http://home.mathematik.uni-freiburg.de/flum/ws07li/index.html `http://home.mathematik.uni-freiburg.de/flum/ws07li/index.html`

Was ist Logik?

Welche Rolle spielt die Logik in der Informatik?

`http://home.mathematik.uni-freiburg.de/flum/ws07li/index.html`

Was ist Logik?

Welche Rolle spielt die Logik in der Informatik?

- Überblick über die Regeln des Schließens. Was ist ein logischer Schluß?

- Was ist ein Beweis? (Regeln des Schließens)

  “daraus folgt” *“somit”*

  “daher” *“unmittelbar ergibt sich”*

Aristoteles (384 - 322 v. Chr.)

- Schule der Sophisten (5 Jh. v. Chr.)

Aristoteles (384 - 322 v. Chr.)

- Schule der Sophisten (5 Jh. v. Chr.)

Achilles und die Schildkröte

Achilles und die Schildkröte laufen ein Wettrennen. Achilles gewährt der Schildkröte einen Vorsprung. Dann kann Achilles die Schildkröte niemals einholen.

Aristoteles (384 - 322 v. Chr.)

- Schule der Sophisten (5 Jh. v. Chr.)

Achilles und die Schildkröte

Achilles und die Schildkröte laufen ein Wettrennen. Achilles gewährt der Schildkröte einen Vorsprung. Dann kann Achilles die Schildkröte niemals einholen.

Zenon von Elea (490 - 425 v. Chr.) gibt folgende Begründung: Zu dem Zeitpunkt, an dem Achilles den Startpunkt der Schildkröte erreicht, ist die Schildkröte schon ein Stück weiter. Etwas später erreicht Achilles diesen Punkt, aber die Schildkröte ist schon etwas weiter. Wenn Achilles diesen Punkte erreicht, ist die Schildkröte wieder etwas weiter. So kann Achilles zwar immer näher an die Schildkröte herankommen, sie aber nie erreichen.

Der Barbier

In einem Städtchen wohnt ein Barbier, der genau diejenigen männlichen Einwohner rasiert, die sich nicht selbst rasieren.

Rasiert nun der Barbier sich selbst?

Der Barbier

In einem Städtchen wohnt ein Barbier, der genau diejenigen männlichen Einwohner rasiert, die sich nicht selbst rasieren.

Rasiert nun der Barbier sich selbst?

Antinomie des Lügners

Epimenides (Kreter, 600 v. Chr.)

Brief des Paulus an Titus 1:12-13:

Einer von ihren eigenen Landsleuten war ein Prophet, als er sagte: "Die Kreter lügen immer. Sie sind Raubtiere, liegen auf der faulen Haut und denken nur ans Fressen". Er hat die Wahrheit gesagt.

Aus Don Quijote de la Mancha von Miguel de Cervantes (1517–1616)

> *Um eine gewisse Brücke zu überqueren, müssen alle Reisenden zunächst angeben, was ihr Ziel ist. Antworten sie wahrheitsgemäß, so dürfen sie die Brücke überqueren. Sonst werden sie gnadenlos an einem Galgen am Fuß der Brücke erhängt.*
>
> *Eines Tages kommt ein Reisender, der angibt, sein Ziel sei es, am Galgen am Fuß der Brücke erhängt zu werden.*

Aristoteles: Bemühen Überblick über die Regeln des Schließens (Syllogismen).

Aristoteles: Bemühen Überblick über die Regeln des Schließens (Syllogismen).

Prämisse:	Alle *Menschen* sind *sterblich*.
Prämisse:	*Sokrates* ist ein *Mensch*.
Konklusion:	*Sokrates* ist *sterblich*.

Aristoteles: Bemühen Überblick über die Regeln des Schließens (Syllogismen).

Prämisse:	Alle *Menschen* sind *sterblich*.
Prämisse:	*Sokrates* ist ein *Mensch*.
Konklusion:	*Sokrates* ist *sterblich*.

Prämisse:	Alle *Sura* sind *derung*.
Prämisse:	*Plarq* ist ein *Sura*.
Konklusion:	*Plarq* ist *derung*.

Aristoteles: Bemühen Überblick über die Regeln des Schließens (Syllogismen).

Prämisse:	Alle *Menschen* sind *sterblich*.
Prämisse:	*Sokrates* ist ein *Mensch*.
Konklusion:	*Sokrates* ist *sterblich*.

Prämisse:	Alle *Sura* sind *derung*.
Prämisse:	*Plarq* ist ein *Sura*.
Konklusion:	*Plarq* ist *derung*.

Prämisse:	Alle p sind q.
Prämisse:	a ist ein p.
Konklusion:	a ist q.

Aristoteles: Bemühen Überblick über die Regeln des Schließens (Syllogismen).

Prämisse:	Alle *Menschen* sind *sterblich*.
Prämisse:	*Sokrates* ist ein *Mensch*.
Konklusion:	*Sokrates* ist *sterblich*.

Prämisse:	Alle *Sura* sind *derung*.
Prämisse:	*Plarq* ist ein *Sura*.
Konklusion:	*Plarq* ist *derung*.

Prämisse:	Alle p sind q.
Prämisse:	a ist ein p.
Konklusion:	a ist q.

Ziel: Alle Schlußregeln.

- R. Llullus (1235–1315)
- G. W. Leibniz (1646–1716)
- G. Boole (1815–1864)
- G. Frege (1848–1943)
- D. Hilbert (1862–1925)
- B. Russell (1872–1970)
- K. Gödel (1906–1978)

Peter fährt toll.

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist eine Funktion.

Peter fährt toll.

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist eine Funktion.

Ein Chinese hat das Pulver entdeckt.

Ein Chinese ist ein Asiat.

Peter fährt toll.

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist eine Funktion.

Ein Chinese hat das Pulver entdeckt.

Ein Chinese ist ein Asiat.

Eine differenzierbare Funktion ist Lösung der Gleichung

$$f'' + f = 0.$$

Eine differenzierbare Funktion ist stetig.

- *Schaltkreisverifikation:* Man möchte beweisen, dass ein Chip richtig funktioniert.
- *Programmverifkation:* Man möchte wissen, dass ein Programm das “Richtige” tut oder dass es zumindest gewisse Eigenschaften hat.
- *Typechecking:* Der Compiler überprüft, dass eine Funktion immer einen Wert vom richtigen Typ zurückgibt.
- *Protokollverifikation:* Man möchte beweisen, dass die Komunikation zwischen zwei “Agenten”, die nach einem gewissen “Protokoll” abläuft, sicher ist.

Logic is “the calculus of computer science”.

Logic permeates through computer science much more than it does through mathematics.

Logic is “the calculus of computer science”.

Logic permeates through computer science much more than it does through mathematics.

Diverse uses of logic in computer science:

- To model computer hardware
- As a database query language
- As a tool for representing and reasoning
- As a tool for specification and verification

Σ Alphabet: Σ nichtleere Menge von Zeichen (Buchstaben, Symbolen);

Σ Alphabet: Σ nichtleere Menge von Zeichen (Buchstaben, Symbolen);

$\Sigma_1 = \{0, 1, \ldots, 9\}$; $\Sigma_2 = \{0, 1\}$; $\Sigma_3 = \{a, b, \ldots, x, y, z\}$; $\Sigma_4 = \{a, d, f, x, \int,), (\}$.

häufig: endliche Alphabete konkreter Zeichen;

Σ Alphabet: Σ nichtleere Menge von Zeichen (Buchstaben, Symbolen);

$\Sigma_1 = \{0, 1, \ldots, 9\}$; $\Sigma_2 = \{0, 1\}$; $\Sigma_3 = \{a, b, \ldots, x, y, z\}$; $\Sigma_4 = \{a, d, f, x, \int,), (\}$.

häufig: endliche Alphabete konkreter Zeichen;

gelegentlich: auch unendliche Alphabete:

$\Sigma_5 = \{c_0, c_1, \ldots\}$; $\Sigma_6 = \{c_r \mid r \in \mathbb{R}\}$.

Σ Alphabet: Σ nichtleere Menge von Zeichen (Buchstaben, Symbolen);

$\Sigma_1 = \{0, 1, \ldots, 9\}$; $\Sigma_2 = \{0, 1\}$; $\Sigma_3 = \{a, b, \ldots, x, y, z\}$; $\Sigma_4 = \{a, d, f, x, \int,), (\}$.

häufig: endliche Alphabete konkreter Zeichen;

gelegentlich: auch unendliche Alphabete:

$\Sigma_5 = \{c_0, c_1, \ldots\}$; $\Sigma_6 = \{c_r \mid r \in \mathbb{R}\}$.

Wort (Zeichenreihe) über Σ: endliche Aneinanderreihung von Buchstaben aus Σ

Wörter: $u, v, w, \ldots$ leere Wort: λ;

Σ^* Menge der Wörter über dem Alphabet Σ

$\int f(x)dx \in \Sigma_4^*$ $\quad a \int \int dxd \in \Sigma_4^*$

Σ Alphabet: Σ nichtleere Menge von Zeichen (Buchstaben, Symbolen);

$\Sigma_1 = \{0, 1, \ldots, 9\}$; $\Sigma_2 = \{0, 1\}$; $\Sigma_3 = \{a, b, \ldots, x, y, z\}$; $\Sigma_4 = \{a, d, f, x, \int,), (\}$.

häufig: endliche Alphabete konkreter Zeichen;

gelegentlich: auch unendliche Alphabete:

$\Sigma_5 = \{c_0, c_1, \ldots\}$; $\Sigma_6 = \{c_r \mid r \in \mathbb{R}\}$.

Wort (Zeichenreihe) über Σ: endliche Aneinanderreihung von Buchstaben aus Σ

Wörter: $u, v, w, \ldots$ leere Wort: λ;

Σ^* Menge der Wörter über dem Alphabet Σ

$\int f(x)dx \in \Sigma_4^*$ $\quad a \int \int dxd \in \Sigma_4^*$

$|w|$ Länge von w

$|a \int \int dxd| = 6$ $\quad |\lambda| = 0$.

$\Sigma_5 = \{c_0, c_1, \ldots\}$ ersetzen durch endliches Alphabet, etwa durch

$$\Sigma_7 := \{c,\ 0,\ 1, \ldots,\ 9\}.$$

Bei Identifikation von c_{25} mit $c\,2\,5$:

$$\Sigma_5 \subseteq \Sigma_7^* \quad \text{und} \quad \Sigma_5^* \subseteq \Sigma_7^*.$$

X: Die Sonne scheint.

Y: Die Logikvorlesung ist langweilig.

Z: Das Softwarepraktikum ist langweilig.

Y und Z: Die Logikvorlesung und das Softwarepraktikum sind langweilig.

Wenn nicht X, so Y: Wenn die Sonne nicht scheint, dann ist die Logikvorlesung langweilig.

Aussagenlogische Ausdrücke oder aussagenlogische Formeln sind die Wörter über Σ_a, die mit den folgenden Regeln ableitbar sind:

(A1) Jede aussagenlogische Variable ist ein Ausdruck.

(A2) Ist α ein Ausdruck, so auch $\neg\alpha$.

(A3) Sind α und β Ausdrücke, so auch $(\alpha \wedge \beta)$ und $(\alpha \vee \beta)$.

Aussagenlogische Ausdrücke oder aussagenlogische Formeln sind die Wörter über Σ_a, die mit den folgenden Regeln ableitbar sind:

(A1) Jede aussagenlogische Variable ist ein Ausdruck.

(A2) Ist α ein Ausdruck, so auch $\neg\alpha$.

(A3) Sind α und β Ausdrücke, so auch $(\alpha \wedge \beta)$ und $(\alpha \vee \beta)$.

Beispiel. $(\neg X_5 \vee (X_7 \wedge X_5))$ ist ein Ausdruck.

Aussagenlogische Ausdrücke oder aussagenlogische Formeln sind die Wörter über Σ_a, die mit den folgenden Regeln ableitbar sind:

(A1) Jede aussagenlogische Variable ist ein Ausdruck.

(A2) Ist α ein Ausdruck, so auch $\neg\alpha$.

(A3) Sind α und β Ausdrücke, so auch $(\alpha \wedge \beta)$ und $(\alpha \vee \beta)$.

Beispiel. $(\neg X_5 \vee (X_7 \wedge X_5))$ ist ein Ausdruck.

Begründung: Angabe einer Ableitung:

1	X_5	(A1)
2	X_7	(A1)
3	$(X_7 \wedge X_5)$	(A3) auf 2 und 1
4	$\neg X_5$	(A2) auf 1
5	$(\neg X_5 \vee (X_7 \wedge X_5))$	(A3) auf 4 und 3

Aussagenlogische Ausdrücke oder aussagenlogische Formeln sind die Wörter über Σ_a, die mit den folgenden Regeln ableitbar sind:

(A1) Jede aussagenlogische Variable ist ein Ausdruck.

(A2) Ist α ein Ausdruck, so auch $\neg\alpha$.

(A3) Sind α und β Ausdrücke, so auch $(\alpha \wedge \beta)$ und $(\alpha \vee \beta)$.

Beispiel. $(\neg X_5 \vee (X_7 \wedge X_5))$ ist ein Ausdruck.

Begründung: Angabe einer Ableitung:

1	X_5	(A1)
2	X_7	(A1)
3	$(X_7 \wedge X_5)$	(A3) auf 2 und 1
4	$\neg X_5$	(A2) auf 1
5	$(\neg X_5 \vee (X_7 \wedge X_5))$	(A3) auf 4 und 3

Ableitung nicht eindeutig:

1	X_5	(A1)
2	$\neg X_5$	(A2) auf 1
3	X_7	(A1)
4	$(X_7 \wedge X_5)$	(A3) auf 3 und 1
5	$(\neg X_5 \vee (X_7 \wedge X_5))$	(A3) auf 2 und 4

Eine rekursive Definition einer Menge M wird durch einen Kalkül bestehend aus rekursiven Regeln gegeben, d.h. Regeln der Gestalt:

Wenn $m_1, \ldots, m_r \in M$, so auch $m \in M$

kurz:

$$\frac{m_1, \ldots, m_r}{m}$$

Eine rekursive Definition einer Menge M wird durch einen Kalkül bestehend aus rekursiven Regeln gegeben, d.h. Regeln der Gestalt:

Wenn $m_1, \ldots, m_r \in M$, so auch $m \in M$

kurz:

$$\frac{m_1, \ldots, m_r}{m}$$

Falls $r = 0$, so spricht man auch von einer Basisregel oder Ausgangsregel. Sie hat also die Gestalt:

$m \in M \qquad\qquad \overline{m}$

Eine rekursive Definition einer Menge M wird durch einen Kalkül bestehend aus rekursiven Regeln gegeben, d.h. Regeln der Gestalt:

Wenn $m_1, \ldots, m_r \in M$, so auch $m \in M$

kurz:

$$\frac{m_1, \ldots, m_r}{m}$$

Falls $r = 0$, so spricht man auch von einer Basisregel oder Ausgangsregel. Sie hat also die Gestalt:

$m \in M$ $\qquad\qquad \dfrac{\quad}{m}$

M ist dann die Menge aller Objekte, deren Zugehörigkeit zu M durch endlichmalige Anwendung der Regeln des Kalküls gezeigt werden kann.

Beispiel. Sei $\Sigma = \{a, b, \ldots, y, z\}$ und M gegeben durch Kalkül:

(R0) $\dfrac{}{\lambda}$

(R1) $\dfrac{W}{W\xi\eta}$, $\xi \in \{a, e, i, o, u\}$, $\eta \in \Sigma$.

Beispiel. Sei $\Sigma = \{a, b, \ldots, y, z\}$ und M gegeben durch Kalkül:

(R0) $\dfrac{}{\lambda}$

(R1) $\dfrac{W}{W\xi\eta}$, $\xi \in \{a, e, i, o, u\}$, $\eta \in \Sigma$.

$axei \in M$:

1	λ	(R0)
2	ax	(R1) auf 1 mit $\xi = a$ und $\eta = x$
3	$axei$	(R1) auf 2 mit $\xi = e$ und $\eta = i$

Induktionsprinzip für rekursiv definierte Mengen:

Will man zeigen, daß alle Elemente einer Menge M, die durch einen Kalkül K definiert ist, eine Eigenschaft E haben, so genügt hierzu der Nachweis, daß

für jede Regel

$$\frac{m_1, \ldots, m_r}{m}$$

von K gilt: Wenn $m_1, \ldots, m_r$ in K ableitbar sind und die Eigenschaft E haben (*Induktionsvoraussetzung*), so hat auch m die Eigenschaft E.

Induktionsprinzip für rekursiv definierte Mengen:

Will man zeigen, daß alle Elemente einer Menge M, die durch einen Kalkül K definiert ist, eine Eigenschaft E haben, so genügt hierzu der Nachweis, daß

für jede Regel

$$\frac{m_1, \ldots, m_r}{m}$$

von K gilt: Wenn $m_1, \ldots, m_r$ in K ableitbar sind und die Eigenschaft E haben (*Induktionsvoraussetzung*), so hat auch m die Eigenschaft E.

Falls $r = 0$ müssen wir also zeigen, daß m die Eigenschaft E hat (*Induktionsanfang*).

(Induktion über den Kalkül K)

Induktionsprinzip für rekursiv definierte Mengen:

Will man zeigen, daß alle Elemente einer Menge M, die durch einen Kalkül K definiert ist, eine Eigenschaft E haben, so genügt hierzu der Nachweis, daß

für jede Regel

$$\frac{m_1, \ldots, m_r}{m}$$

von K gilt: Wenn $m_1, \ldots, m_r$ in K ableitbar sind und die Eigenschaft E haben (*Induktionsvoraussetzung*), so hat auch m die Eigenschaft E.

Falls $r = 0$ müssen wir also zeigen, daß m die Eigenschaft E hat (*Induktionsanfang*).

(Induktion über den Kalkül K)

Beweis durch Induktion über den Ausdruckskalkül (über den Aufbau der Ausdrücke):

Um nachzuweisen, daß alle aussagenlogischen Ausdrücke eine Eigenschaft E haben, reicht es, zu zeigen:

(I1): Jede Aussagenvariable hat die Eigenschaft E.

(I2): Hat der Ausdruck α die Eigenschaft E, so auch $\neg\alpha$.

(I3): Haben die Ausdrücke α und β die Eigenschaft E, so auch $(\alpha \wedge \beta)$ und $(\alpha \vee \beta)$.

Wozu Klammern? $\overline{X}$ $\frac{\alpha}{\neg\alpha}$ $\frac{\alpha, \beta}{\alpha \wedge \beta}$ $\frac{\alpha, \beta}{\alpha \vee \beta}$

Wozu Klammern? $\dfrac{}{X}$ $\dfrac{\alpha}{\neg\alpha}$ $\dfrac{\alpha, \beta}{\alpha \wedge \beta}$ $\dfrac{\alpha, \beta}{\alpha \vee \beta}$

Aussagenlogische Belegung:

$$b : \mathrm{AV} \to \{0, 1\}.$$

Wozu Klammern? $\overline{X}$ $\qquad \dfrac{\alpha}{\neg\alpha}$ $\qquad \dfrac{\alpha, \beta}{\alpha \wedge \beta}$ $\qquad \dfrac{\alpha, \beta}{\alpha \vee \beta}$

Aussagenlogische Belegung:

$$b : \mathrm{AV} \to \{0, 1\}.$$

Erweitern auf alle aussagenlogische Ausdrücke durch Vorschriften:

$$\text{(F1)} \quad b(\neg\alpha) \quad := \begin{cases} 1 & \text{wenn } b(\alpha) = 0 \\ 0 & \text{wenn } b(\alpha) = 1 \end{cases}$$

$$\text{(F2)} \quad b(\alpha \wedge \beta) \quad := \begin{cases} 1 & \text{wenn } b(\alpha) = 1 \text{ und } b(\beta) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{(F3)} \quad b(\alpha \vee \beta) \quad := \begin{cases} 0 & \text{wenn } b(\alpha) = 0 \text{ und } b(\beta) = 0 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $b(X) = b(Y) = 0$ und $b(Z) = 1$. Was ist $b(X \wedge Y \vee Z)$?

$$b(X \wedge Y) \stackrel{(F2)}{=} 0 \qquad\qquad b(Y \vee Z) \stackrel{(F3)}{=} 1$$

$$b(X \wedge Y \vee Z) \stackrel{(F3)}{=} 1 \qquad\qquad b(X \wedge Y \vee Z) \stackrel{(F2)}{=} 0$$

Satz über die eindeutige Zerlegbarkeit

Jeder Ausdruck $\alpha \in$ AA ist entweder ein Ausdruck der Gestalt

(1) X_i oder

(2) $\neg\beta$ oder

(3) $(\beta \wedge \gamma)$ oder

(4) $(\beta \vee \gamma)$.

