t_1, \ldots, t_n)) = \gamma(h^n)(\mathfrak{I}(t_1), \ldots, \mathfrak{I}(t_n)).$$

MODELLBEZIEHUNG.

Für $\varphi \in L_{\mathrm{II}}^S$ und $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \gamma)$ wird $\mathfrak{I} \models \varphi$ ($\mathfrak{I}$ ist ein Modell von φ) durch Induktion über den Ausdruckskalkül wie früher definiert mit den zusätzlichen Festlegungen:

$$\mathfrak{I} \models X^n t_1 \ldots t_n \iff \gamma(X^n)\, \mathfrak{I}(t_1) \ldots \mathfrak{I}(t_n) \qquad \text{(d.h. } (\mathfrak{I}(t_1) \ldots \mathfrak{I}(t_n)) \in \gamma(X^n));$$

$$\mathfrak{I} \models \exists X^n \varphi \iff \text{ex. } n\text{-stellige Relation } \mathcal{R} \text{ auf } A\text{: } \mathfrak{I}\frac{\mathcal{R}}{X^n} \models \varphi.$$

$$\mathfrak{I} \models \exists h^n \varphi \iff \text{ex. } n\text{-stellige Funktion } \mathfrak{f} \text{ auf } A\text{: } \mathfrak{I}\frac{\mathfrak{f}}{h^n} \models \varphi.$$

Für $\varphi \in L_{\mathrm{II}}^S$ sei $\mathrm{fr}(\varphi)$ die Menge der in φ frei vorkommenden (Individuen)Variable, Funktions- und Relationsvariable.

φ ist ein Satz: $\quad \mathrm{fr}(\varphi) = \emptyset$.

Es gilt das Analogon des Koinzidenzlemmas, insbesondere:

$$\text{wenn } \gamma_1 \restriction \mathrm{fr}(\varphi) = \gamma_2 \restriction \mathrm{fr}(\varphi), \text{ so} \qquad (\mathfrak{A}, \gamma_1) \models \varphi \iff (\mathfrak{A}, \gamma_2) \models \varphi$$

Für einen Satz φ ist daher $\mathfrak{A} \models \varphi$ sinnvoll.

Es gilt das Analogon des Isomorphielemmas, insbesondere:

$$\text{Ist } \varphi \text{ ein Satz, } \mathfrak{A} \models \varphi \text{ und } \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}, \text{ so } \mathfrak{B} \models \varphi.$$

$$\varphi_{\text{endl}} = \text{“Jede injektive Funktion ist surjektiv”}$$

$$= \forall h \Big(\forall x \forall y (h(x) \equiv h(y) \to x \equiv y) \to \forall y \exists x h(x) \equiv y) \Big)$$

$$\psi_{\text{endl}}(Z) = \text{“Jede injektive Funktion auf } Z \text{ ist surjektiv”}$$

$$= \forall h \Big(\big(\forall x (Zx \to Zh(x)) \land \forall x \forall y ((Zx \land Zy \land h(x) \equiv h(y)) \to x \equiv y) \big)$$

$$\to \forall y (Zy \to \exists x (Zx \land h(x) \equiv y)) \Big)$$

$$\varphi_P = \text{“(P1)} \wedge \text{(P2)} \wedge \text{(P3)”} = \forall x \neg \underline{\sigma}(x) \equiv 0 \wedge \forall x \forall y (\underline{\sigma}(x) \equiv \underline{\sigma}(y) \rightarrow x \equiv y)$$
$$\wedge \forall X((X0 \wedge \forall y(Xy \rightarrow X\underline{\sigma}(y))) \rightarrow \forall y Xy)$$

$$\varphi_{\sim\mathbb{N}} = \exists z \exists h \text{“} \varphi_P \frac{h \;\; z}{\underline{\sigma} \;\; 0}\text{''} = \exists z \exists h \forall x \neg h(x) \equiv z \wedge \forall x \forall y (h(x) \equiv h(y) \rightarrow x \equiv y)$$
$$\wedge \forall X((Xz \wedge \forall y(Xy \rightarrow Xh(y))) \rightarrow \forall y Xy)$$

$\psi_{\sim\mathbb{N}}(Z)$:= “es gibt eine zu $(\mathbb{N}, \sigma, 0)$ isomorphe Struktur mit Träger Z”

Zu b): Aufzählungsverfahren: Für $n = 1, 2, \ldots$ stelle man die ersten n Terme und Ausdrücke her in der lexikographischen Reihenfolge und bilde die endlich vielen Ableitungen einer Länge $\leq n$, die nur diese Ausdrücke und Terme verwenden und aus höchstens n-gliedrigen Sequenzen bestehen.

Zu c): Setze Aufzählungsverfahren V_1 für Φ und V_2 für $\{\Gamma\varphi \mid \vdash \Gamma\varphi\}$ in Gang.