Satz über die eindeutige Zerlegbarkeit

Jeder Ausdruck $\alpha \in \mathrm{AA}$ ist entweder ein Ausdruck der Gestalt

(1) X_i oder

(2) $\neg\beta$ oder

(3) $(\beta \wedge \gamma)$ oder

(4) $(\beta \vee \gamma)$.

Dabei sind eindeutig bestimmt

$$\beta \text{ in (2)} \quad \text{und} \quad \beta \text{ und } \gamma \text{ in (3),(4).}$$

Fall (2): α die Negation von β

Fall (3): α die Konjunktion von β und γ

Fall (4): α die Disjunktion von β und γ

Beweis des Hilfsatzes: E trifft auf $x \in \Sigma_a^*$ zu: (echAnfst. = echtes Anfangsstück)

für alle $\beta \in$ AA: $\big(x$ ist kein echAnfst. von β und β ist kein echAnfst. von $x\big)$.

Beweis des Hilfsatzes: E trifft auf $x \in \Sigma_a^*$ zu: (echAnfst. = echtes Anfangsstück)

für alle $\beta \in$ AA: $\big(x$ ist kein echAnfst. von β und β ist kein echAnfst. von $x\big)$.

Wir zeigen durch Induktion im Ausdruckskalkül:

$$\text{für alle } \alpha \in \text{AA:} \quad E \text{ trifft zu auf } \alpha$$

Beweis des Hilfsatzes: E trifft auf $x \in \Sigma_\alpha^*$ zu: (echAnfst. = echtes Anfangsstück)

für alle $\beta \in$ AA: $\big(x$ ist kein echAnfst. von β und β ist kein echAnfst. von $x\big)$.

Wir zeigen durch Induktion im Ausdruckskalkül:

$$\text{für alle } \alpha \in \text{AA:} \quad E \text{ trifft zu auf } \alpha$$

(I1) $\alpha = X_i$: Sei $\beta \in$ AA. Dann ist α kein echAnfst. von β, da jeder von X_i verschiedene Ausdruck nicht mit X_i beginnt.

Beweis des Hilfsatzes: E trifft auf $x \in \Sigma_\alpha^*$ zu: (echAnfst. = echtes Anfangsstück)

für alle $\beta \in$ AA: $\big(x$ ist kein echAnfst. von β und β ist kein echAnfst. von $x\big)$.

Wir zeigen durch Induktion im Ausdruckskalkül:

$$\text{für alle } \alpha \in \text{AA:} \quad E \text{ trifft zu auf } \alpha$$

(I1) $\alpha = X_i$: Sei $\beta \in$ AA. Dann ist α kein echAnfst. von β, da jeder von X_i verschiedene Ausdruck nicht mit X_i beginnt. Auch β ist kein echAnfst. von α, da $|\alpha| = 1$ und $|\beta| \geq 1$ für jedes $\beta \in$ AA.

Beweis des Hilfsatzes: E trifft auf $x \in \Sigma_a^*$ zu: (echAnfst. = echtes Anfangsstück)

für alle $\beta \in$ AA: $(x$ ist kein echAnfst. von β und β ist kein echAnfst. von $x)$.

Wir zeigen durch Induktion im Ausdruckskalkül:

$$\text{für alle } \alpha \in \text{AA:} \quad E \text{ trifft zu auf } \alpha$$

(I1) $\alpha = X_i$: Sei $\beta \in$ AA. Dann ist α kein echAnfst. von β, da jeder von X_i verschiedene Ausdruck nicht mit X_i beginnt. Auch β ist kein echAnfst. von α, da $|\alpha| = 1$ und $|\beta| \geq 1$ für jedes $\beta \in$ AA.

(I2) $\alpha = \neg\alpha'$ und E trifft auf α' zu: Sei $\beta \in$ AA und etwa

$$\alpha = \beta w.$$

Zu zeigen $w = \lambda$.

Beweis des Hilfsatzes: E trifft auf $x \in \Sigma_a^*$ zu: (echAnfst. = echtes Anfangsstück)

für alle $\beta \in \mathrm{AA}$: (x ist kein echAnfst. von β und β ist kein echAnfst. von x).

Wir zeigen durch Induktion im Ausdruckskalkül:

$$\text{für alle } \alpha \in \mathrm{AA}: \quad E \text{ trifft zu auf } \alpha$$

(I1) $\alpha = X_i$: Sei $\beta \in \mathrm{AA}$. Dann ist α kein echAnfst. von β, da jeder von X_i verschiedene Ausdruck nicht mit X_i beginnt. Auch β ist kein echAnfst. von α, da $|\alpha| = 1$ und $|\beta| \geq 1$ für jedes $\beta \in \mathrm{AA}$.

(I2) $\alpha = \neg\alpha'$ und E trifft auf α' zu: Sei $\beta \in \mathrm{AA}$ und etwa

$$\alpha = \beta w.$$

Zu zeigen $w = \lambda$. Es gibt x mit $\beta = \neg x$. Somit β mit (A2) gewonnen, also gibt es $\gamma \in \mathrm{AA}$ mit $\beta = \neg\gamma$. Somit $\neg\alpha' = \neg\gamma w$; daher $\alpha' = \gamma w$. Da E auf α' zutrifft: $w = \lambda$.

(I3) $\alpha = (\alpha_1 \vee \alpha_2)$ und E trifft auf α_1 und α_2 zu: Sei $\beta \in$ AA und etwa

$$\alpha = \beta w.$$

Zu zeigen $w = \lambda$.

(I3) $\alpha = (\alpha_1 \vee \alpha_2)$ und E trifft auf α_1 und α_2 zu: Sei $\beta \in$ AA und etwa

$$\alpha = \beta w.$$

Zu zeigen $w = \lambda$. Der Ausdruck β beginnt mit (; somit existieren $\beta_1, \beta_2 \in$ AA und $\circ \in \{\wedge, \vee\}$ mit $\beta = (\beta_1 \circ \beta_2)$. Dann

$$\alpha_1 \vee \alpha_2) = \beta_1 \circ \beta_2)w$$

(I3) $\alpha = (\alpha_1 \vee \alpha_2)$ und E trifft auf α_1 und α_2 zu: Sei $\beta \in$ AA und etwa

$$\alpha = \beta w.$$

Zu zeigen $w = \lambda$. Der Ausdruck β beginnt mit (; somit existieren $\beta_1, \beta_2 \in$ AA und $\circ \in \{\wedge, \vee\}$ mit $\beta = (\beta_1 \circ \beta_2)$. Dann

$$\alpha_1 \vee \alpha_2) = \beta_1 \circ \beta_2)w$$

Da E auf α_1 zutrifft: $\alpha_1 = \beta_1$ und somit $\circ = \vee$ und

$$\alpha_2) = \beta_2)w$$

Da E auf α_2 zutrifft: $\alpha_2 = \beta_2$ und daher $w = \lambda$.

Bemerkung (Induktive Definitionen über den Aufbau der Ausdrücke). Um in eindeutiger Weise eine Funktion für alle Ausdrücke zu definieren, genügt es,

(D1): jeder Aussagenvariable einen Wert zuzuordnen;

(D2): jedem Ausdruck $\neg\alpha$ einen Wert zuzuordnen unter der Annahme, daß dem Ausdruck α bereits ein Wert zugeordnet ist;

(D3): a) jedem Ausdruck $(\alpha_1 \wedge \alpha_2)$ einen Wert zuzuordnen unter der Annahme, daß den Ausdücken α_1 und α_2 bereits je ein Wert zugeordnet ist;

b) jedem Ausdruck $(\alpha_1 \vee \alpha_2)$ einen Wert zuzuordnen unter der Annahme, daß den Ausdücken α_1 und α_2 bereits je ein Wert zugeordnet ist.

Bemerkung (Induktive Definitionen über den Aufbau der Ausdrücke). Um in eindeutiger Weise eine Funktion für alle Ausdrücke zu definieren, genügt es,

(D1): jeder Aussagenvariable einen Wert zuzuordnen;

(D2): jedem Ausdruck $\neg\alpha$ einen Wert zuzuordnen unter der Annahme, daß dem Ausdruck α bereits ein Wert zugeordnet ist;

(D3): a) jedem Ausdruck $(\alpha_1 \wedge \alpha_2)$ einen Wert zuzuordnen unter der Annahme, daß den Ausdücken α_1 und α_2 bereits je ein Wert zugeordnet ist;

b) jedem Ausdruck $(\alpha_1 \vee \alpha_2)$ einen Wert zuzuordnen unter der Annahme, daß den Ausdücken α_1 und α_2 bereits je ein Wert zugeordnet ist.

Beispiel 1. $\mathrm{rg} : \mathrm{AA} \to \mathbb{N}$ ($\mathrm{rg}(\alpha)$ der Rang von α):

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(X) &= 0 \\
\mathrm{rg}(\neg\alpha) &= 1 + \mathrm{rg}(\alpha) \\
\mathrm{rg}((\alpha \wedge \beta)) &= 1 + \max\{\mathrm{rg}(\alpha), \mathrm{rg}(\beta)\} \\
\mathrm{rg}((\alpha \vee \beta)) &= 1 + \max\{\mathrm{rg}(\alpha), \mathrm{rg}(\beta)\}
\end{aligned}$$

Beispiel 2. $\mathrm{TA} : \mathrm{AA} \longrightarrow \mathrm{Pot}(\mathrm{AA})$ ($\mathrm{TA}(\alpha)$ die Menge der Teilausdrücke oder Subformeln von α):

Beispiel 2. TA : AA $\to$ Pot(AA) (TA(α) die Menge der Teilausdrücke oder Subformeln von α):

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{TA}(X) & = & \{X\} \\ \mathrm{TA}(\neg\alpha) & = & \mathrm{TA}(\alpha) \cup \{\neg\alpha\} \\ \mathrm{TA}((\alpha \wedge \beta)) & = & \mathrm{TA}(\alpha) \cup \mathrm{TA}(\beta) \cup \{(\alpha \wedge \beta)\} \\ \mathrm{TA}((\alpha \vee \beta)) & = & \mathrm{TA}(\alpha) \cup \mathrm{TA}(\beta) \cup \{(\alpha \vee \beta)\}. \end{array}$$

Defintion. – Eine (aussagenlogische) Belegung ist eine Abbildung b mit

$$\mathrm{df}(b) \subseteq \mathrm{AV} \quad \text{und} \quad b : \mathrm{df} \rightarrow \{1, 0\}.$$

Defintion. – Eine (aussagenlogische) Belegung ist eine Abbildung b mit

$$\mathrm{df}(b) \subseteq \mathrm{AV} \quad \text{und} \quad b : \mathrm{df} \to \{1, 0\}.$$

– Eine Belegung b ist total, wenn $\mathrm{df}(b) = \mathrm{AV}$.

Defintion. – Eine (aussagenlogische) Belegung ist eine Abbildung b mit

$$\mathrm{df}(b) \subseteq \mathrm{AV} \quad \text{und} \quad b : \mathrm{df} \to \{1, 0\}.$$

– Eine Belegung b ist total, wenn $\mathrm{df}(b) = \mathrm{AV}$.

– Eine Belegung b ist Belegung für α, wenn $\mathrm{var}(\alpha) \subseteq \mathrm{df}(b)$.

Defintion. – Eine (aussagenlogische) Belegung ist eine Abbildung b mit

$$\mathrm{df}(b) \subseteq \mathrm{AV} \quad \text{und} \quad b : \mathrm{df} \to \{1, 0\}.$$

– Eine Belegung b ist total, wenn $\mathrm{df}(b) = \mathrm{AV}$.

– Eine Belegung b ist Belegung für α, wenn $\mathrm{var}(\alpha) \subseteq \mathrm{df}(b)$.

Defintion. Sei b eine Belegung. Durch Induktion über den Aufbau der Ausdrücke definieren wir $\tilde{b}(\alpha)$, den Wert von α bei b, für alle $\alpha \in \mathrm{AA}$ mit $\mathrm{var}(\alpha) \subseteq \mathrm{df}(b)$:

Defintion. – Eine (aussagenlogische) Belegung ist eine Abbildung b mit

$$\mathrm{df}(b) \subseteq \mathrm{AV} \quad \text{und} \quad b : \mathrm{df} \to \{1, 0\}.$$

– Eine Belegung b ist total, wenn $\mathrm{df}(b) = \mathrm{AV}$.

– Eine Belegung b ist Belegung für α, wenn $\mathrm{var}(\alpha) \subseteq \mathrm{df}(b)$.

Defintion. Sei b eine Belegung. Durch Induktion über den Aufbau der Ausdrücke definieren wir $\tilde{b}(\alpha)$, den Wert von α bei b, für alle $\alpha \in \mathrm{AA}$ mit $\mathrm{var}(\alpha) \subseteq \mathrm{df}(b)$:

$$\begin{aligned} \tilde{b}(X) &:= b(X) && \text{für } X \in \mathrm{df}(b); \\ \tilde{b}(\neg\alpha) &:= \dot{\neg}(\tilde{b}(\alpha)) \\ \tilde{b}((\alpha \wedge \beta)) &:= \dot{\wedge}(\tilde{b}(\alpha), \tilde{b}(\beta)) \\ \tilde{b}((\alpha \vee \beta)) &:= \dot{\vee}(\tilde{b}(\alpha), \tilde{b}(\beta)) \end{aligned}$$

Defintion. – Eine (aussagenlogische) Belegung ist eine Abbildung b mit

$$\mathrm{df}(b) \subseteq \mathrm{AV} \quad \text{und} \quad b : \mathrm{df} \to \{1, 0\}.$$

– Eine Belegung b ist total, wenn $\mathrm{df}(b) = \mathrm{AV}$.

– Eine Belegung b ist Belegung für α, wenn $\mathrm{var}(\alpha) \subseteq \mathrm{df}(b)$.

Defintion. Sei b eine Belegung. Durch Induktion über den Aufbau der Ausdrücke definieren wir $\tilde{b}(\alpha)$, den Wert von α bei b, für alle $\alpha \in \mathrm{AA}$ mit $\mathrm{var}(\alpha) \subseteq \mathrm{df}(b)$:

$$\begin{array}{rcll}
\tilde{b}(X) & := & b(X) & \text{für } X \in \mathrm{df}(b); \\
\tilde{b}(\neg\alpha) & := & \dot{\neg}(\tilde{b}(\alpha)) & \\
\tilde{b}((\alpha \wedge \beta)) & := & \dot{\wedge}(\tilde{b}(\alpha), \tilde{b}(\beta)) & \\
\tilde{b}((\alpha \vee \beta)) & := & \dot{\vee}(\tilde{b}(\alpha), \tilde{b}(\beta)) &
\end{array}$$

Statt $\tilde{b}(\alpha)$ auch $b(\alpha)$. Statt $b(\alpha) = 1$ auch $b \models \alpha$.

Defintion. – Eine (aussagenlogische) Belegung ist eine Abbildung b mit

$$\mathrm{df}(b) \subseteq \mathrm{AV} \quad \text{und} \quad b : \mathrm{df} \to \{1, 0\}.$$

– Eine Belegung b ist total, wenn $\mathrm{df}(b) = \mathrm{AV}$.

– Eine Belegung b ist Belegung für α, wenn $\mathrm{var}(\alpha) \subseteq \mathrm{df}(b)$.

Defintion. Sei b eine Belegung. Durch Induktion über den Aufbau der Ausdrücke definieren wir $\tilde{b}(\alpha)$, den Wert von α bei b, für alle $\alpha \in \mathrm{AA}$ mit $\mathrm{var}(\alpha) \subseteq \mathrm{df}(b)$:

$$\begin{aligned}
\tilde{b}(X) &:= b(X) && \text{für } X \in \mathrm{df}(b); \\
\tilde{b}(\neg\alpha) &:= \dot{\neg}(\tilde{b}(\alpha)) \\
\tilde{b}((\alpha \wedge \beta)) &:= \dot{\wedge}(\tilde{b}(\alpha), \tilde{b}(\beta)) \\
\tilde{b}((\alpha \vee \beta)) &:= \dot{\vee}(\tilde{b}(\alpha), \tilde{b}(\beta))
\end{aligned}$$

Statt $\tilde{b}(\alpha)$ auch $b(\alpha)$. Statt $b(\alpha) = 1$ auch $b \models \alpha$.

Sprechweisen: “α gilt bei b,” “b erfüllt α,” “b ist Modell von α,” “b macht α wahr”

Koinzidenzlemma. Seien b, b' Belegungen für α, also

$$\mathrm{var}(\alpha) \subseteq \mathrm{df}(b) \cap \mathrm{df}(b'),$$

und gelte

$$\text{für alle } X \in \mathrm{var}(\alpha): \quad b(X) = b'(X).$$

Koinzidenzlemma. Seien b, b' Belegungen für α, also

$$\mathrm{var}(\alpha) \subseteq \mathrm{df}(b) \cap \mathrm{df}(b'),$$

und gelte

$$\text{für alle } X \in \mathrm{var}(\alpha): \quad b(X) = b'(X).$$

Dann

$$b(\alpha) = b'(\alpha).$$

Koinzidenzlemma. Seien b, b' Belegungen für α, also

$$\mathrm{var}(\alpha) \subseteq \mathrm{df}(b) \cap \mathrm{df}(b'),$$

und gelte

$$\text{für alle } X \in \mathrm{var}(\alpha)\colon \quad b(X) = b'(X).$$

Dann

$$b(\alpha) = b'(\alpha).$$

Beweis. Zeige durch Induktion über den Aufbau der Ausdrücke β:

$$\text{wenn } \mathrm{var}(\beta) \subseteq \mathrm{df}(b) \cap \mathrm{df}(b'), \text{ so } b(\beta) = b'(\beta).$$

Koinzidenzlemma. Seien b, b' Belegungen für α, also

$$\mathrm{var}(\alpha) \subseteq \mathrm{df}(b) \cap \mathrm{df}(b'),$$

und gelte

$$\text{für alle } X \in \mathrm{var}(\alpha)\text{:} \quad b(X) = b'(X).$$

Dann

$$b(\alpha) = b'(\alpha).$$

Beweis. Zeige durch Induktion über den Aufbau der Ausdrücke β:

$$\text{wenn } \mathrm{var}(\beta) \subseteq \mathrm{df}(b) \cap \mathrm{df}(b'), \text{ so } b(\beta) = b'(\beta).$$

Konvention: Ist $\alpha(Y_1, \ldots, Y_n)$ und sind $b_1, \ldots, b_n \in \{0, 1\}$, so steht

$$\alpha[b_1, \ldots, b_n]$$

für den Wert $b(\alpha)$, wobei b irgendeine Belegung ist mit $b(Y_1) = b_1, \ldots, b(Y_n) = b_n$.

$$n \geq 1 \qquad \mathrm{AA}_n := \{\alpha \mid \mathrm{var}(\alpha) \subseteq \{X_1, \ldots, X_n\}\}.$$

$$n \geq 1 \qquad \mathrm{AA}_n := \{\alpha \mid \mathrm{var}(\alpha) \subseteq \{X_1, \ldots, X_n\}\}.$$

$$\mathrm{AA}_1 \subseteq \mathrm{AA}_2 \subseteq \ldots \qquad \text{und} \qquad \mathrm{AA} = \bigcup_{n \geq 1} \mathrm{AA}_n.$$

$$n \geq 1 \qquad \mathrm{AA}_n := \{\alpha \mid \mathrm{var}(\alpha) \subseteq \{X_1, \ldots, X_n\}\}.$$

$$\mathrm{AA}_1 \subseteq \mathrm{AA}_2 \subseteq \ldots \qquad \text{und} \qquad \mathrm{AA} = \bigcup_{n \geq 1} \mathrm{AA}_n.$$

Konvention: Schreiben wir $\alpha \in \mathrm{AA}_n$ und sind $b_1, \ldots, b_n \in \{0, 1\}$, so steht

$$\alpha[b_1, \ldots, b_n]$$

für den Wert $b(\alpha)$, wobei b irgendeine Belegung ist mit $b(X_1) = b_1, \ldots, b(X_n) = b_n$.

α, $\beta \in$ AA.

α	β	$\neg\alpha$	$(\neg\alpha \vee \beta)$
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

$\alpha,\ \beta \in$ AA.

α	β	$\neg\alpha$	$(\neg\alpha \vee \beta)$
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

Somit gilt für jede Belegung b für $(\neg\alpha \vee \beta)$:

$$b((\neg\alpha \vee \beta)) = \dot{\rightarrow}(b(\alpha), b(\beta)).$$

Wir fassen $(\alpha \rightarrow \beta)$ als Abkürzung für $(\neg\alpha \vee \beta)$ auf.

α	β	$(\neg\alpha \vee \beta)$	$(\neg\beta \vee \alpha)$	$((\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\beta \vee \alpha))$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

α	β	$(\neg\alpha \vee \beta)$	$(\neg\beta \vee \alpha)$	$((\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\beta \vee \alpha))$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Somit gilt für jede Belegung b für $((\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\beta \vee \alpha))$:

$$b(((\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\beta \vee \alpha))) = \dot{\leftrightarrow}(b(\alpha), b(\beta)).$$

Wir fassen $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ als Abkürzung für $((\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\beta \vee \alpha))$ auf.

Definition. (Hier sei mit Belegung stets Belegungen b mit $\mathrm{df}(b) = \mathrm{AV}$ gemeint)

Definition. (Hier sei mit Belegung stets Belegungen b mit $\mathrm{df}(b) = \mathrm{AV}$ gemeint)

a) α ist allgemeingültig (ist eine Tautologie), $\models \alpha$, gdw α gilt bei allen Belegungen.

Definition. (Hier sei mit Belegung stets Belegungen b mit $\mathrm{df}(b) = \mathrm{AV}$ gemeint)

a) α ist allgemeingültig (ist eine Tautologie), $\models\alpha$, gdw α gilt bei allen Belegungen.

b) α ist erfüllbar, Erf α, gdw es gibt eine Belegung, die α erfüllt.

Definition. (Hier sei mit Belegung stets Belegungen b mit $\mathrm{df}(b) = \mathrm{AV}$ gemeint)

a) α ist allgemeingültig (ist eine Tautologie), $\models\alpha$, gdw α gilt bei allen Belegungen.

b) α ist erfüllbar, Erf α, gdw es gibt eine Belegung, die α erfüllt.

c) α und β sind logisch äquivalent, $\alpha \equiv \beta$, gdw $\models (\alpha \leftrightarrow \beta)$
gdw für alle Belegungen b: $b(\alpha) = b(\beta)$.

Definition. (Hier sei mit Belegung stets Belegungen b mit $\mathrm{df}(b) = \mathrm{AV}$ gemeint)

a) α ist allgemeingültig (ist eine Tautologie), $\models \alpha$, gdw α gilt bei allen Belegungen.

b) α ist erfüllbar, Erf α, gdw es gibt eine Belegung, die α erfüllt.

c) α und β sind logisch äquivalent, $\alpha \equiv \beta$, gdw $\models (\alpha \leftrightarrow \beta)$
gdw für alle Belegungen b: $b(\alpha) = b(\beta)$.

d) Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{AA}$ und b eine Belegung.

$b(\Gamma) = 1$ bedeutet: $b(\alpha) = 1$ für alle $\alpha \in \Gamma$.

Definition. (Hier sei mit Belegung stets Belegungen b mit $\mathrm{df}(b) = \mathrm{AV}$ gemeint)

a) α ist allgemeingültig (ist eine Tautologie), $\models \alpha$, gdw α gilt bei allen Belegungen.

b) α ist erfüllbar, Erf α, gdw es gibt eine Belegung, die α erfüllt.

c) α und β sind logisch äquivalent, $\alpha \equiv \beta$, gdw $\models (\alpha \leftrightarrow \beta)$
gdw für alle Belegungen b: $b(\alpha) = b(\beta)$.

d) Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{AA}$ und b eine Belegung.

$b(\Gamma) = 1$ bedeutet: $b(\alpha) = 1$ für alle $\alpha \in \Gamma$.

e) Γ ist erfüllbar, Erf Γ, gdw es gibt b mit $b(\Gamma) = 1$.

Definition. (Hier sei mit Belegung stets Belegungen b mit $\mathrm{df}(b) = \mathrm{AV}$ gemeint)

a) α ist allgemeingültig (ist eine Tautologie), $\models\alpha$, gdw α gilt bei allen Belegungen.

b) α ist erfüllbar, Erf α, gdw es gibt eine Belegung, die α erfüllt.

c) α und β sind logisch äquivalent, $\alpha \equiv \beta$, gdw $\models (\alpha \leftrightarrow \beta)$
gdw für alle Belegungen b: $b(\alpha) = b(\beta)$.

d) Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{AA}$ und b eine Belegung.

$b(\Gamma) = 1$ bedeutet: $b(\alpha) = 1$ für alle $\alpha \in \Gamma$.

e) Γ ist erfüllbar, Erf Γ, gdw es gibt b mit $b(\Gamma) = 1$.

f) α folgt aus Γ, $\Gamma\models\alpha$, gdw

für alle Belegungen b: wenn $b(\Gamma) = 1$, so $b(\alpha) = 1$.

Als er ein Kaninchen verfolgte, merkte der Hund, dass der Weg sich in drei Richtungen gabelte. Er beschnüffelte den 1. Weg und fand keine Spur. Dann beschnüffelte er den 2. Weg und fand keine Spur. Dann rannte er den 3. Weg (ohne ihn zu beschnüffeln).

X_i Das Kaninchen wählte den i-ten Weg.

Frage:

$$\{(X_1 \vee (X_2 \vee X_3)), \neg X_1, \neg X_2\} \models X_3?$$

X_1	X_2	X_3	$(X_1 \vee (X_2 \vee X_3))$	$\neg X_1$	$\neg X_2$	X_3
1	1	1	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	0

Gilt

$$((\neg\neg\neg X \vee Y) \wedge (Z \vee \neg\neg X)) \quad \equiv \quad ((\neg X \vee Y) \wedge (Z \vee \neg\neg X))?$$

Gilt

$$((\neg\neg\neg X \vee Y) \wedge (Z \vee \neg\neg X)) \quad \equiv \quad ((\neg X \vee Y) \wedge (Z \vee \neg\neg X))?$$

7) Ersetzungslemma: (Intuitiv: Ersetzt man in α einen Teilausdruck β durch einen zu β logisch äquivalenten Ausdruck, so erhält man einen zu α logisch äquivalenten Ausdruck.)

Gilt

$$((\neg\neg\neg X \vee Y) \wedge (Z \vee \neg\neg X)) \quad \equiv \quad ((\neg X \vee Y) \wedge (Z \vee \neg\neg X))?$$

7) Ersetzungslemma: (Intuitiv: Ersetzt man in α einen Teilausdruck β durch einen zu β logisch äquivalenten Ausdruck, so erhält man einen zu α logisch äquivalenten Ausdruck.)

Gelte $\alpha_1 \equiv \beta_1$ und $\alpha_2 \equiv \beta_2$; dann

$$\neg\alpha_1 \equiv \neg\beta_1, \quad (\alpha_1 \wedge \alpha_2) \equiv (\beta_1 \wedge \beta_2) \quad (\alpha_1 \vee \alpha_2) \equiv (\beta_1 \vee \beta_2).$$

Gilt

$$((\neg\neg\neg X \lor Y) \land (Z \lor \neg\neg X)) \quad \equiv \quad ((\neg X \lor Y) \land (Z \lor \neg\neg X))?$$

7) Ersetzungslemma: (Intuitiv: Ersetzt man in α einen Teilausdruck β durch einen zu β logisch äquivalenten Ausdruck, so erhält man einen zu α logisch äquivalenten Ausdruck.)

Gelte $\alpha_1 \equiv \beta_1$ und $\alpha_2 \equiv \beta_2$; dann

$$\neg\alpha_1 \equiv \neg\beta_1, \quad (\alpha_1 \land \alpha_2) \equiv (\beta_1 \land \beta_2) \quad (\alpha_1 \lor \alpha_2) \equiv (\beta_1 \lor \beta_2).$$

$$\begin{aligned}
\neg\neg X \quad &\equiv \quad X \\
\neg\neg\neg X \quad &\equiv \quad \neg X \\
(\neg\neg\neg X \lor Y) \quad &\equiv \quad (\neg X \lor Y) \\
((\neg\neg\neg X \lor Y) \land (Z \lor \neg\neg X)) \quad &\equiv \quad ((\neg X \lor Y) \land (Z \lor \neg\neg X))
\end{aligned}$$

Kann man aus $(X \vee Y) \equiv \neg(\neg X \wedge \neg Y)$

schließen, dass $(\alpha \vee \beta) \equiv \neg(\neg \alpha \wedge \neg \beta)$ für alle $\alpha, \beta \in$ AA?

Kann man aus $\quad (X \vee Y) \equiv \neg(\neg X \wedge \neg Y)$

schließen, dass $\quad (\alpha \vee \beta) \equiv \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \quad$ für alle $\alpha, \beta \in$ AA?

9) Substitutionslemma (intuitiv). Ersetzt man in einer Äquivalenz überall $Y_1, \ldots, Y_n$ durch Ausdrücke $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, so bleibt die Äquivalenz erhalten.

Kann man aus $(X \vee Y) \equiv \neg(\neg X \wedge \neg Y)$

schließen, dass $(\alpha \vee \beta) \equiv \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$ für alle $\alpha, \beta \in$ AA?

9) Substitutionslemma (intuitiv). Ersetzt man in einer Äquivalenz überall $Y_1, \ldots, Y_n$ durch Ausdrücke $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, so bleibt die Äquivalenz erhalten.

Seien $Y_1, \ldots, Y_n$ paarweise verschieden und $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in$ AA. Durch Induktion über $\alpha \in$ AA definieren wir

$$\alpha\frac{\gamma_1 \ldots \gamma_n}{Y_1 \ldots Y_n}.$$

Kann man aus $(X \lor Y) \equiv \neg(\neg X \land \neg Y)$

schließen, dass $(\alpha \lor \beta) \equiv \neg(\neg\alpha \land \neg\beta)$ für alle $\alpha, \beta \in \mathrm{AA}$?

9) Substitutionslemma (intuitiv). Ersetzt man in einer Äquivalenz überall $Y_1, \ldots, Y_n$ durch Ausdrücke $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, so bleibt die Äquivalenz erhalten.

Seien $Y_1, \ldots, Y_n$ paarweise verschieden und $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \mathrm{AA}$. Durch Induktion über $\alpha \in \mathrm{AA}$ definieren wir

$$\alpha \frac{\gamma_1 \ldots \gamma_n}{Y_1 \ldots Y_n}.$$

- $X \dfrac{\gamma_1 \ldots \gamma_n}{Y_1 \ldots Y_n} := \begin{cases} \gamma_i & \text{falls } X = Y_i \text{ und } i \in \{1, \ldots, n\} \\ X & \text{sonst} \end{cases}$
- $\neg\alpha \dfrac{\gamma_1 \ldots \gamma_n}{Y_1 \ldots Y_n} := \neg \ \alpha \dfrac{\gamma_1 \ldots \gamma_n}{Y_1 \ldots Y_n}$
- für $\circ \in \{\land, \lor\}$: $(\alpha \circ \beta) \dfrac{\gamma_1 \ldots \gamma_n}{Y_1 \ldots Y_n} := (\alpha \dfrac{\gamma_1 \ldots \gamma_n}{Y_1 \ldots Y_n} \circ \beta \dfrac{\gamma_1 \ldots \gamma_n}{Y_1 \ldots Y_n})$

Kann man aus $(X \vee Y) \equiv \neg(\neg X \wedge \neg Y)$

schließen, dass $(\alpha \vee \beta) \equiv \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$ für alle $\alpha, \beta \in AA$?

9) Substitutionslemma (intuitiv). Ersetzt man in einer Äquivalenz überall $Y_1, \ldots, Y_n$ durch Ausdrücke $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, so bleibt die Äquivalenz erhalten.

Seien $Y_1, \ldots, Y_n$ paarweise verschieden und $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in AA$. Durch Induktion über $\alpha \in AA$ definieren wir

$$\alpha \frac{\gamma_1 \ldots \gamma_n}{Y_1 \ldots Y_n}.$$

- $X \frac{\gamma_1 \ldots \gamma_n}{Y_1 \ldots Y_n} := \begin{cases} \gamma_i & \text{falls } X = Y_i \text{ und } i \in \{1, \ldots, n\} \\ X & \text{sonst} \end{cases}$
- $\neg\alpha \frac{\gamma_1 \ldots \gamma_n}{Y_1 \ldots Y_n} := \neg \ \alpha \frac{\gamma_1 \ldots \gamma_n}{Y_1 \ldots Y_n}$
- für $\circ \in \{\wedge, \vee\}$: $(\alpha \circ \beta) \frac{\gamma_1 \ldots \gamma_n}{Y_1 \ldots Y_n} := (\alpha \frac{\gamma_1 \ldots \gamma_n}{Y_1 \ldots Y_n} \circ \beta \frac{\gamma_1 \ldots \gamma_n}{Y_1 \ldots Y_n})$

Substitutionslemma. Wenn $\alpha \equiv \beta$, so $\alpha \frac{\gamma_1 \ldots \gamma_n}{Y_1 \ldots Y_n} \equiv \beta \frac{\gamma_1 \ldots \gamma_n}{Y_1 \ldots Y_n}$.

Beweis. Für eine totale Belegung b sei b_{sub} die Belegung

$$b_{\text{sub}}(X) := \begin{cases} b(\gamma_i) & \text{falls } X = Y_i \text{ und } i \in \{1, \ldots, n\} \\ b(X) & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir zeigen:

$$\text{für alle } \delta \in \text{AA}: \quad b(\delta \frac{\gamma_1 \ldots \gamma_n}{Y_1 \ldots Y_n}) = b_{\text{sub}}(\delta). \tag{1}$$

Aus (1) ergibt sich das Substitutionslemma: Für totales b gilt nämlich:

$$b(\alpha \frac{\gamma_1 \ldots \gamma_n}{Y_1 \ldots Y_n}) \overset{(1)}{=} b_{\text{sub}}(\alpha) \overset{\alpha \equiv \beta}{=} b_{\text{sub}}(\beta)) \overset{(1)}{=} b(\beta \frac{\gamma_1 \ldots \gamma_n}{Y_1 \ldots Y_n}).$$

Der Nachweis von (1) erfolgt durch Induktion über γ:

Basisregel: $\delta = Y_i$ mit $1 \leq i \leq n$: Dann $Y_i \frac{\gamma_1 \ldots \gamma_n}{Y_1 \ldots Y_n} = \gamma_i$ und $b_{\text{sub}}(Y_i) = b(\gamma_i)$; daher

$$b(Y_i \frac{\gamma_1 \ldots \gamma_n}{Y_1 \ldots Y_n}) = b(\gamma_i) = b_{\text{sub}}(Y_i).$$

Ist $\delta = X$ und $X \notin \{Y_1, \ldots, Y_n\}$, dann

$$b(X \frac{\gamma_1 \ldots \gamma_n}{Y_1 \ldots Y_n}) = b(X) = b_{\text{sub}}(X).$$

Seien $n \geq 1$, $\alpha \in \mathrm{AA}_n$.

$$h_\alpha : \{1,0\}^n \to \{1,0\}$$

die durch α definierte n-stellige Boolesche Funktion (Wahrheitswertfunktion) ist gegeben durch: Für alle $b_1, \ldots, b_n \in \{1,0\}$

$$h_\alpha(b_1, \ldots, b_n) := \alpha[b_1, \ldots, b_n]$$

Seien $n \geq 1$, $\alpha \in \mathrm{AA}_n$.

$$h_\alpha : \{1,0\}^n \to \{1,0\}$$

die durch α definierte n-stellige Boolesche Funktion (Wahrheitswertfunktion) ist gegeben durch: Für alle $b_1, \ldots, b_n \in \{1,0\}$

$$h_\alpha(b_1, \ldots, b_n) := \alpha[b_1, \ldots, b_n]$$

Beispiele. $h_{(X_1 \wedge X_2)} = \dot{\wedge}$, $\quad h_{(X_1 \vee X_2)} = \dot{\vee}$, $\quad h_{(\neg X_1 \vee X_2)} = \dot{\to}$, $\quad h_{\neg X_1} = \dot{\neg}$.

Seien $n \geq 1$, $\alpha \in \mathrm{AA}_n$.

$$h_\alpha : \{1,0\}^n \to \{1,0\}$$

die durch α definierte n-stellige Boolesche Funktion (Wahrheitswertfunktion) ist gegeben durch: Für alle $b_1, \ldots, b_n \in \{1,0\}$

$$h_\alpha(b_1, \ldots, b_n) := \alpha[b_1, \ldots, b_n]$$

Beispiele. $h_{(X_1 \wedge X_2)} = \dot{\wedge}$, $\quad h_{(X_1 \vee X_2)} = \dot{\vee}$, $\quad h_{(\neg X_1 \vee X_2)} = \dot{\rightarrow}$, $\quad h_{\neg X_1} = \dot{\neg}$.

Bemerkung. Für $\alpha, \beta \in \mathrm{AA}_n$:

$$\alpha \equiv \beta \text{ sind logisch äquivalent} \quad \text{gdw} \quad h_\alpha = h_\beta$$

Seien $n \geq 1$, $\alpha \in \mathrm{AA}_n$.

$$h_\alpha : \{1,0\}^n \to \{1,0\}$$

die durch α definierte n-stellige Boolesche Funktion (Wahrheitswertfunktion) ist gegeben durch: Für alle $b_1, \ldots, b_n \in \{1,0\}$

$$h_\alpha(b_1, \ldots, b_n) := \alpha[b_1, \ldots, b_n]$$

Beispiele. $h_{(X_1 \wedge X_2)} = \dot{\wedge}$, $\quad h_{(X_1 \vee X_2)} = \dot{\vee}$, $\quad h_{(\neg X_1 \vee X_2)} = \dot{\rightarrow}$, $\quad h_{\neg X_1} = \dot{\neg}$.