Für $n = 1, 2 \ldots$: Sind nach n Schritten von V_1 ausgegeben

$$\psi_1, \ldots, \psi_k$$

und von V_2 ausgegeben

$$\Gamma_1\varphi_1, \ldots, \Gamma_\ell\varphi_\ell,$$

so prüfe für $i = 1, \ldots, \ell$, ob

$$\Gamma_i \subseteq \{\psi_1, \ldots, \psi_k\}$$

und gib ggf. φ_i aus.

(1) $k\ R_i \leftarrow R_i + |$ $(k, i \in \mathbb{N})$

Verlängerungsanwsg.: Füge | an Wort in R_i.

(2) $k\ R_i \leftarrow [R_i)$ $(k, i \in \mathbb{N})$

Verkürzungsanwsg: Streiche letzten Buchstaben in R_i; falls λ in R_i, so bleibt λ in R_i.

(3) $k\ R_i = [R_i)| \Rightarrow \ell; m$ $(k, i, \ell, m \in \mathbb{N})$

Sprunganwsg.: Falls Wort in R_i mit | endet, gehe zu Zeile mit der Nummer ℓ sonst zur Zeile m.

(4) k PRINT R_i $(k, i \in \mathbb{N})$

Druckanwsg: Drucke Wort in R_i.

(5) k HALT $(k \in \mathbb{N})$

Halteanwsg: Halte.

Satz (Unentscheidbarkeit der Logik der 1. Stufe).

$$\{\varphi \in L_0^{S_\infty} \mid \ \models \varphi\}$$

ist R-aufzählbar aber nicht R-entscheidbar.

Beweisidee. P R-Programm über $\Sigma = \{|\}$. $P \mapsto \varphi_P$

$$P : \lambda \to \text{halt} \quad \iff \quad \models \varphi_P. \qquad (*)$$

$P : \alpha_0, \ldots, \alpha_k$ R-Programm über $\Sigma = \{|\}$.

Wähle n minimal mit $\mathrm{Reg}(P) \subseteq \{R_0, \ldots, R_n\}$.

Jedes n-Tupel

$$(\ell, m_0, \ldots, m_n)$$

mit $\ell \leq k$ und $m_0, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$ ist eine Konfiguration von P.

$(\ell, m_0, \ldots, m_n)$ ist die Konfiguration von P nach s Schritten, wenn P angesetzt auf λ mindestens s Schritte läuft und dann α_ℓ aufgerufen wird und $m_0, \ldots, m_n$ in $R_0, \ldots, R_n$ stehen.

$(0, 0, \ldots, 0)$ ist die Konfiguration von P nach 0 Schritten.

P_0:

0 $R_0 \leftarrow R_0 + 1$

1 $R_2 \leftarrow R_2 + 1$

2 PRINT R_2

3 $R_2 = [R_2)| \Rightarrow 0; 1$

4 HALT

$$\psi_P := \psi_O \wedge R\bar{0}\dots\bar{0} \wedge \psi_{\alpha_0} \wedge \dots \wedge \psi_{\alpha_{k-1}}$$

$$\begin{aligned}\psi_O \quad &:= \quad \text{“}\leq \text{ Ordnung mit kleinsten Element } \bar{0}\text{”} \ \wedge \\ &\qquad \forall x(x \leq f(x) \wedge \forall x(\exists y\, x < y \rightarrow (x < f(x) \wedge \forall z(x < z \rightarrow f(x) \leq z)))\end{aligned}$$

$$\alpha : \ \ell\, R_i \leftarrow R_i + |$$

$$\psi_\alpha \quad := \quad \forall x \forall y_0 \dots \forall y_n (Rx\bar{\ell}y_0 \dots y_n \rightarrow (x < f(x) \wedge Rf(x)\overline{\ell+1}y_0 \dots y_{i-1}f(y_i)y_{i+1}\dots y_n))$$

$$\alpha : \ \ell\, R_i \leftarrow [R_i)$$

$$\begin{aligned}\psi_\alpha \quad &:= \quad \forall x \forall y_0 \dots \forall y_n (Rx\bar{\ell}y_0 \dots y_n \rightarrow (x < f(x) \wedge ((y_i \equiv \bar{0} \wedge Rf(x)\overline{\ell+1}y_0 \dots y_n) \vee \\ &\qquad (\neg y_i \equiv \bar{0} \wedge \exists u(f(u) \equiv y_i \wedge Rf(x)\overline{\ell+1}y_0 \dots y_{i-1}uy_{i+1}\dots y_n)))))\end{aligned}$$

$$\alpha : \ \ell\, R_i \leftarrow [R_i)| \Rightarrow m_1; m_2$$

$$\begin{aligned}\psi_\alpha \quad &:= \quad \forall x \forall y_0 \dots \forall y_n (Rx\bar{\ell}y_0 \dots y_n \rightarrow (x < f(x) \wedge \\ &\qquad ((\neg y_i \equiv \bar{0} \wedge Rf(x)\overline{m_1}y_0 \dots y_n) \vee (y_i \equiv \bar{0} \wedge Rf(x)\overline{m_2}y_0 \dots y_n))))\end{aligned}$$

$$\alpha : \; \ell \, \mathrm{PRINT} R_i$$

$$\psi_\alpha \quad := \quad \forall x \forall y_0 \ldots \forall y_n (R x \bar{\ell} y_0 \ldots y_n \rightarrow (x < f(x) \wedge R f(x) \overline{\ell + 1} y_0 \ldots y_n))$$