Bemerkung. Für $\alpha, \beta \in \mathrm{AA}_n$:

$$\alpha \equiv \beta \text{ sind logisch äquivalent} \quad \text{gdw} \quad h_\alpha = h_\beta$$

Satz. $n \geq 1$. Zu jedem $h : \{1,0\}^n \to \{1,0\}$ gibt es ein $\alpha \in \mathrm{AA}_n$ mit

$$h_\alpha = h.$$

α kann in KNF oder in DNF gewählt werden.

Folgerung 1. Jeder Ausdruck ist zu einem Ausdruck in KNF und zu einem Ausdruck in DNF logisch äquivalent.

Folgerung 1. Jeder Ausdruck ist zu einem Ausdruck in KNF und zu einem Ausdruck in DNF logisch äquivalent.

Definition. Ausdrücke der Gestalt

$$(\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_n) \quad \text{mit } \lambda_i \in \{X_i, \neg X_i\} \text{ für } i = 1, \ldots, n$$

sind n-Atome.

Folgerung 1. Jeder Ausdruck ist zu einem Ausdruck in KNF und zu einem Ausdruck in DNF logisch äquivalent.

Definition. Ausdrücke der Gestalt

$$(\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_n) \quad \text{mit } \lambda_i \in \{X_i, \neg X_i\} \text{ für } i = 1, \ldots, n$$

sind n-Atome.

Folgerung 2. Jedes erfüllbare $\alpha \in \mathrm{AA}_n$ ist zu einer Disjunktion von n-Atomen logisch äquivalent.

Folgerung 1. Jeder Ausdruck ist zu einem Ausdruck in KNF und zu einem Ausdruck in DNF logisch äquivalent.

Definition. Ausdrücke der Gestalt

$$(\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_n) \quad \text{mit } \lambda_i \in \{X_i, \neg X_i\} \text{ für } i = 1, \ldots, n$$

sind n-Atome.

Folgerung 2. Jedes erfüllbare $\alpha \in \mathrm{AA}_n$ ist zu einer Disjunktion von n-Atomen logisch äquivalent.

Folgerung 3. Für $n \geq 1$ gibt es genau $2^{(2^n)}$ paarweise nicht logisch äquivalente Ausdrücke in AA_n.

Beispiele. 1) $\{\dot{\neg}, \dot{\vee}\}$ und damit $\{\dot{\neg}, \dot{\wedge}, \dot{\vee}\}$ sind funktional vollständig.

Beispiele. 1) $\{\dot{\neg}, \dot{\vee}\}$ und damit $\{\dot{\neg}, \dot{\wedge}, \dot{\vee}\}$ sind funktional vollständig.

2) $\{\dot{|}\}$ mit

		$\dot{\vert}$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

ist funktional vollständig.

Beispiele. 1) $\{\dot{\neg}, \dot{\vee}\}$ und damit $\{\dot{\neg}, \dot{\wedge}, \dot{\vee}\}$ sind funktional vollständig.

2) $\{\dot{|}\}$ mit

		$\dot{\vert}$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

ist funktional vollständig.

AA($|$): $\quad \dfrac{}{X} \qquad \dfrac{\alpha, \beta}{(\alpha \mid \beta)}$

Bei n Aussagenvariablen hat Wahrheitstafel 2^n Zeilen. Verfahren mit Wahrheitstafeln sehr ineffizient, da

Variable	Zeilen		
10	1.024	$\approx$	10^3
20	1.048.576	$\approx$	10^6
40	1.099.511.627.776	$\approx$	10^{12}
60	1.152.921.504.606.846.976	$\approx$	10^{18}

Bei n Aussagenvariablen hat Wahrheitstafel 2^n Zeilen. Verfahren mit Wahrheitstafeln sehr ineffizient, da

Variable	Zeilen		
10	1.024	$\approx$	10^3
20	1.048.576	$\approx$	10^6
40	1.099.511.627.776	$\approx$	10^{12}
60	1.152.921.504.606.846.976	$\approx$	10^{18}

Bemerkung. Seien $Y_1, \ldots, Y_n, Z_1, \ldots, Z_n$ paarweise verschiedene Variable. Jede zu

$$((Y_1 \leftrightarrow Z_1) \wedge (Y_2 \leftrightarrow Z_2) \wedge \ldots \wedge (Y_n \leftrightarrow Z_n))$$

logisch äquivalente Formel in DNF ist eine Disjunktion von mindestens 2^n iterierten Konjunktionen.

1 Operation $\approx 10^{-6}$ Sekunden

1 Operation $\approx 10^{-6}$ Sekunden

Laufzeit:

	10	30	60
n	10^{-5} Sek.	$3 \cdot 10^{-5}$ Sek.	$6 \cdot 10^{-5}$ Sek.
n^5	10^{-1} Sek.	$24,3$ Sek.	13 Min.
2^n	10^{-3} Sek.	17.9 Min.	366 Jht.

1 Operation $\approx 10^{-6}$ Sekunden

Laufzeit:

	10	30	60
n	10^{-5} Sek.	$3 \cdot 10^{-5}$ Sek.	$6 \cdot 10^{-5}$ Sek.
n^5	10^{-1} Sek.	$24,3$ Sek.	13 Min.
2^n	10^{-3} Sek.	17.9 Min.	366 Jht.

Größe des größten in einer Stunde behandelbaren Problems:

	2007	$100 \times$ schneller	$1000 \times$ schneller
n	N_1	$100 \cdot N_1$	$1000 \cdot N_1$
n^5	N_2	$2,5 \cdot N_2$	$3,98 \cdot N_2$
2^n	N_3	$N_3 + 6,64$	$N_3 + 9,97$

Bemerkung. Für die folgende durch Induktion über die Länge von α definierte Abbildung $^* : \mathrm{AA} \to \mathrm{AA}$ gilt:

1. für $\alpha \in \mathrm{AA}$: $\alpha \equiv \alpha^*$ und α^* in NNF.
2. $|\alpha^*| \leq 2|\alpha| - 1$

Bemerkung. Für die folgende durch Induktion über die Länge von α definierte Abbildung * : AA $\rightarrow$ AA gilt:

1. für $\alpha \in$ AA: $\alpha \equiv \alpha^*$ und α^* in NNF.
2. $|\alpha^*| \leq 2|\alpha| - 1$

- $X^* := X$

Bemerkung. Für die folgende durch Induktion über die Länge von α definierte Abbildung * : AA $\rightarrow$ AA gilt:

1. für $\alpha \in$ AA: $\alpha \equiv \alpha^*$ und α^* in NNF.

2. $|\alpha^*| \leq 2|\alpha| - 1$

- $X^* := X$
- $$[\neg\alpha]^* := \begin{cases} \neg Y & \text{wenn } \alpha = Y \\ \beta^* & \text{wenn } \alpha = \neg\beta \\ ([\neg\beta]^* \vee [\neg\gamma]^*) & \text{wenn } \alpha = (\beta \wedge \gamma) \\ ([\neg\beta]^* \wedge [\neg\gamma]^*) & \text{wenn } \alpha = (\beta \vee \gamma) \end{cases}$$

Bemerkung. Für die folgende durch Induktion über die Länge von α definierte Abbildung $^*: AA \to AA$ gilt:

1. für $\alpha \in AA$: $\alpha \equiv \alpha^*$ und α^* in NNF.
2. $|\alpha^*| \leq 2|\alpha| - 1$

- $X^* := X$
- $[\neg\alpha]^* := \begin{cases} \neg Y & \text{wenn } \alpha = Y \\ \beta^* & \text{wenn } \alpha = \neg\beta \\ ([\neg\beta]^* \vee [\neg\gamma]^*) & \text{wenn } \alpha = (\beta \wedge \gamma) \\ ([\neg\beta]^* \wedge [\neg\gamma]^*) & \text{wenn } \alpha = (\beta \vee \gamma) \end{cases}$
- $(\beta \wedge \gamma)^* := (\beta^* \wedge \gamma^*)$
- $(\beta \vee \gamma)^* := (\beta^* \vee \gamma^*)$.

Häufig verwendete Äquivalenzen:

Häufig verwendete Äquivalenzen:

"De Morgan Regeln"

- $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$
- $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \neg\beta)$

Häufig verwendete Äquivalenzen:

"De Morgan Regeln"

- $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$
- $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \neg\beta)$

"Distributivregeln"

- $(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \equiv ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma))$
- $(\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \equiv ((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma))$

Deduktionslemma. Seien $\Gamma \subseteq \mathrm{AA}$ und $\alpha, \beta \in \mathrm{AA}$. Dann

$$\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \models (\alpha \rightarrow \beta).$$

Bemerkung. Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta \in \mathrm{AA}$. Dann

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \models \beta \quad \Longleftrightarrow \quad \models ((\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) \rightarrow \beta).$$

Beweis des Endlichkeitssatzes. Sei jede endliche Teilmenge von Γ erfüllbar.

Zu zeigen ist: Es gibt b mit $b(\Gamma) = 1$.

Beweis des Endlichkeitssatzes. Sei jede endliche Teilmenge von Γ erfüllbar.

Zu zeigen ist: Es gibt b mit $b(\Gamma) = 1$.

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $b_1, \ldots, b_n \in \{0, 1\}$.

$b_1, \ldots, b_n$ gut: für jede endl. $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ existiert totales b mit

$$b(\Gamma_0) = 1 \quad \text{und} \quad b(X_1) = b_1, \ldots, b(X_n) = b_n$$

Beweis des Endlichkeitssatzes. Sei jede endliche Teilmenge von Γ erfüllbar.

Zu zeigen ist: Es gibt b mit $b(\Gamma) = 1$.

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $b_1, \ldots, b_n \in \{0, 1\}$.

$b_1, \ldots, b_n$ gut: für jede endl. $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ existiert totales b mit

$$b(\Gamma_0) = 1 \quad \text{und} \quad b(X_1) = b_1, \ldots, b(X_n) = b_n$$

a) Die leere Folge ($n = 0$) ist gut (nach Voraussetzung).

b) Wenn $b_1, \ldots, b_n$ gut und $\alpha \in \Gamma \cap \mathrm{AA}_n$, so $\alpha[b_1, \ldots, b_n] = 1$ (setze $\Gamma_0 := \{\alpha\}$)

c) Wenn $b_1, \ldots, b_n$ gut, so $b_1, \ldots, b_n, 0$ gut oder $b_1, \ldots, b_n, 1$ gut.

Beweis des Endlichkeitssatzes. Sei jede endliche Teilmenge von Γ erfüllbar.

Zu zeigen ist: Es gibt b mit $b(\Gamma) = 1$.

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $b_1, \ldots, b_n \in \{0, 1\}$.

$b_1, \ldots, b_n$ gut: für jede endl. $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ existiert totales b mit

$$b(\Gamma_0) = 1 \quad \text{und} \quad b(X_1) = b_1, \ldots, b(X_n) = b_n$$

a) Die leere Folge ($n = 0$) ist gut (nach Voraussetzung).

b) Wenn $b_1, \ldots, b_n$ gut und $\alpha \in \Gamma \cap \mathrm{AA}_n$, so $\alpha[b_1, \ldots, b_n] = 1$ (setze $\Gamma_0 := \{\alpha\}$)

c) Wenn $b_1, \ldots, b_n$ gut, so $b_1, \ldots, b_n, 0$ gut oder $b_1, \ldots, b_n, 1$ gut.

zu (c): Ang. $b_1, \ldots, b_n, 0$ und $b_1, \ldots, b_n, 1$ nicht gut.

Beweis des Endlichkeitssatzes. Sei jede endliche Teilmenge von Γ erfüllbar.

Zu zeigen ist: Es gibt b mit $b(\Gamma) = 1$.

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $b_1, \ldots, b_n \in \{0, 1\}$.

$b_1, \ldots, b_n$ gut: für jede endl. $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ existiert totales b mit

$$b(\Gamma_0) = 1 \quad \text{und} \quad b(X_1) = b_1, \ldots, b(X_n) = b_n$$

a) Die leere Folge ($n = 0$) ist gut (nach Voraussetzung).

b) Wenn $b_1, \ldots, b_n$ gut und $\alpha \in \Gamma \cap \mathrm{AA}_n$, so $\alpha[b_1, \ldots, b_n] = 1$ (setze $\Gamma_0 := \{\alpha\}$)

c) Wenn $b_1, \ldots, b_n$ gut, so $b_1, \ldots, b_n, 0$ gut oder $b_1, \ldots, b_n, 1$ gut.

zu (c): Ang. $b_1, \ldots, b_n, 0$ und $b_1, \ldots, b_n, 1$ nicht gut. Dann ex. endl. $\Gamma_0, \Gamma_1 \subseteq \Gamma$ mit:

(i) für alle b mit $b(\Gamma_0) = 1$ und $b(X_1) = b_1, \ldots, b(X_n) = b_n$ gilt: $b(X_{n+1}) = 1$

(ii) für alle b mit $b(\Gamma_1) = 1$ und $b(X_1) = b_1, \ldots, b(X_n) = b_n$ gilt: $b(X_{n+1}) = 0$.

Beweis des Endlichkeitssatzes. Sei jede endliche Teilmenge von Γ erfüllbar.

Zu zeigen ist: Es gibt b mit $b(\Gamma) = 1$.

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $b_1, \ldots, b_n \in \{0, 1\}$.

$b_1, \ldots, b_n$ gut: für jede endl. $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ existiert totales b mit

$$b(\Gamma_0) = 1 \quad \text{und} \quad b(X_1) = b_1, \ldots, b(X_n) = b_n$$

a) Die leere Folge ($n = 0$) ist gut (nach Voraussetzung).

b) Wenn $b_1, \ldots, b_n$ gut und $\alpha \in \Gamma \cap \mathrm{AA}_n$, so $\alpha[b_1, \ldots, b_n] = 1$ (setze $\Gamma_0 := \{\alpha\}$)

c) Wenn $b_1, \ldots, b_n$ gut, so $b_1, \ldots, b_n, 0$ gut oder $b_1, \ldots, b_n, 1$ gut.

zu (c): Ang. $b_1, \ldots, b_n, 0$ und $b_1, \ldots, b_n, 1$ nicht gut. Dann ex. endl. $\Gamma_0, \Gamma_1 \subseteq \Gamma$ mit:

(i) für alle b mit $b(\Gamma_0) = 1$ und $b(X_1) = b_1, \ldots, b(X_n) = b_n$ gilt: $b(X_{n+1}) = 1$

(ii) für alle b mit $b(\Gamma_1) = 1$ und $b(X_1) = b_1, \ldots, b(X_n) = b_n$ gilt: $b(X_{n+1}) = 0$.

Da $b_1, \ldots, b_n$ gut, ex. b mit $b(\Gamma_0 \cup \Gamma_1) = 1$ und $b(X_1) = b_1, \ldots, b(X_n) = b_n$.

Beweis des Endlichkeitssatzes. Sei jede endliche Teilmenge von Γ erfüllbar.

Zu zeigen ist: Es gibt b mit $b(\Gamma) = 1$.

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $b_1, \ldots, b_n \in \{0, 1\}$.

$b_1, \ldots, b_n$ gut: für jede endl. $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ existiert totales b mit

$$b(\Gamma_0) = 1 \quad \text{und} \quad b(X_1) = b_1, \ldots, b(X_n) = b_n$$

a) Die leere Folge ($n = 0$) ist gut (nach Voraussetzung).

b) Wenn $b_1, \ldots, b_n$ gut und $\alpha \in \Gamma \cap \mathrm{AA}_n$, so $\alpha[b_1, \ldots, b_n] = 1$ (setze $\Gamma_0 := \{\alpha\}$)

c) Wenn $b_1, \ldots, b_n$ gut, so $b_1, \ldots, b_n, 0$ gut oder $b_1, \ldots, b_n, 1$ gut.

zu (c): Ang. $b_1, \ldots, b_n, 0$ und $b_1, \ldots, b_n, 1$ nicht gut. Dann ex. endl. $\Gamma_0, \Gamma_1 \subseteq \Gamma$ mit:

(i) für alle b mit $b(\Gamma_0) = 1$ und $b(X_1) = b_1, \ldots, b(X_n) = b_n$ gilt: $b(X_{n+1}) = 1$

(ii) für alle b mit $b(\Gamma_1) = 1$ und $b(X_1) = b_1, \ldots, b(X_n) = b_n$ gilt: $b(X_{n+1}) = 0$.

Da $b_1, \ldots, b_n$ gut, ex. b mit $b(\Gamma_0 \cup \Gamma_1) = 1$ und $b(X_1) = b_1, \ldots, b(X_n) = b_n$.

Dann $b(X_{n+1}) = 1$ (wegen (i)) und $b(X_{n+1}) = 0$ (wegen (ii)), ein Widerspruch.

a) Die leere Folge ($n = 0$) ist gut.

b) Wenn $b_1, \ldots, b_n$ gut und $\alpha \in \Gamma \cap \mathrm{AA}_n$, so $\alpha[b_1, \ldots, b_n] = 1$.

c) Wenn $b_1, \ldots, b_n$ gut, so $b_1, \ldots, b_n, 0$ gut oder $b_1, \ldots, b_n, 1$ gut.

a) Die leere Folge ($n = 0$) ist gut.

b) Wenn $b_1, \ldots, b_n$ gut und $\alpha \in \Gamma \cap \mathrm{AA}_n$, so $\alpha[b_1, \ldots, b_n] = 1$.

c) Wenn $b_1, \ldots, b_n$ gut, so $b_1, \ldots, b_n, 0$ gut oder $b_1, \ldots, b_n, 1$ gut.

Wir definieren $b : \mathrm{AV} \to \{0, 1\}$, in dem wir (mit a) und c))durch Induktion über i den Wert $b(X_i)$ so festlegen, dass

$$b(X_1), \ldots, b(X_i) \ \text{ gut ist.}$$

a) Die leere Folge ($n = 0$) ist gut.

b) Wenn $b_1, \ldots, b_n$ gut und $\alpha \in \Gamma \cap \mathrm{AA}_n$, so $\alpha[b_1, \ldots, b_n] = 1$.

c) Wenn $b_1, \ldots, b_n$ gut, so $b_1, \ldots, b_n, 0$ gut oder $b_1, \ldots, b_n, 1$ gut.