$\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$, ... Abkürzungen für die Terme 0, $f(0)$, $f(f(0))$,...

Wir geben $\psi_P \in L_0^S$ an mit:

(1) (a) $\mathfrak{A}_P \models \psi_P$

(b) Ist $\mathfrak{A} \models \psi_P$ und ist $(\ell, m_0, \ldots, m_n)$ die Konfiguration von P nach s Schritten, so $\mathfrak{A} \models R\,\overline{s}\,\overline{\ell}\,\overline{m_0} \ldots \overline{m_n}$ und $\overline{0}^{\mathfrak{A}}, \overline{1}^{\mathfrak{A}}, \ldots, \overline{s}^{\mathfrak{A}}$ sind paarweise verschieden.

$S = S_\infty$ oder S entscheidbare Menge konkreter Zeichen.

Sei $T \subseteq L_0^S$ eine Theorie

T R-axiomatisisierbar $\iff$ es existiert $\Phi \subseteq L_0^S$ (Φ R-entscheidbar und $T = \Phi^{\models}$)

Bemerkung 1. Eine R-axiomatisiserbar Theorie ist R-aufzählbar.

Beweis. KLEIN $:= \{(b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{N}^{n+1} \mid \text{für alle } i \leq n: \; b_i < d_i\}$

$$|\text{KLEIN}| = d_0 \cdot \ldots \cdot d_n = d \qquad \text{und} \qquad (a_0, \ldots, a_n) \in \text{KLEIN}.$$

Für $c \in \mathbb{N}$: $R(c) := (r(c, d_0), \ldots, r(c, d_n)) \in$ KLEIN. Somit

$$\{0, \ldots, d-1\} \xrightarrow{R} \text{KLEIN}.$$

Genügt z.z.:

$$\text{Wenn } 0 \leq c < c' < d, \text{ so } R(c) \neq R(c').$$

Dann ist nämlich R auf $\{0, \ldots, d-1\}$ injektiv und damit surjektiv, die Beh.

Ang. $0 \leq c < c' < d$ und $R(c) = R(c')$.

$\Rightarrow$: Für $i = 0, \ldots, n$: $r(c, d_i) = r(c', d_i)$.

$\Rightarrow$: Für $i = 0, \ldots, n$: $d_i | c' - c$ (da $c \equiv r(c, d_i) \mod d_i$ und $c' \equiv r(c, d_i) \mod d_i$)

$\overset{d_i \text{ paarweise tf.}}{\Longrightarrow}$: $d_0 \cdot \ldots \cdot d_n | c' - c$, also $d | c' - c$.

$\overset{0 \leq c' - c < d}{\Longrightarrow}$: $c = c'$.

$$
\begin{aligned}
\chi_P(u_0,\dots,u_n,z,w_0,\dots,w_n) \;:=\; & \exists s\; \exists c \exists t\; \exists c_0 \exists t_0 \dots \exists c_n \exists t_n \\
& \Big(\varphi_\beta(c,t,\bar{0},\bar{0}) \wedge \varphi_\beta(c_0,t_0,\bar{0},u_0) \wedge \dots \wedge \varphi_\beta(c_n,t_n,\bar{0},u_n) \wedge \\
& \varphi_\beta(c,t,s,z) \wedge \varphi_\beta(c_0,t_0,s,w_0) \wedge \dots \wedge \varphi_\beta(c_n,t_n,s,w_n) \wedge \\
& \forall i(i < s \rightarrow \text{“}C_i \rightarrow_P C_{i+1}\text{”})\Big)
\end{aligned}
$$

mit

$$\text{“}C_i \rightarrow_P C_{i+1}\text{”} :=$$

$$\bigwedge_{\ell=0}^{k-1} \forall x_0 \dots \forall x_n((\varphi_\beta(c,t,i,\bar{\ell}) \wedge \varphi_\beta(c_0,t_0,i,x_0) \wedge \dots \wedge \varphi_\beta(c_n,t_n,i,x_n)) \rightarrow \psi_\ell),$$

wobei etwa für “$\ell\; R_j = R_j + |$” $\in P$:

$$
\begin{aligned}
\psi_\ell \;:=\; & (\varphi_\beta(c,t,i+1,\overline{\ell+1}) \wedge \\
& \varphi_\beta(c_0,t_0,i+1,x_0) \wedge \dots \wedge \varphi_\beta(c_j,t_j,i+1,x_j+1) \wedge \dots \wedge \varphi_\beta(c_n,t_n,i+1,x_n)).
\end{aligned}
$$