Wir definieren $b : \mathrm{AV} \to \{0, 1\}$, in dem wir (mit a) und c))durch Induktion über i den Wert $b(X_i)$ so festlegen, dass

$$b(X_1), \ldots, b(X_i) \text{ gut ist.}$$

Wegen b) gilt dann $b(\Gamma) = 1$. $\square$

$$\beta_S := ((X \wedge Y \wedge U) \vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg U) \vee (\neg X \wedge Y \wedge \neg U) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge U))$$

$$\beta_N := (X \wedge Y) \vee (X \wedge U) \vee (Y \wedge U).$$

$$
\begin{aligned}
\beta_S &:= ((X \wedge Y \wedge U) \vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg U) \vee (\neg X \wedge Y \wedge \neg U) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge U)) \\
\beta_N &:= (X \wedge Y) \vee (X \wedge U) \vee (Y \wedge U).
\end{aligned}
$$

		$\dot{\oplus}$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$$\beta_S \quad := \quad ((X \wedge Y \wedge U) \vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg U) \vee (\neg X \wedge Y \wedge \neg U) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge U))$$

$$\beta_N \quad := \quad (X \wedge Y) \vee (X \wedge U) \vee (Y \wedge U).$$

		$\dot\oplus$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

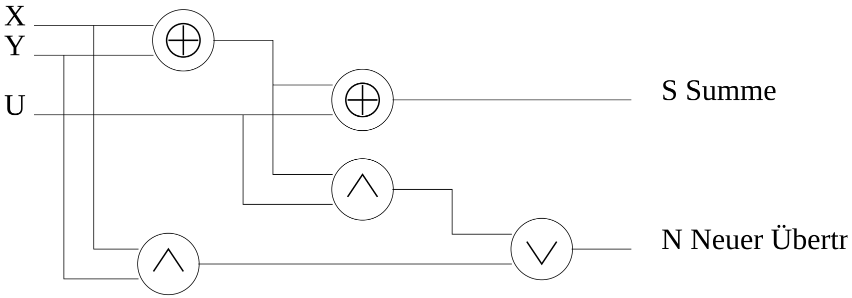
$(\alpha \dot\oplus \beta)$ Abkürzung für $((\alpha \wedge \neg\beta) \vee (\neg\alpha \wedge \beta))$

$$\beta_S := ((X \wedge Y \wedge U) \vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg U) \vee (\neg X \wedge Y \wedge \neg U) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge U))$$

$$\beta_N := (X \wedge Y) \vee (X \wedge U) \vee (Y \wedge U).$$

		$\dot{\oplus}$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$(\alpha \oplus \beta)$ Abkürzung für $((\alpha \wedge \neg\beta) \vee (\neg\alpha \wedge \beta))$

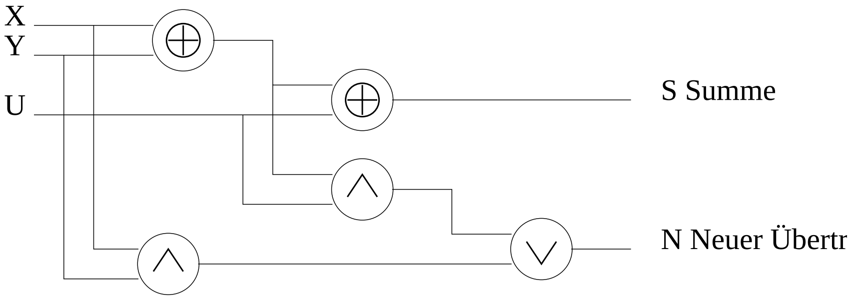


$$\beta_S \quad := \quad ((X \wedge Y \wedge U) \vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg U) \vee (\neg X \wedge Y \wedge \neg U) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge U))$$

$$\beta_N \quad := \quad (X \wedge Y) \vee (X \wedge U) \vee (Y \wedge U).$$

		$\dot{\oplus}$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$(\alpha \oplus \beta)$ Abkürzung für $((\alpha \wedge \neg\beta) \vee (\neg\alpha \wedge \beta))$



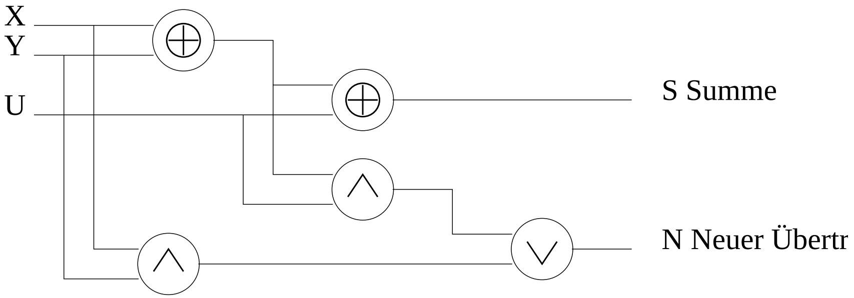
Beschreibung der Schaltung: $\alpha_S := ((X \oplus Y) \oplus U)$,

$$\beta_S \quad := \quad ((X \wedge Y \wedge U) \vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg U) \vee (\neg X \wedge Y \wedge \neg U) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge U))$$

$$\beta_N \quad := \quad (X \wedge Y) \vee (X \wedge U) \vee (Y \wedge U).$$

		$\dot{\oplus}$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$(\alpha \dot{\oplus} \beta)$ Abkürzung für $((\alpha \wedge \neg\beta) \vee (\neg\alpha \wedge \beta))$



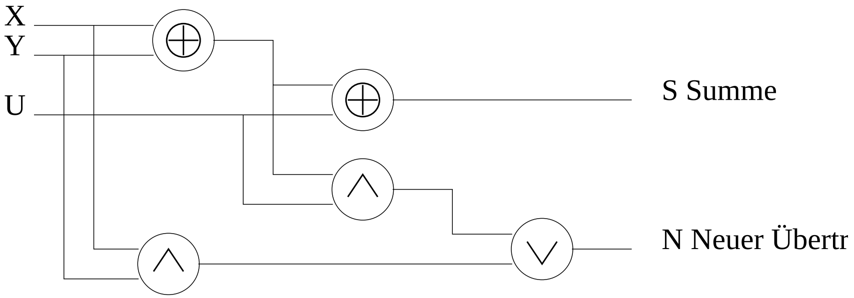
Beschreibung der Schaltung: $\alpha_S := ((X \oplus Y) \oplus U), \quad \alpha_N := ((X \oplus Y) \wedge U) \vee (X \wedge Y))$

$$\beta_S := ((X \wedge Y \wedge U) \vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg U) \vee (\neg X \wedge Y \wedge \neg U) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge U))$$

$$\beta_N := (X \wedge Y) \vee (X \wedge U) \vee (Y \wedge U).$$

		$\dot{\oplus}$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$(\alpha \oplus \beta)$ Abkürzung für $((\alpha \wedge \neg\beta) \vee (\neg\alpha \wedge \beta))$



Beschreibung der Schaltung: $\alpha_S := ((X \oplus Y) \oplus U)$, $\alpha_N := ((X \oplus Y) \wedge U) \vee (X \wedge Y))$

Verifikationsproblem: Gilt $\alpha_S \equiv \beta_S$ und $\alpha_N \equiv \beta_N$?

Schaltelement S:

Eingangsvariable: X_1, X_2; Ausgangsvariable: Y_1, Y_2;

Beschreibung des Verhaltens von S:

$$(Y_1 \leftrightarrow \neg(X_1 \wedge X_2)) \qquad (Y_2 \leftrightarrow (X_1 \wedge X_2))$$

Schaltelement S:

Eingangsvariable: X_1, X_2; Ausgangsvariable: Y_1, Y_2;

Beschreibung des Verhaltens von S:

$$(Y_1 \leftrightarrow \neg(X_1 \wedge X_2)) \qquad (Y_2 \leftrightarrow (X_1 \wedge X_2))$$

Schaltung K:

Variable für Eingänge und Ausgänge von K:

$$X_1, X_2, \qquad Y_1, Y_2, Y_3, Y_4.$$

Schaltelement S:

Eingangsvariable: X_1, X_2; Ausgangsvariable: Y_1, Y_2;

Beschreibung des Verhaltens von S:

$$(Y_1 \leftrightarrow \neg(X_1 \wedge X_2)) \qquad (Y_2 \leftrightarrow (X_1 \wedge X_2))$$

Schaltung K:

Variable für Eingänge und Ausgänge von K:

$$X_1, X_2, \qquad Y_1, Y_2, Y_3, Y_4.$$

Variable für Eingänge und Ausgänge der Schaltelemente S in K:

$$X_1^u, X_2^u, Y_1^u, Y_2^u, \quad X_1^m, X_2^m, Y_1^m, Y_2^m, \quad X_1^o, X_2^o, Y_1^o, Y_2^o$$

Formelmenge, die Verhalten von S beschreibt:

$$(Y_1 \leftrightarrow \neg(X_1 \wedge X_2)) \qquad (Y_2 \leftrightarrow (X_1 \wedge X_2))$$

Formelmenge, die Verhalten von S beschreibt:

$$(Y_1 \leftrightarrow \neg(X_1 \wedge X_2)) \qquad (Y_2 \leftrightarrow (X_1 \wedge X_2))$$

Formelmenge Γ, die Verhalten von K beschreibt:

$$\begin{array}{rl}
(Y_1^u \leftrightarrow \neg(X_1^u \wedge X_2^u)) & (Y_2^u \leftrightarrow (X_1^u \wedge X_2^u)) \\
(Y_1^m \leftrightarrow \neg(X_1^m \wedge X_2^m)) & (Y_2^m \leftrightarrow (X_1^m \wedge X_2^m)) \\
(Y_1^o \leftrightarrow \neg(X_1^o \wedge X_2^o)) & (Y_2^o \leftrightarrow (X_1^o \wedge X_2^o)) \\
\\
(X_1^u \leftrightarrow X_1) & (X_2^u \leftrightarrow X_2) \\
(X_1^m \leftrightarrow X_1) & (X_2^m \leftrightarrow Y_1^u) \\
(X_1^o \leftrightarrow X_2) & (X_2^o \leftrightarrow Y_1^m) \\
\\
(Y_1 \leftrightarrow Y_1^o) & (Y_2 \leftrightarrow Y_2^o) \\
(Y_3 \leftrightarrow Y_2^m) & (Y_4 \leftrightarrow Y_2^u).
\end{array}$$

Für $\alpha \in \mathrm{AA}(\neg, \leftrightarrow)$ und $X \in \mathrm{AV}$ seien $j_\alpha, X_\alpha \in \{0, 1\}$ gegeben durch:

Für $\alpha \in \mathrm{AA}(\neg, \leftrightarrow)$ und $X \in \mathrm{AV}$ seien $j_\alpha, X_\alpha \in \{0,1\}$ gegeben durch:

$$\begin{aligned}
j_\alpha &:= \text{Anz. der Vorkom. von Junkt. in } \alpha \bmod 2 \\
X_\alpha &:= \text{Anzahl der Vorkommen von } X \text{ in } \alpha \bmod 2 \\
U(\alpha) &:= \{Y \in \mathrm{AV} \mid Y_\alpha = 1\} \ \ (\subseteq \mathrm{AV}).
\end{aligned}$$

Für $\alpha \in \mathrm{AA}(\neg, \leftrightarrow)$ und $X \in \mathrm{AV}$ seien $j_\alpha, X_\alpha \in \{0, 1\}$ gegeben durch:

$$\begin{array}{rcl} j_\alpha & := & \text{Anz. der Vorkom. von Junkt. in } \alpha \bmod 2 \\ X_\alpha & := & \text{Anzahl der Vorkommen von } X \text{ in } \alpha \bmod 2 \\ U(\alpha) & := & \{Y \in \mathrm{AV} \mid Y_\alpha = 1\} \ \ (\subseteq \mathrm{AV}). \end{array}$$

Lemma 1. Für $\alpha \in \mathrm{AA}(\neg, \leftrightarrow)$ und jede totale Beleg. b:

$$(*) \qquad b(\alpha) = j_\alpha + \sum_{X \in U(\alpha)} b(X) \mod 2.$$

Für $\alpha \in \mathrm{AA}(\neg, \leftrightarrow)$ und $X \in \mathrm{AV}$ seien $j_\alpha, X_\alpha \in \{0, 1\}$ gegeben durch:

$$\begin{aligned} j_\alpha &:= \text{Anz. der Vorkom. von Junkt. in } \alpha \bmod 2 \\ X_\alpha &:= \text{Anzahl der Vorkommen von } X \text{ in } \alpha \bmod 2 \\ U(\alpha) &:= \{Y \in \mathrm{AV} \mid Y_\alpha = 1\} \quad (\subseteq \mathrm{AV}). \end{aligned}$$

Lemma 1. Für $\alpha \in \mathrm{AA}(\neg, \leftrightarrow)$ und jede totale Beleg. b:

$$(*) \qquad b(\alpha) = j_\alpha + \sum_{X \in U(\alpha)} b(X) \mod 2.$$

Folgerung 1. (1) Wenn $U(\alpha) = \emptyset$, so ist α allgemeingültig (falls $j_\alpha = 1$) oder nicht erfüllbar (falls $j_\alpha = 0$).

Für $\alpha \in \mathrm{AA}(\neg, \leftrightarrow)$ und $X \in \mathrm{AV}$ seien $j_\alpha, X_\alpha \in \{0, 1\}$ gegeben durch:

$$\begin{aligned} j_\alpha &:= \text{Anz. der Vorkom. von Junkt. in } \alpha \bmod 2 \\ X_\alpha &:= \text{Anzahl der Vorkommen von } X \text{ in } \alpha \bmod 2 \\ U(\alpha) &:= \{Y \in \mathrm{AV} \mid Y_\alpha = 1\} \ \ (\subseteq \mathrm{AV}). \end{aligned}$$

Lemma 1. Für $\alpha \in \mathrm{AA}(\neg, \leftrightarrow)$ und jede totale Beleg. b:

$$(*) \qquad b(\alpha) = j_\alpha + \sum_{X \in U(\alpha)} b(X) \mod 2.$$

Folgerung 1. (1) Wenn $U(\alpha) = \emptyset$, so ist α allgemeingültig (falls $j_\alpha = 1$) oder nicht erfüllbar (falls $j_\alpha = 0$).

Beweis. Zu (1): Da dann $b(\alpha) = j_\alpha$ für jede totale Belegung b.

Für $\alpha \in \mathrm{AA}(\neg, \leftrightarrow)$ und $X \in \mathrm{AV}$ seien $j_\alpha, X_\alpha \in \{0,1\}$ gegeben durch:

$$\begin{aligned} j_\alpha &:= \text{Anz. der Vorkom. von Junkt. in } \alpha \bmod 2 \\ X_\alpha &:= \text{Anzahl der Vorkommen von } X \text{ in } \alpha \bmod 2 \\ U(\alpha) &:= \{Y \in \mathrm{AV} \mid Y_\alpha = 1\} \ \ (\subseteq \mathrm{AV}). \end{aligned}$$

Lemma 1. Für $\alpha \in \mathrm{AA}(\neg, \leftrightarrow)$ und jede totale Beleg. b:

$$(*) \qquad b(\alpha) = j_\alpha + \sum_{X \in U(\alpha)} b(X) \mod 2.$$

Folgerung 1. (1) Wenn $U(\alpha) = \emptyset$, so ist α allgemeingültig (falls $j_\alpha = 1$) oder nicht erfüllbar (falls $j_\alpha = 0$).

(2) Wenn $\alpha \in \mathrm{AA}(\neg, \leftrightarrow)_n := \{\beta \in \mathrm{AA}(\neg, \leftrightarrow) \mid \mathrm{var}(\beta) \subseteq \{X_1, \ldots, X_n\}\}$ und $U(\alpha) \neq \emptyset$, so wird α von genau der Hälfte der Tupel in $\{0,1\}^n$ erfüllt.

Beweis. Zu (1): Da dann $b(\alpha) = j_\alpha$ für jede totale Belegung b.

Für $\alpha \in \mathrm{AA}(\neg, \leftrightarrow)$ und $X \in \mathrm{AV}$ seien $j_\alpha, X_\alpha \in \{0,1\}$ gegeben durch:

$$\begin{array}{rcl} j_\alpha & := & \text{Anz. der Vorkom. von Junkt. in } \alpha \bmod 2 \\ X_\alpha & := & \text{Anzahl der Vorkommen von } X \text{ in } \alpha \bmod 2 \\ U(\alpha) & := & \{Y \in \mathrm{AV} \mid Y_\alpha = 1\} \ \ (\subseteq \mathrm{AV}). \end{array}$$

Lemma 1. Für $\alpha \in \mathrm{AA}(\neg, \leftrightarrow)$ und jede totale Beleg. b:

$$(*) \qquad\qquad b(\alpha) = j_\alpha + \sum_{X \in U(\alpha)} b(X) \mod 2.$$

Folgerung 1. (1) Wenn $U(\alpha) = \emptyset$, so ist α allgemeingültig (falls $j_\alpha = 1$) oder nicht erfüllbar (falls $j_\alpha = 0$).

(2) Wenn $\alpha \in \mathrm{AA}(\neg, \leftrightarrow)_n := \{\beta \in \mathrm{AA}(\neg, \leftrightarrow) \mid \mathrm{var}(\beta) \subseteq \{X_1, \ldots, X_n\}\}$ und $U(\alpha) \neq \emptyset$, so wird α von genau der Hälfte der Tupel in $\{0,1\}^n$ erfüllt.

Beweis. Zu (1): Da dann $b(\alpha) = j_\alpha$ für jede totale Belegung b.

Zu (2): Wähle i mit $1 \leq i \leq n$ und $X_i \in U(\alpha)$. Dann wegen $(*)$

$$\alpha[b_1, \ldots, b_i, \ldots, b_n] = 1 \iff \alpha[b_1, \ldots, 1 - b_i, \ldots, b_n] = 0.$$

Folgerung 2. $\{\neg, \leftrightarrow\}$ ist nicht funktional vollständig.

Folgerung 2. $\{\neg, \leftrightarrow\}$ ist nicht funktional vollständig.

Beweis. Wegen Folgerung 1 gibt es kein $\alpha \in \mathrm{AA}(\neg, \leftrightarrow)$ mit $\mathrm{var}(\alpha) \subseteq \{X_1, X_2\}$ und

$$h_\alpha = \dot{\rightarrow},$$

da ein solches α von genau 3/4 der Belegungen erfüllt werden müßte.

$$b(\alpha) \quad = \quad j_\alpha + \sum_{X \in U(\alpha)} b(X) \mod 2$$

Beweis von Lemma 1. Induktion über α: (alle Gleichungen sind mod 2 zu lesen)

$$b(\alpha) \quad = \quad j_\alpha + \sum_{X \in U(\alpha)} b(X) \mod 2$$

Beweis von Lemma 1. Induktion über α: (alle Gleichungen sind mod 2 zu lesen)

$\alpha = X$: Korrekt, da $b(X) = 0 + b(X)$;

$$b(\alpha) \quad = \quad j_\alpha + \sum_{X \in U(\alpha)} b(X) \mod 2$$

Beweis von Lemma 1. Induktion über α: (alle Gleichungen sind mod 2 zu lesen)

$\alpha = X$: Korrekt, da $b(X) = 0 + b(X)$;

$\alpha = \neg\beta$:

$$b(\neg\beta) = 1 + b(\beta) \overset{\text{I.V.}}{=} \underbrace{1 + j_\beta}_{=j_\alpha} + \sum_{X \in \underbrace{U(\beta)}_{=U(\alpha)}} b(X)$$

$$b(\alpha) \quad = \quad j_\alpha + \sum_{X \in U(\alpha)} b(X) \mod 2$$

Beweis von Lemma 1. Induktion über α: (alle Gleichungen sind mod 2 zu lesen)

$\alpha = X$: Korrekt, da $b(X) = 0 + b(X)$;

$\alpha = \neg\beta$:

$$b(\neg\beta) = 1 + b(\beta) \overset{\text{I.V.}}{=} \underbrace{1 + j_\beta}_{=j_\alpha} + \sum_{X \in \underbrace{U(\beta)}_{=U(\alpha)}} b(X)$$

$\alpha = (\beta \leftrightarrow \gamma)$: Beachte $U((\beta \leftrightarrow \gamma)) = U(\beta) \bigtriangleup U(\gamma)$.

$$b(\alpha) \quad = \quad j_\alpha + \sum_{X \in U(\alpha)} b(X) \mod 2$$

Beweis von Lemma 1. Induktion über α: (alle Gleichungen sind mod 2 zu lesen)

$\alpha = X$: Korrekt, da $b(X) = 0 + b(X)$;

$\alpha = \neg\beta$:

$$b(\neg\beta) = 1 + b(\beta) \overset{\text{I.V.}}{=} \underbrace{1 + j_\beta}_{=j_\alpha} + \sum_{X \in \underbrace{U(\beta)}_{=U(\alpha)}} b(X)$$

$\alpha = (\beta \leftrightarrow \gamma)$: Beachte $U((\beta \leftrightarrow \gamma)) = U(\beta) \triangle U(\gamma)$.

$$\begin{aligned} \text{Es gilt:} \qquad b(\alpha) &= 1 + b(\beta) + b(\gamma) \qquad (\text{vgl. Def. von } \dot{\leftrightarrow}) \\ &\overset{\text{I.V.}}{=} 1 + j_\beta + j_\gamma + \sum_{X \in U(\beta)} b(X) + \sum_{X \in U(\gamma)} b(X) \\ &= j_\alpha + \sum_{X \in U(\beta) \cap U(\gamma)} \underbrace{(b(X) + b(X))}_{=0} + \sum_{X \in U(\beta) \triangle U(\gamma)} b(X) \\ &= j_\alpha + \sum_{X \in U((\beta \leftrightarrow \gamma))} b(X). \end{aligned}$$

$$\neg_\alpha \quad := \quad \text{Anzahl der Vorkommen von } \neg \text{ in } \alpha \bmod 2$$

$$\leftrightarrow_\alpha \quad := \quad \text{Anzahl der Vorkommen von } \leftrightarrow \text{ in } \alpha \bmod 2$$

$$\neg_\alpha \quad := \quad \text{Anzahl der Vorkommen von } \neg \text{ in } \alpha \bmod 2$$

$$\leftrightarrow_\alpha \quad := \quad \text{Anzahl der Vorkommen von } \leftrightarrow \text{ in } \alpha \bmod 2$$

Lemma 2. Sei $n \geq 1$. Für $\alpha \in \mathrm{AA}(\neg, \leftrightarrow)_n$:

$$\leftrightarrow_\alpha = 1 \iff X_{1\alpha} + X_{2\alpha} + \cdots + X_{n\alpha} = 0 \mod 2.$$

$$\neg_\alpha \quad := \quad \text{Anzahl der Vorkommen von } \neg \text{ in } \alpha \bmod 2$$

$$\leftrightarrow_\alpha \quad := \quad \text{Anzahl der Vorkommen von } \leftrightarrow \text{ in } \alpha \bmod 2$$

Lemma 2. Sei $n \geq 1$. Für $\alpha \in \mathrm{AA}(\neg, \leftrightarrow)_n$:

$$\leftrightarrow_\alpha = 1 \iff {X_1}_\alpha + {X_2}_\alpha + \cdots + {X_n}_\alpha = 0 \mod 2.$$

Für $\alpha \in \mathrm{AA}(\neg, \leftrightarrow)_n$ sei

$$w(\alpha) := ({X_1}_\alpha, {X_2}_\alpha, \ldots, {X_n}_\alpha, \neg_\alpha).$$

$$\neg_\alpha \quad := \quad \text{Anzahl der Vorkommen von } \neg \text{ in } \alpha \bmod 2$$

$$\leftrightarrow_\alpha \quad := \quad \text{Anzahl der Vorkommen von } \leftrightarrow \text{ in } \alpha \bmod 2$$

Lemma 2. Sei $n \geq 1$. Für $\alpha \in \mathrm{AA}(\neg, \leftrightarrow)_n$:

$$\leftrightarrow_\alpha = 1 \iff X_{1\alpha} + X_{2\alpha} + \cdots + X_{n\alpha} = 0 \mod 2.$$

Für $\alpha \in \mathrm{AA}(\neg, \leftrightarrow)_n$ sei

$$w(\alpha) := (X_{1\alpha}, X_{2\alpha}, \ldots, X_{n\alpha}, \neg_\alpha).$$

Lemma 3. Für $\alpha \in \mathrm{AA}(\neg, \leftrightarrow)_n$

$$w(\alpha) = (0, \ldots, 0) \iff \alpha \text{ ist allgemeingültig}$$

und damit für $\alpha, \beta \in \Gamma_n$

$$w(\alpha) = w(\beta) \iff \alpha \equiv \beta.$$

$$\neg_\alpha \quad := \quad \text{Anzahl der Vorkommen von } \neg \text{ in } \alpha \bmod 2$$

$$\leftrightarrow_\alpha \quad := \quad \text{Anzahl der Vorkommen von } \leftrightarrow \text{ in } \alpha \bmod 2$$

Lemma 2. Sei $n \geq 1$. Für $\alpha \in \mathrm{AA}(\neg, \leftrightarrow)_n$:

$$\leftrightarrow_\alpha = 1 \iff X_{1\alpha} + X_{2\alpha} + \cdots + X_{n\alpha} = 0 \mod 2.$$

Für $\alpha \in \mathrm{AA}(\neg, \leftrightarrow)_n$ sei

$$w(\alpha) := (X_{1\alpha}, X_{2\alpha}, \ldots, X_{n\alpha}, \neg_\alpha).$$

Lemma 3. Für $\alpha \in \mathrm{AA}(\neg, \leftrightarrow)_n$

$$w(\alpha) = (0, \ldots, 0) \iff \alpha \text{ ist allgemeingültig}$$

und damit für $\alpha, \beta \in \Gamma_n$

$$w(\alpha) = w(\beta) \iff \alpha \equiv \beta.$$

Lemma 4. Sei $n \geq 2$. Zu jedem $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ gibt es ein $\alpha_x \in \Gamma_{n-1}$ mit $w(\alpha_x) = (x_1, \ldots, x_n)$.

Endlichkeitssatz. Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{AA}$. Ist jede endliche Teilmenge von Γ erfüllbar, so auch Γ.

Endlichkeitssatz. Sei $\Gamma \subseteq$ AA. Ist jede endliche Teilmenge von Γ erfüllbar, so auch Γ.

Bemerkung. Lassen wir beim Aufbau der Aussagenlogik eine beliebige Menge $\{X_i \mid i \in I\}$ von Aussagenvariable zu, so gilt weiterhin der (das Analogon des) Endlichkeitssatz(es).

$\ell \geq 1$ Ein Graph $G = (V, E)$ ist ℓ-färbbar gdw ex. $V_1, \ldots, V_\ell \subseteq V$ mit

- $V = V_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} V_\ell$ "$V_1, \ldots, V_\ell$ bilden eine Partition von V";
- wenn $\{a, b\} \in E$ und $i \in [\ell]$, so $a \notin V_i$ oder $b \notin V_i$.

$\ell \geq 1$ Ein Graph $G = (V, E)$ ist ℓ-färbbar gdw ex. $V_1, \ldots, V_\ell \subseteq V$ mit

- $V = V_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} V_\ell$ "$V_1, \ldots, V_\ell$ bilden eine Partition von V";
- wenn $\{a, b\} \in E$ und $i \in [\ell]$, so $a \notin V_i$ oder $b \notin V_i$.

Beachte: Wir können $V = V_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} V_\ell$ ersetzen durch:

$$V = V_1 \cup \ldots \cup V_\ell.$$

$\ell \geq 1$ Ein Graph $G = (V, E)$ ist ℓ-färbbar gdw ex. $V_1, \ldots, V_\ell \subseteq V$ mit

- $V = V_1 \dot\cup \ldots \dot\cup V_\ell$ "$V_1, \ldots, V_\ell$ bilden eine Partition von V";
- wenn $\{a, b\} \in E$ und $i \in [\ell]$, so $a \notin V_i$ oder $b \notin V_i$.

Beachte: Wir können $V = V_1 \dot\cup \ldots \dot\cup V_\ell$ ersetzen durch:

$$V = V_1 \cup \ldots \cup V_\ell.$$

$G = (V, E)$ Graph, $W \subseteq V$. Der von G auf W induzierte Subgraph $G[W]$ ist der Graph

$$(W, E') \quad \text{mit } E' = E \cap [W]^2.$$

$\ell \geq 1$ Ein Graph $G = (V, E)$ ist ℓ-färbbar gdw ex. $V_1, \ldots, V_\ell \subseteq V$ mit

- $V = V_1 \dot\cup \ldots \dot\cup V_\ell$ "$V_1, \ldots, V_\ell$ bilden eine Partition von V";
- wenn $\{a, b\} \in E$ und $i \in [\ell]$, so $a \notin V_i$ oder $b \notin V_i$.

Beachte: Wir können $V = V_1 \dot\cup \ldots \dot\cup V_\ell$ ersetzen durch:

$$V = V_1 \cup \ldots \cup V_\ell.$$

$G = (V, E)$ Graph, $W \subseteq V$. Der von G auf W induzierte Subgraph $G[W]$ ist der Graph

$$(W, E') \quad \text{mit } E' = E \cap [W]^2.$$

$G = (V, E)$ Graph, $W \subseteq V$.

$$\Gamma(W) \quad := \quad \{\underbrace{(X_{a,1} \vee \ldots \vee X_{a,\ell})}_{a \text{ hat eine Farbe}} \mid a \in W\} \cup \underbrace{\{(\neg X_{a,i} \vee \neg X_{b,i}) \mid \{a, b\} \in E \cap [W]^2,\, i \in [\ell]\}}_{\text{benachbarte Punkte haben verschiedene Farben}}$$

Bemerkung. Erf $\Gamma(W)$ gdw $G[W]$ ist ℓ-färbbbar.
Insbesondere: Erf $\Gamma(V)$ gdw G ist ℓ-färbbbar.

$G = (V, E)$ Graph. $D \subseteq V$ ist eine dominierende Menge (in G) gdw

$$\text{zu jedem } b \notin D \text{ gibt es ein } a \in D \text{ mit } \{a, b\} \in E.$$

Im folgenden: Graph = endlicher Graph.

$G = (V, E)$ Graph. $D \subseteq V$ ist eine dominierende Menge (in G) gdw

$$\text{zu jedem } b \notin D \text{ gibt es ein } a \in D \text{ mit } \{a, b\} \in E.$$

Im folgenden: Graph = endlicher Graph.

Dominating-Set-Problem (DS)

DS	
Eingabe:	Ein Graph G und $k \in \mathbb{N}$.
Frage:	Hat G eine dominierende Menge der Größe $\leq k$.

$G = (V, E)$ Graph. $D \subseteq V$ ist eine dominierende Menge (in G) gdw

$$\text{zu jedem } b \notin D \text{ gibt es ein } a \in D \text{ mit } \{a, b\} \in E.$$

Im folgenden: Graph = endlicher Graph.

DOMINATING-SET-PROBLEM (DS)

DS

Eingabe: Ein Graph G und $k \in \mathbb{N}$.

Frage: Hat G eine dominierende Menge der Größe $\leq k$.

$$\text{DS} := \{(G, k) \mid G \text{ Graph und } G \text{ besitzt dominierende Menge der Größe} \leq k\}$$

$G = (V, E)$ Graph. $D \subseteq V$ ist eine dominierende Menge (in G) gdw

$$\text{zu jedem } b \notin D \text{ gibt es ein } a \in D \text{ mit } \{a, b\} \in E.$$

Im folgenden: Graph = endlicher Graph.

Dominating-Set-Problem (DS)

DS	
Eingabe:	Ein Graph G und $k \in \mathbb{N}$.
Frage:	Hat G eine dominierende Menge der Größe $\leq k$.

$$\text{DS} := \{(G, k) \mid G \text{ Graph und } G \text{ besitzt dominierende Menge der Größe} \leq k\}$$

Lemma. Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $k \in \mathbb{N}$. Für jede Belegung b für α gilt:

$$b \models \alpha(G, k) \iff D := \{a \in V \mid \text{es gibt } i \in [k] : \ b(X_{i,a}) = 1\} \text{ ist dom. Menge in } G \text{ der Größe} \leq k,$$

wobei:

$$\alpha(G, k) := \bigwedge_{b \in V} \bigvee_{\substack{i \in [k], \ a \in V, \\ a = b \text{ oder } \{a,b\} \in E}} X_{i,a} \wedge \bigwedge_{\substack{i \in [k], \ a,b \in V, \\ a \neq b}} (\neg X_{i,a} \vee \neg X_{i,b}).$$

Lemma. Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $k \in \mathbb{N}$. Für jede Belegung b für α gilt:

$$b \models \alpha(G,k) \quad \Longleftrightarrow \quad D := \{a \in V \mid \text{es gibt } i \in [k]:\ b(X_{i,a}) = 1\} \text{ ist dom. Menge in } G \text{ der Größe} \leq k,$$

wobei:

$$\alpha(G,k) := \bigwedge_{b \in V} \bigvee_{\substack{i \in [k],\ a \in V, \\ a=b \text{ oder } \{a,b\} \in E}} X_{i,a} \wedge \bigwedge_{\substack{i \in [k],\ a,b \in V, \\ a \neq b}} (\neg X_{i,a} \vee \neg X_{i,b}).$$

Lemma. Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $k \in \mathbb{N}$. Für jede Belegung b für α gilt:

$$b \models \alpha(G,k) \quad\Longleftrightarrow\quad D := \{a \in V \mid \text{es gibt } i \in [k] :\ b(X_{i,a}) = 1\} \text{ ist dom. Menge in } G \text{ der Größe} \le k,$$

wobei:

$$\alpha(G,k) := \bigwedge_{b \in V} \bigvee_{\substack{i \in [k],\ a \in V, \\ a = b \text{ oder } \{a,b\} \in E}} X_{i,a} \wedge \bigwedge_{\substack{i \in [k],\ a,b \in V, \\ a \neq b}} (\neg X_{i,a} \vee \neg X_{i,b}).$$

Satz. Sei G ein Graph und $k \in \mathbb{N}$. Dann:

$$G \text{ hat dominierende Menge der Größe} \le k \iff \alpha(G,k) \text{ ist erfüllbar}$$

Lemma. Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $k \in \mathbb{N}$. Für jede Belegung b für α gilt:

$$b \models \alpha(G,k) \iff D := \{a \in V \mid \text{es gibt } i \in [k] : \ b(X_{i,a}) = 1\} \text{ ist dom. Menge in } G \text{ der Größe} \leq k,$$

wobei:

$$\alpha(G,k) := \bigwedge_{b \in V} \ \bigvee_{\substack{i \in [k],\ a \in V, \\ a=b \text{ oder } \{a,b\} \in E}} X_{i,a} \wedge \bigwedge_{\substack{i \in [k],\ a,b \in V, \\ a \neq b}} (\neg X_{i,a} \vee \neg X_{i,b}).$$

Satz. Sei G ein Graph und $k \in \mathbb{N}$. Dann:

$$G \text{ hat dominierende Menge der Größe} \leq k \iff \alpha(G,k) \text{ ist erfüllbar}$$

und somit

$$(G,k) \in \mathrm{DS} \iff \alpha(G,k) \in \mathrm{SAT}.$$

Lemma. Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $k \in \mathbb{N}$. Für jede Belegung b für α gilt:

$$b \models \alpha(G,k) \iff D := \{a \in V \mid \text{es gibt } i \in [k]: \ b(X_{i,a}) = 1\} \text{ ist dom. Menge in } G \text{ der Größe} \leq k,$$

wobei:

$$\alpha(G,k) := \bigwedge_{b \in V} \ \bigvee_{\substack{i \in [k],\ a \in V, \\ a=b \text{ oder } \{a,b\} \in E}} X_{i,a} \wedge \bigwedge_{\substack{i \in [k],\ a,b \in V, \\ a \neq b}} (\neg X_{i,a} \vee \neg X_{i,b}).$$

Satz. Sei G ein Graph und $k \in \mathbb{N}$. Dann:

$$G \text{ hat dominierende Menge der Größe} \leq k \iff \alpha(G,k) \text{ ist erfüllbar}$$

und somit

$$(G,k) \in \mathrm{DS} \iff \alpha(G,k) \in \mathrm{SAT}.$$

Folgerung. $\mathrm{DS} \leq^{\mathrm{pol}} \mathrm{SAT}$. Die Abbildung $(G,k) \mapsto \alpha(G,k)$ ist eine polynomielle Reduktion von DS auf SAT.

Beweis von $\mathrm{SAT}_0 \leq^{\mathrm{pol}} \mathrm{3SAT}$:

Beweis von $\mathrm{SAT}_0 \leq^{\mathrm{pol}} \mathrm{3SAT}$:

Wir ordnen in polynomieller Zeit jedem $\alpha \in \mathrm{AA}$ einen Ausdruck α^* in 3KNF zu mit:

Erf α gdw Erf α^*.

Beweisidee: Sei

$$\alpha = (\neg X \vee Y) \vee ((X \wedge U) \vee Z)$$

Beweisidee: Sei

$$\alpha = (\neg X \vee Y) \vee ((X \wedge U) \vee Z)$$

1. Schritt: Führe für jede nichtatomare Subformel β eine neue Variable X_β ein.

$$\alpha = \underbrace{(\underbrace{\neg X}_{\beta_1} \vee Y)}_{\beta_2} \vee \underbrace{(\underbrace{(X \wedge U)}_{\beta_3} \vee Z)}_{\beta_4}$$

Beweisidee: Sei

$$\alpha = (\neg X \vee Y) \vee ((X \wedge U) \vee Z)$$

1\. Schritt: Führe für jede nichtatomare Subformel β eine neue Variable X_β ein.

$$\alpha = \underbrace{(\underbrace{\neg X}_{\beta_1} \vee Y)}_{\beta_2} \vee \underbrace{(\underbrace{(X \wedge U)}_{\beta_3} \vee Z)}_{\beta_4}$$

Setze

$$\begin{array}{lll}
\alpha' := & \Big(X_\alpha \wedge & \\
& (X_{\beta_1} \leftrightarrow \neg X) \wedge & (\text{da } \beta_1 = \neg X) \\
& (X_{\beta_2} \leftrightarrow (X_{\beta_1} \vee Y)) \wedge & (\text{da } \beta_2 = (\beta_1 \vee Y)) \\
& (X_{\beta_3} \leftrightarrow (X \wedge U)) \wedge & (\text{da } \beta_3 = (X \wedge U)) \\
& (X_{\beta_4} \leftrightarrow (X_{\beta_3} \vee Z)) \wedge & (\text{da } \beta_4 = (\beta_3 \vee Z)) \\
& (X_\alpha \leftrightarrow (X_{\beta_2} \vee X_{\beta_4}))\Big) & (\text{da } \alpha = (\beta_2 \vee \beta_4))
\end{array}$$

Dann

$$\text{Erf } \alpha \text{ gdw Erf } \alpha'.$$

$$
\begin{aligned}
\alpha' := \quad & \Big(X_\alpha \wedge \\
& (X_{\beta_1} \leftrightarrow \neg X) \wedge \\
& (X_{\beta_2} \leftrightarrow (X_{\beta_1} \vee Y)) \wedge \\
& (X_{\beta_3} \leftrightarrow (X \wedge U)) \wedge \\
& (X_{\beta_4} \leftrightarrow (X_{\beta_3} \vee Z)) \wedge \\
& (X_\alpha \leftrightarrow (X_{\beta_2} \vee X_{\beta_4}))\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha' := \quad & \Big(X_\alpha \wedge \\
& (X_{\beta_1} \leftrightarrow \neg X) \wedge \\
& (X_{\beta_2} \leftrightarrow (X_{\beta_1} \vee Y)) \wedge \\
& (X_{\beta_3} \leftrightarrow (X \wedge U)) \wedge \\
& (X_{\beta_4} \leftrightarrow (X_{\beta_3} \vee Z)) \wedge \\
& (X_\alpha \leftrightarrow (X_{\beta_2} \vee X_{\beta_4}))\Big)
\end{aligned}
$$

2. Schritt: Im wesentlichen ersetze $(\gamma \leftrightarrow \delta)$ durch $(\gamma \vee \neg\delta) \wedge (\neg\gamma \vee \delta)$.