Lemma 1. Zu $P : \alpha_0, \dots, \alpha_k$ mit $\mathrm{Reg}(P) \subseteq \{R_0, \dots, R_n\}$ (n minimal) kann man effektiv $\chi_P(u_0, \dots, u_n, z, w_0, \dots, w_n)$ angeben mit: Für alle $k_0, \dots, k_n, \ell, m_0, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ mit $\ell \leq k$

$$\mathfrak{N} \models \chi_P[k_0, \dots, k_n, \ell, m_0, \dots, m_n] \iff (0, k_0, \dots, k_n) \Rightarrow_P (\ell, m_0, \dots, m_n).$$

Beweis. Definiere $F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch

$$F(n,m) := \begin{cases} n_{\chi(\bar{m})}, & \text{falls } n = n_\chi \text{ für ein } \chi \in L_1^S; \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

F ist berechenbar. Für $\chi \in L_1^S$ gilt: $\quad F(n_\chi, m) = n_{\chi(\bar{m})}$ (1)

Da F berechenbar und Repr Φ ex. $\alpha \in L_3^S$: $\alpha(x,y,z)$ repräsentiert F in Φ. (2)

Sei nun $\psi = \psi(z) \in L^S$ gegeben. Setze: $\quad \beta(x) := \forall z(\alpha(x,x,z) \to \psi(z))$. (3)

Wegen (1): $\quad F(n_\beta, n_\beta) = n_{\beta(\bar{n}_\beta)} = n_\varphi$ für (4)

$$\varphi := \beta(\bar{n}_\beta) = \forall z(\alpha(\bar{n}_\beta, \bar{n}_\beta, z) \to \psi(z)) \quad (\in L_0^S). \tag{5}$$

Wegen (4) und (2): $\Phi \vdash \alpha(\bar{n}_\beta, \bar{n}_\beta, \bar{n}_\varphi)$. (6)

Behauptung. $\Phi \vdash \varphi \leftrightarrow \psi(\bar{n}_\varphi)$.

$\to$: Wegen (5) $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \alpha(\bar{n}_\beta, \bar{n}_\beta, \bar{n}_\varphi) \to \psi(\bar{n}_\varphi)$, wegen (6) daher $\quad \Phi \vdash \varphi \to \psi(\bar{n}_\varphi)$.

$\leftarrow$: Wegen (2) $\Phi \vdash \exists^{=1} z \alpha(\bar{n}_\beta, \bar{n}_\beta, z)$, wegen (6) daher $\Phi \vdash \forall z(\alpha(\bar{n}_\beta, \bar{n}_\beta, z) \to z = \bar{n}_\varphi)$.

Somit $\Phi \vdash \psi(\bar{n}_\varphi) \to \underbrace{\forall z(\alpha(\bar{n}_\beta, \bar{n}_\beta, z) \to \psi(z))}_{\varphi}$.

Voraussetzungen: S effektiv gegeben, $n \mapsto \bar{n} \in T_0^S$

$$\varphi \mapsto n_\varphi \ (\in \mathbb{N}), \qquad \ulcorner \varphi \urcorner = \bar{n}_\varphi \ (\in T_0^S)$$

PGN Menge der Polynome in mehreren Unbekannten mit ganzzahligen Koeffizienten, die eine ganzzahlige Nullstelle haben.

Satz von Matijasevic (1970):

PGN ist nicht R-entscheidbar.

Somit: Es ist nicht entscheidbar, ob ein Polynom $\underline{\underline{p(x_1, \ldots, x_l)}} \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_l]$ eine Nullstelle in $\mathbb{Z}$ besitzt (d.h. ob ex. $z_1, \ldots, z_l \in \mathbb{Z}$ mit $p(z_1, \ldots, z_l) = 0$).

Lemma von Matijasevic. Sei M, $M \subseteq \mathbb{N}$, R-aufzählbar.

Dann ex. $l \geq 1$ und $p(x_1, \ldots, x_l) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_l]$ mit

$$M = W_{\mathbb{N}}(p) := \{p(z_1, \ldots, z_l) \mid \bar{z} \in \mathbb{Z},\ p(\bar{z}) \geq 0\}.$$

Was ist ein mathematischer Beweis?

1. Ist jede mathematische Aussage beweisbar?
2. Ist jede mathematische Aussage wahr oder falsch?
3. Ist die Mathematik widerspruchsfrei?
4. Kann man das Beweisen Computern überlassen?