$$
\begin{aligned}
\alpha^* \quad := \quad & \Big(X_\alpha \;\wedge \\
& (X_{\beta_1} \vee X) \wedge (\neg X_{\beta_1} \vee \neg X) \wedge \\
& (X_{\beta_2} \vee \neg X_{\beta_1}) \wedge (X_{\beta_2} \vee \neg Y) \wedge (\neg X_{\beta_2} \vee X_{\beta_1} \vee Y) \wedge \\
& (X_{\beta_3} \vee \neg X \vee \neg U) \wedge (\neg X_{\beta_3} \vee X) \wedge (\neg X_{\beta_3} \vee U) \wedge \\
& (X_{\beta_4} \vee \neg X_{\beta_3}) \wedge (X_{\beta_4} \vee \neg Z) \wedge (\neg X_{\beta_4} \vee X_{\beta_3} \vee Z) \wedge \\
& (X_\alpha \vee \neg X_{\beta_2}) \wedge (X_\alpha \vee \neg X_{\beta_4}) \wedge (\neg X_\alpha \vee X_{\beta_2} \vee X_{\beta_4})\Big)
\end{aligned}
$$

$$\alpha_0 = (\neg X \vee Y \vee Z) \wedge \neg U \wedge (U \vee \neg Y) \wedge (X \vee Z) \wedge \neg Z$$

$$\alpha_0 = (\neg X \vee Y \vee Z) \wedge \neg U \wedge (U \vee \neg Y) \wedge (X \vee Z) \wedge \neg Z$$

$$\mathfrak{K}_{\alpha_0} := \{K_{\alpha_1}, K_{\alpha_2}, K_{\alpha_3}, K_{\alpha_4}, K_{\alpha_5}\} \ \text{ mit } \ K_{\alpha_1} = \{\neg X, Y, Z\},\ K_{\alpha_2} = \{\neg U\}, \ldots$$

$$\alpha_0 = (\neg X \vee Y \vee Z) \wedge \neg U \wedge (U \vee \neg Y) \wedge (X \vee Z) \wedge \neg Z$$

$$\mathfrak{K}_{\alpha_0} := \{K_{\alpha_1}, K_{\alpha_2}, K_{\alpha_3}, K_{\alpha_4}, K_{\alpha_5}\} \;\text{ mit }\; K_{\alpha_1} = \{\neg X, Y, Z\},\; K_{\alpha_2} = \{\neg U\}, \ldots$$

Definition. 1. Eine Klausel ist eine endliche Menge von Literalen.

$$\alpha_0 = (\neg X \vee Y \vee Z) \wedge \neg U \wedge (U \vee \neg Y) \wedge (X \vee Z) \wedge \neg Z$$

$$\mathfrak{K}_{\alpha_0} := \{K_{\alpha_1}, K_{\alpha_2}, K_{\alpha_3}, K_{\alpha_4}, K_{\alpha_5}\} \text{ mit } K_{\alpha_1} = \{\neg X, Y, Z\},\ K_{\alpha_2} = \{\neg U\}, \ldots$$

Definition. 1. Eine Klausel ist eine endliche Menge von Literalen.

2. b Belegung, K Klausel

$$b \text{ erfüllt } K,\ b(K) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{ex. } \lambda \in K:\ b(\lambda) = 1. \qquad \text{ACHTUNG!}$$

$K = \emptyset$ (K "leere Disjunktion"): Stets $b(K) = 0$. K nicht erfüllbar.

$$\alpha_0 = (\neg X \vee Y \vee Z) \wedge \neg U \wedge (U \vee \neg Y) \wedge (X \vee Z) \wedge \neg Z$$

$$\mathfrak{K}_{\alpha_0} := \{K_{\alpha_1}, K_{\alpha_2}, K_{\alpha_3}, K_{\alpha_4}, K_{\alpha_5}\} \ \text{ mit } \ K_{\alpha_1} = \{\neg X, Y, Z\}, \ K_{\alpha_2} = \{\neg U\}, \ldots$$

Definition. 1. Eine Klausel ist eine endliche Menge von Literalen.

2. b Belegung, K Klausel

$$b \text{ erfüllt } K, \ b(K) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{ex. } \lambda \in K: \ b(\lambda) = 1. \qquad \text{ACHTUNG!}$$

$K = \emptyset$ (K "leere Disjunktion"): Stets $b(K) = 0$. K nicht erfüllbar.

3. Sei $\mathfrak{K}$ eine Menge von Klauseln, b Belegung

$$b \text{ erfüllt } \mathfrak{K}, \ \ b(\mathfrak{K}) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{für alle } \ K \in \mathfrak{K}: \ b(K) = 1.$$

$$\alpha_0 = (\neg X \vee Y \vee Z) \wedge \neg U \wedge (U \vee \neg Y) \wedge (X \vee Z) \wedge \neg Z$$

$$\mathfrak{K}_{\alpha_0} := \{K_{\alpha_1}, K_{\alpha_2}, K_{\alpha_3}, K_{\alpha_4}, K_{\alpha_5}\} \ \text{ mit } \ K_{\alpha_1} = \{\neg X, Y, Z\},\ K_{\alpha_2} = \{\neg U\}, \ldots$$

Definition. 1. Eine Klausel ist eine endliche Menge von Literalen.

2. b Belegung, K Klausel

$$b \text{ erfüllt } K,\ b(K) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{ex. } \lambda \in K : \ b(\lambda) = 1. \qquad \text{ACHTUNG!}$$

$K = \emptyset$ (K "leere Disjunktion"): Stets $b(K) = 0$. K nicht erfüllbar.

3. Sei $\mathfrak{K}$ eine Menge von Klauseln, b Belegung

$$b \text{ erfüllt } \mathfrak{K},\ \ b(\mathfrak{K}) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{für alle } \ K \in \mathfrak{K} : \ b(K) = 1.$$

ACHTUNG: $b(\emptyset) =?$; $\emptyset$ Klausel oder Klauselmenge?

$$\alpha_0 = (\neg X \vee Y \vee Z) \wedge \neg U \wedge (U \vee \neg Y) \wedge (X \vee Z) \wedge \neg Z$$

$$\mathfrak{K}_{\alpha_0} := \{K_{\alpha_1}, K_{\alpha_2}, K_{\alpha_3}, K_{\alpha_4}, K_{\alpha_5}\} \text{ mit } K_{\alpha_1} = \{\neg X, Y, Z\},\ K_{\alpha_2} = \{\neg U\}, \ldots$$

Definition. 1. Eine Klausel ist eine endliche Menge von Literalen.

2. b Belegung, K Klausel

$$b \text{ erfüllt } K,\ b(K) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{ex. } \lambda \in K:\ b(\lambda) = 1. \qquad \text{ACHTUNG!}$$

$K = \emptyset$ (K “leere Disjunktion”): Stets $b(K) = 0$. K nicht erfüllbar.

3. Sei $\mathfrak{K}$ eine Menge von Klauseln, b Belegung

$$b \text{ erfüllt } \mathfrak{K},\ b(\mathfrak{K}) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{für alle } K \in \mathfrak{K}:\ b(K) = 1.$$

ACHTUNG: $b(\emptyset) =?$; $\emptyset$ Klausel oder Klauselmenge?

4. $\mathfrak{K}$ Klauselmenge

$$\mathfrak{K} \text{ erfüllbar},\ \text{Erf } \mathfrak{K} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{ex. b mit } b(\mathfrak{K}) = 1.$$

$$\alpha_0 = (\neg X \vee Y \vee Z) \wedge \neg U \wedge (U \vee \neg Y) \wedge (X \vee Z) \wedge \neg Z$$

$$\mathfrak{K}_{\alpha_0} := \{K_{\alpha_1}, K_{\alpha_2}, K_{\alpha_3}, K_{\alpha_4}, K_{\alpha_5}\} \text{ mit } K_{\alpha_1} = \{\neg X, Y, Z\},\ K_{\alpha_2} = \{\neg U\}, \ldots$$

Definition. 1. Eine Klausel ist eine endliche Menge von Literalen.

2. b Belegung, K Klausel

$$b \text{ erfüllt } K,\ b(K) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{ex. } \lambda \in K: \ b(\lambda) = 1. \qquad \text{ACHTUNG!}$$

$K = \emptyset$ (K "leere Disjunktion"): Stets $b(K) = 0$. K nicht erfüllbar.

3. Sei $\mathfrak{K}$ eine Menge von Klauseln, b Belegung

$$b \text{ erfüllt } \mathfrak{K},\ \ b(\mathfrak{K}) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{für alle } \ K \in \mathfrak{K}: \ b(K) = 1.$$

ACHTUNG: $b(\emptyset) = ?$; $\emptyset$ Klausel oder Klauselmenge?

4. $\mathfrak{K}$ Klauselmenge

$$\mathfrak{K} \text{ erfüllbar},\ \text{Erf } \mathfrak{K} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{ex. b mit } b(\mathfrak{K}) = 1.$$

5. $\text{var}(\mathfrak{K})$, $\text{var}(K)$: Variablen in Literalen von $\mathfrak{K}$ bzw. K.

Resolutionsregel: Seien K und L Klauseln und λ ein Literal.

$$\text{(R)} \qquad \frac{K \,\dot{\cup}\, \{\lambda\}, \; L \,\dot{\cup}\, \{\bar{\lambda}\}}{K \cup L}$$

“$K \cup L$ entsteht aus $K \cup \{\lambda\}$ und $L \cup \{\bar{\lambda}\}$ durch Resolution entlang λ”

“$K \cup L$ ist eine Resolvente von $K \cup \{\lambda\}$ und $L \cup \{\bar{\lambda}\}$”

Resolutionsregel: Seien K und L Klauseln und λ ein Literal.

$$\text{(R)} \qquad \frac{K \mathbin{\dot\cup} \{\lambda\},\ L \mathbin{\dot\cup} \{\bar\lambda\}}{K \cup L}$$

"$K \cup L$ entsteht aus $K \cup \{\lambda\}$ und $L \cup \{\bar\lambda\}$ durch Resolution entlang λ"

"$K \cup L$ ist eine Resolvente von $K \cup \{\lambda\}$ und $L \cup \{\bar\lambda\}$"

Resolutionslemma. Jede Belegung erfüllt mit zwei Klauseln auch jede ihrer Resolventen, d.h.: Seien b eine Belegung, K, L Klauseln und λ ein Literal:

Wenn $b(K \cup \{\lambda\}) = 1$ und $b(L \cup \{\bar\lambda\}) = 1$, so $b(K \cup L) = 1$.

Resolutionsregel: Seien K und L Klauseln und λ ein Literal.

$$\text{(R)} \qquad \frac{K \mathbin{\dot\cup} \{\lambda\},\ L \mathbin{\dot\cup} \{\bar\lambda\}}{K \cup L}$$

"$K \cup L$ entsteht aus $K \cup \{\lambda\}$ und $L \cup \{\bar\lambda\}$ durch Resolution entlang λ"

"$K \cup L$ ist eine Resolvente von $K \cup \{\lambda\}$ und $L \cup \{\bar\lambda\}$"

Resolutionslemma. Jede Belegung erfüllt mit zwei Klauseln auch jede ihrer Resolventen, d.h.: Seien b eine Belegung, K, L Klauseln und λ ein Literal:

Wenn $b(K \cup \{\lambda\}) = 1$ und $b(L \cup \{\bar\lambda\}) = 1$, so $b(K \cup L) = 1$.

Beweis. Wir wissen: $b(\lambda) = 1$ oder $b(\lambda) = 0$.

Resolutionsregel: Seien K und L Klauseln und λ ein Literal.

$$\text{(R)} \qquad \frac{K \,\dot\cup\, \{\lambda\},\ L \,\dot\cup\, \{\bar\lambda\}}{K \cup L}$$

“$K \cup L$ entsteht aus $K \cup \{\lambda\}$ und $L \cup \{\bar\lambda\}$ durch Resolution entlang λ”

“$K \cup L$ ist eine Resolvente von $K \cup \{\lambda\}$ und $L \cup \{\bar\lambda\}$”

Resolutionslemma. Jede Belegung erfüllt mit zwei Klauseln auch jede ihrer Resolventen, d.h.: Seien b eine Belegung, K, L Klauseln und λ ein Literal:

Wenn $b(K \cup \{\lambda\}) = 1$ und $b(L \cup \{\bar\lambda\}) = 1$, so $b(K \cup L) = 1$.

Beweis. Wir wissen: $b(\lambda) = 1$ oder $b(\lambda) = 0$.

Wenn $b(\lambda) = 1$, so $b(\bar\lambda) = 0$ und somit $b(L) = 1$; daher $b(K \cup L) = 1$.

Resolutionsregel: Seien K und L Klauseln und λ ein Literal.

$$(\mathrm{R}) \qquad \frac{K \,\dot{\cup}\, \{\lambda\},\ L \,\dot{\cup}\, \{\bar{\lambda}\}}{K \cup L}$$

"$K \cup L$ entsteht aus $K \cup \{\lambda\}$ und $L \cup \{\bar{\lambda}\}$ durch Resolution entlang λ"

"$K \cup L$ ist eine Resolvente von $K \cup \{\lambda\}$ und $L \cup \{\bar{\lambda}\}$"

Resolutionslemma. Jede Belegung erfüllt mit zwei Klauseln auch jede ihrer Resolventen, d.h.: Seien b eine Belegung, K, L Klauseln und λ ein Literal:

Wenn $b(K \cup \{\lambda\}) = 1$ und $b(L \cup \{\bar{\lambda}\}) = 1$, so $b(K \cup L) = 1$.

Beweis. Wir wissen: $b(\lambda) = 1$ oder $b(\lambda) = 0$.

Wenn $b(\lambda) = 1$, so $b(\bar{\lambda}) = 0$ und somit $b(L) = 1$; daher $b(K \cup L) = 1$.

Wenn $b(\lambda) = 0$, so $b(K) = 1$; daher $b(K \cup L) = 1$.

Resolutionsregel: Seien K und L Klauseln und λ ein Literal.

$$(\mathrm{R}) \qquad \frac{K \mathbin{\dot\cup} \{\lambda\},\ L \mathbin{\dot\cup} \{\bar\lambda\}}{K \cup L}$$

“$K \cup L$ entsteht aus $K \cup \{\lambda\}$ und $L \cup \{\bar\lambda\}$ durch Resolution entlang λ”

“$K \cup L$ ist eine Resolvente von $K \cup \{\lambda\}$ und $L \cup \{\bar\lambda\}$”

Resolutionslemma. Jede Belegung erfüllt mit zwei Klauseln auch jede ihrer Resolventen, d.h.: Seien b eine Belegung, K, L Klauseln und λ ein Literal:

Wenn $b(K \cup \{\lambda\}) = 1$ und $b(L \cup \{\bar\lambda\}) = 1$, so $b(K \cup L) = 1$.

Beweis. Wir wissen: $b(\lambda) = 1$ oder $b(\lambda) = 0$.

Wenn $b(\lambda) = 1$, so $b(\bar\lambda) = 0$ und somit $b(L) = 1$; daher $b(K \cup L) = 1$.

Wenn $b(\lambda) = 0$, so $b(K) = 1$; daher $b(K \cup L) = 1$.

Somit $b(K \cup L) = 1$.

Definition. $\mathfrak{K}$ Menge von Klauseln.

Ein Resolutionsbeweis einer Klausel L aus $\mathfrak{K}$ ist ein Tupel $(K_1, \ldots, K_m)$ von Klauseln, so dass $K_m = L$ und für $i = 1, \ldots, m$ gilt

$K_i \in \mathfrak{K}$ oder
es gibt $j, k \in \{1, \ldots, i-1\}$, so dass K_i Resolvente von K_j und K_k ist.

Definition. $\mathfrak{K}$ Menge von Klauseln.

Ein Resolutionsbeweis einer Klausel L aus $\mathfrak{K}$ ist ein Tupel $(K_1, \ldots, K_m)$ von Klauseln, so dass $K_m = L$ und für $i = 1, \ldots, m$ gilt

$K_i \in \mathfrak{K}$ oder
es gibt $j, k \in \{1, \ldots, i-1\}$, so dass K_i Resolvente von K_j und K_k ist.

Eine Klausel L ist resolutionsbeweisbar aus $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K} \vdash_{\mathrm{R}} L$, gdw es gibt einen Resolutionsbeweis von L aus $\mathfrak{K}$.

Definition. $\mathfrak{K}$ Menge von Klauseln.

Ein Resolutionsbeweis einer Klausel L aus $\mathfrak{K}$ ist ein Tupel $(K_1, \ldots, K_m)$ von Klauseln, so dass $K_m = L$ und für $i = 1, \ldots, m$ gilt

> $K_i \in \mathfrak{K}$ oder
> es gibt $j, k \in \{1, \ldots, i-1\}$, so dass K_i Resolvente von K_j und K_k ist.

Eine Klausel L ist resolutionsbeweisbar aus $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K} \vdash_{\mathrm{R}} L$, gdw es gibt einen Resolutionsbeweis von L aus $\mathfrak{K}$.

Beachte: $\mathfrak{K} \vdash_{\mathrm{R}} L$ gdw L kann man durch endlichmalige Anwendung der folgenden Regeln gewinnen:

$$\frac{}{K} \text{ mit } K \in \mathfrak{K} \qquad\qquad \text{und} \qquad\qquad (\mathrm{R})$$

Definition. $\mathfrak{K}$ Menge von Klauseln.

Ein Resolutionsbeweis einer Klausel L aus $\mathfrak{K}$ ist ein Tupel $(K_1, \ldots, K_m)$ von Klauseln, so dass $K_m = L$ und für $i = 1, \ldots, m$ gilt

$K_i \in \mathfrak{K}$ oder
es gibt $j, k \in \{1, \ldots, i-1\}$, so dass K_i Resolvente von K_j und K_k ist.

Eine Klausel L ist resolutionsbeweisbar aus $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K} \vdash_{\mathrm{R}} L$, gdw es gibt einen Resolutionsbeweis von L aus $\mathfrak{K}$.

Beachte: $\mathfrak{K} \vdash_{\mathrm{R}} L$ gdw L kann man durch endlichmalige Anwendung der folgenden Regeln gewinnen:

$$\frac{}{K} \text{ mit } K \in \mathfrak{K} \qquad\qquad \text{und} \qquad (\mathrm{R})$$

Bemerkung 1.

1. Wenn $\mathfrak{K} \vdash_{\mathrm{R}} L$ und b erfüllt $\mathfrak{K}$, so $b(L) = 1$ (wegen Resolutionslemma).
2. Wenn $\mathfrak{K} \vdash_{\mathrm{R}} \emptyset$, so nicht Erf $\mathfrak{K}$ (s.o.).

Definition. $\mathfrak{K}$ Menge von Klauseln.

Ein Resolutionsbeweis einer Klausel L aus $\mathfrak{K}$ ist ein Tupel $(K_1, \ldots, K_m)$ von Klauseln, so dass $K_m = L$ und für $i = 1, \ldots, m$ gilt

$K_i \in \mathfrak{K}$ oder
es gibt $j, k \in \{1, \ldots, i-1\}$, so dass K_i Resolvente von K_j und K_k ist.

Eine Klausel L ist resolutionsbeweisbar aus $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K} \vdash_{\mathrm{R}} L$, gdw es gibt einen Resolutionsbeweis von L aus $\mathfrak{K}$.

Beachte: $\mathfrak{K} \vdash_{\mathrm{R}} L$ gdw L kann man durch endlichmalige Anwendung der folgenden Regeln gewinnen:

$$\frac{}{K} \text{ mit } K \in \mathfrak{K} \qquad \text{und} \qquad (\mathrm{R})$$

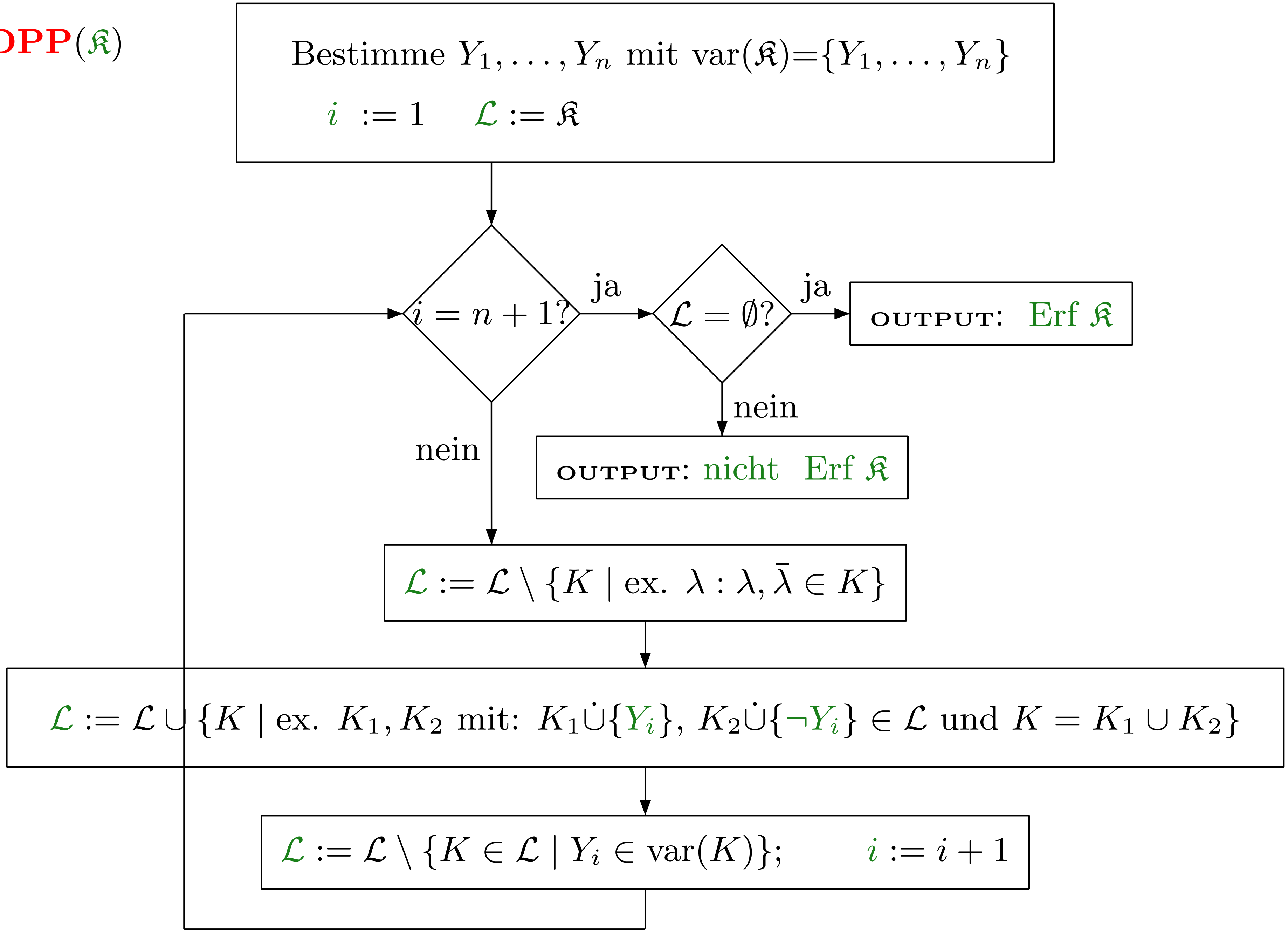
Bemerkung 1.

1. Wenn $\mathfrak{K} \vdash_{\mathrm{R}} L$ und b erfüllt $\mathfrak{K}$, so $b(L) = 1$ (wegen Resolutionslemma).
2. Wenn $\mathfrak{K} \vdash_{\mathrm{R}} \emptyset$, so nicht Erf $\mathfrak{K}$ (s.o.).

Resolutionssatz. Sei $\mathfrak{K}$ eine Menge von Klauseln. Dann:

$$\text{Erf } \mathfrak{K} \text{ gdw nicht } \mathfrak{K} \vdash_{\mathrm{R}} \emptyset \qquad \text{d.h.} \qquad \text{nicht Erf } \mathfrak{K} \text{ gdw } \mathfrak{K} \vdash_{\mathrm{R}} \emptyset.$$

DPP($\mathfrak{K}$)



Satz. Sei $\mathfrak{K}$ eine endliche Klauselmenge. DPP($\mathfrak{K}$), d.h. DPP bei Eingabe $\mathfrak{K}$, liefert die richtige Antwort auf die Frage "Ist $\mathfrak{K}$ erfüllbar?"

Satz. Sei $\mathfrak{K}$ eine endliche Klauselmenge. DPP($\mathfrak{K}$), d.h. DPP bei Eingabe $\mathfrak{K}$, liefert die richtige Antwort auf die Frage "Ist $\mathfrak{K}$ erfüllbar?"

Beweis: Sei $\mathrm{var}(\mathfrak{K}) = \{Y_1, \ldots, Y_n\}$.

Satz. Sei $\mathfrak{K}$ eine endliche Klauselmenge. DPP($\mathfrak{K}$), d.h. DPP bei Eingabe $\mathfrak{K}$, liefert die richtige Antwort auf die Frage "Ist $\mathfrak{K}$ erfüllbar?"

Beweis: Sei $\mathrm{var}(\mathfrak{K}) = \{Y_1, \ldots, Y_n\}$. Für $i = 1, \ldots, n+1$ sei $\mathfrak{L}_i$ der Wert von $\mathfrak{L}$ zu Beginn des i-ten Schleifendurchlaufs.

Satz. Sei $\mathfrak{K}$ eine endliche Klauselmenge. DPP($\mathfrak{K}$), d.h. DPP bei Eingabe $\mathfrak{K}$, liefert die richtige Antwort auf die Frage "Ist $\mathfrak{K}$ erfüllbar?"

Beweis: Sei $\mathrm{var}(\mathfrak{K}) = \{Y_1, \ldots, Y_n\}$. Für $i = 1, \ldots, n+1$ sei $\mathfrak{L}_i$ der Wert von $\mathfrak{L}$ zu Beginn des i-ten Schleifendurchlaufs.

(1) $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{K}$.

Satz. Sei $\mathfrak{K}$ eine endliche Klauselmenge. DPP($\mathfrak{K}$), d.h. DPP bei Eingabe $\mathfrak{K}$, liefert die richtige Antwort auf die Frage "Ist $\mathfrak{K}$ erfüllbar?"

Beweis: Sei $\mathrm{var}(\mathfrak{K}) = \{Y_1, \ldots, Y_n\}$. Für $i = 1, \ldots, n+1$ sei $\mathfrak{L}_i$ der Wert von $\mathfrak{L}$ zu Beginn des i-ten Schleifendurchlaufs.

(1) $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{K}$.

(2) Für $i = 1, \ldots, n+1$:

$$\mathrm{var}(\mathfrak{L}_i) \subseteq \{Y_i, \ldots, Y_n\} \quad \text{(wegen (C);} \qquad \text{somit}$$

Satz. Sei $\mathfrak{K}$ eine endliche Klauselmenge. DPP($\mathfrak{K}$), d.h. DPP bei Eingabe $\mathfrak{K}$, liefert die richtige Antwort auf die Frage "Ist $\mathfrak{K}$ erfüllbar?"

Beweis: Sei $\mathrm{var}(\mathfrak{K}) = \{Y_1, \ldots, Y_n\}$. Für $i = 1, \ldots, n+1$ sei $\mathfrak{L}_i$ der Wert von $\mathfrak{L}$ zu Beginn des i-ten Schleifendurchlaufs.

(1) $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{K}$.

(2) Für $i = 1, \ldots, n+1$:

$$\mathrm{var}(\mathfrak{L}_i) \subseteq \{Y_i, \ldots, Y_n\} \quad \text{(wegen (C);} \qquad \text{somit}$$

$$\mathfrak{L}_{n+1} = \{\emptyset\} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{L}_{n+1} = \emptyset.$$

Satz. Sei $\mathfrak{K}$ eine endliche Klauselmenge. DPP($\mathfrak{K}$), d.h. DPP bei Eingabe $\mathfrak{K}$, liefert die richtige Antwort auf die Frage “Ist $\mathfrak{K}$ erfüllbar?”

Beweis: Sei $\mathrm{var}(\mathfrak{K}) = \{Y_1, \ldots, Y_n\}$. Für $i = 1, \ldots, n+1$ sei $\mathfrak{L}_i$ der Wert von $\mathfrak{L}$ zu Beginn des i-ten Schleifendurchlaufs.

(1) $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{K}$.

(2) Für $i = 1, \ldots, n+1$:

$$\mathrm{var}(\mathfrak{L}_i) \subseteq \{Y_i, \ldots, Y_n\} \quad \text{(wegen (C);} \qquad \text{somit}$$

$$\mathfrak{L}_{n+1} = \{\emptyset\} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{L}_{n+1} = \emptyset.$$

(3) Für $i = 1, \ldots, n+1$:

$$\mathfrak{L}_i \subseteq \{L \mid \mathfrak{K} \vdash_{\mathrm{R}} L\}.$$

Satz. Sei $\mathfrak{K}$ eine endliche Klauselmenge. DPP($\mathfrak{K}$), d.h. DPP bei Eingabe $\mathfrak{K}$, liefert die richtige Antwort auf die Frage “Ist $\mathfrak{K}$ erfüllbar?”

Beweis: Sei $\mathrm{var}(\mathfrak{K}) = \{Y_1, \ldots, Y_n\}$. Für $i = 1, \ldots, n+1$ sei $\mathfrak{L}_i$ der Wert von $\mathfrak{L}$ zu Beginn des i-ten Schleifendurchlaufs.

(1) $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{K}$.

(2) Für $i = 1, \ldots, n+1$:

$$\mathrm{var}(\mathfrak{L}_i) \subseteq \{Y_i, \ldots, Y_n\} \quad \text{(wegen (C);} \qquad \text{somit}$$

$$\mathfrak{L}_{n+1} = \{\emptyset\} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{L}_{n+1} = \emptyset.$$

(3) Für $i = 1, \ldots, n+1$:

$$\mathfrak{L}_i \subseteq \{L \mid \mathfrak{K} \vdash_{\mathrm{R}} L\}.$$

(4) $$\text{nicht Erf } \mathfrak{K} \text{ gdw } \mathfrak{L}_{n+1} = \{\emptyset\} \qquad \text{und somit}$$

Satz. Sei $\mathfrak{K}$ eine endliche Klauselmenge. DPP($\mathfrak{K}$), d.h. DPP bei Eingabe $\mathfrak{K}$, liefert die richtige Antwort auf die Frage "Ist $\mathfrak{K}$ erfüllbar?"

Beweis: Sei $\mathrm{var}(\mathfrak{K}) = \{Y_1, \ldots, Y_n\}$. Für $i = 1, \ldots, n+1$ sei $\mathfrak{L}_i$ der Wert von $\mathfrak{L}$ zu Beginn des i-ten Schleifendurchlaufs.

(1) $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{K}$.

(2) Für $i = 1, \ldots, n+1$:

$$\mathrm{var}(\mathfrak{L}_i) \subseteq \{Y_i, \ldots, Y_n\} \quad \text{(wegen (C);} \qquad \text{somit}$$

$$\mathfrak{L}_{n+1} = \{\emptyset\} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{L}_{n+1} = \emptyset.$$

(3) Für $i = 1, \ldots, n+1$:

$$\mathfrak{L}_i \subseteq \{L \mid \mathfrak{K} \vdash_{\mathrm{R}} L\}.$$

(4) $$\text{nicht Erf } \mathfrak{K} \text{ gdw } \mathfrak{L}_{n+1} = \{\emptyset\} \qquad \text{und somit}$$

$$\text{Erf } \mathfrak{K} \text{ gdw } \mathfrak{L}_{n+1} = \emptyset,$$

Satz. Sei $\mathfrak{K}$ eine endliche Klauselmenge. DPP($\mathfrak{K}$), d.h. DPP bei Eingabe $\mathfrak{K}$, liefert die richtige Antwort auf die Frage “Ist $\mathfrak{K}$ erfüllbar?”

Beweis: Sei $\mathrm{var}(\mathfrak{K}) = \{Y_1, \ldots, Y_n\}$. Für $i = 1, \ldots, n+1$ sei $\mathfrak{L}_i$ der Wert von $\mathfrak{L}$ zu Beginn des i-ten Schleifendurchlaufs.

(1) $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{K}$.

(2) Für $i = 1, \ldots, n+1$:

$$\mathrm{var}(\mathfrak{L}_i) \subseteq \{Y_i, \ldots, Y_n\} \quad \text{(wegen (C);} \qquad \text{somit}$$

$$\mathfrak{L}_{n+1} = \{\emptyset\} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{L}_{n+1} = \emptyset.$$

(3) Für $i = 1, \ldots, n+1$:

$$\mathfrak{L}_i \subseteq \{L \mid \mathfrak{K} \vdash_{\mathrm{R}} L\}.$$

(4) $$\text{nicht Erf } \mathfrak{K} \text{ gdw } \mathfrak{L}_{n+1} = \{\emptyset\} \qquad \text{und somit}$$

$$\text{Erf } \mathfrak{K} \text{ gdw } \mathfrak{L}_{n+1} = \emptyset,$$

d.h. DPP($\mathfrak{K}$) liefert die richtige Antwort.

Beispiel. $\mathfrak{K} : \{X, Y\}, \{\neg X\}, \{\neg X, \neg Y\}$

$n = 2, \quad X, Y$

Beispiel. $\mathfrak{K} : \{X, Y\}, \{\neg X\}, \{\neg X, \neg Y\}$

$n = 2, \quad X, Y$

(A1) $\{X, Y\}, \{\neg X\}, \{\neg X, \neg Y\}$

Beispiel. $\mathfrak{K} : \{X, Y\}, \{\neg X\}, \{\neg X, \neg Y\}$

$n = 2, \quad X, Y$

(A1) $\{X, Y\}, \{\neg X\}, \{\neg X, \neg Y\}$

(B1) $\{X, Y\}, \{\neg X\}, \{\neg X, \neg Y\}, \{Y\}, \{Y, \neg Y\}$

Beispiel. $\mathfrak{K} : \{X, Y\}, \{\neg X\}, \{\neg X, \neg Y\}$

$n = 2, \quad X, Y$

(A1) $\{X, Y\}, \{\neg X\}, \{\neg X, \neg Y\}$

(B1) $\{X, Y\}, \{\neg X\}, \{\neg X, \neg Y\}, \{Y\}, \{Y, \neg Y\}$

(C1) $\{Y\}, \{Y, \neg Y\}$

Beispiel. $\mathfrak{K}: \{X, Y\}, \{\neg X\}, \{\neg X, \neg Y\}$

$n = 2, \quad X, Y$

(A1) $\{X, Y\}, \{\neg X\}, \{\neg X, \neg Y\}$

(B1) $\{X, Y\}, \{\neg X\}, \{\neg X, \neg Y\}, \{Y\}, \{Y, \neg Y\}$

(C1) $\{Y\}, \{Y, \neg Y\}$

(A2) $\{Y\}$

Beispiel. $\mathfrak{K}: \{X, Y\}, \{\neg X\}, \{\neg X, \neg Y\}$

$n = 2, \quad X, Y$

(A1) $\{X, Y\}, \{\neg X\}, \{\neg X, \neg Y\}$

(B1) $\{X, Y\}, \{\neg X\}, \{\neg X, \neg Y\}, \{Y\}, \{Y, \neg Y\}$

(C1) $\{Y\}, \{Y, \neg Y\}$

(A2) $\{Y\}$

(B2) $\{Y\}$

Beispiel. $\mathfrak{K}:\ \{X, Y\},\ \{\neg X\},\ \{\neg X, \neg Y\}$

$n = 2, \quad X, Y$

(A1) $\{X, Y\}$, $\{\neg X\}$, $\{\neg X, \neg Y\}$

(B1) $\{X, Y\}$, $\{\neg X\}$, $\{\neg X, \neg Y\}$, $\{Y\}$, $\{Y, \neg Y\}$

(C1) $\{Y\}$, $\{Y, \neg Y\}$

(A2) $\{Y\}$

(B2) $\{Y\}$

(C2)

Beispiel. $\mathfrak{K}: \{X, Y\}, \{\neg X\}, \{\neg X, \neg Y\}$

$n = 2, \quad X, Y$

(A1) $\{X, Y\}, \{\neg X\}, \{\neg X, \neg Y\}$

(B1) $\{X, Y\}, \{\neg X\}, \{\neg X, \neg Y\}, \{Y\}, \{Y, \neg Y\}$

(C1) $\{Y\}, \{Y, \neg Y\}$

(A2) $\{Y\}$

(B2) $\{Y\}$

(C2)

Somit: $\mathfrak{L}_3 = \emptyset$, d.h.: Erf $\mathfrak{K}$.

Beispiel. $\mathfrak{K}: \{\neg X, Y\}, \{\neg Y, \neg Z, U\}, \{X\}, \{Z\}, \{\neg U, \neg Z\}$

$n = 4, \quad X, Y, Z, U$

Beispiel. $\mathfrak{K}: \{\neg X, Y\}, \{\neg Y, \neg Z, U\}, \{X\}, \{Z\}, \{\neg U, \neg Z\}$

$n = 4, \quad X, Y, Z, U$

(A1) $\{\neg X, Y\}, \{\neg Y, \neg Z, U\}, \{X\}, \{Z\}, \{\neg U, \neg Z\}$

(B1) $\{\neg X, Y\}, \{\neg Y, \neg Z, U\}, \{X\}, \{Z\}, \{\neg U, \neg Z\}, \{Y\}$

(C1) $\{\neg Y, \neg Z, U\}, \{Z\}, \{\neg U, \neg Z\}, \{Y\}$

Beispiel. $\mathfrak{K}: \{\neg X, Y\}, \{\neg Y, \neg Z, U\}, \{X\}, \{Z\}, \{\neg U, \neg Z\}$

$n = 4, \quad X, Y, Z, U$

(A1) $\{\neg X, Y\}, \{\neg Y, \neg Z, U\}, \{X\}, \{Z\}, \{\neg U, \neg Z\}$

(B1) $\{\neg X, Y\}, \{\neg Y, \neg Z, U\}, \{X\}, \{Z\}, \{\neg U, \neg Z\}, \{Y\}$

(C1) $\{\neg Y, \neg Z, U\}, \{Z\}, \{\neg U, \neg Z\}, \{Y\}$

(A2) $\{\neg Y, \neg Z, U\}, \{Z\}, \{\neg U, \neg Z\}, \{Y\}$

(B2) $\{\neg Y, \neg Z, U\}, \{Z\}, \{\neg U, \neg Z\}, \{Y\}, \{\neg Z, U\}$

(C2) $\{Z\}, \{\neg U, \neg Z\}, \{\neg Z, U\}$

Beispiel. $\mathfrak{K}: \{\neg X, Y\}, \{\neg Y, \neg Z, U\}, \{X\}, \{Z\}, \{\neg U, \neg Z\}$

$n = 4, \quad X, Y, Z, U$

(A1) $\{\neg X, Y\}, \{\neg Y, \neg Z, U\}, \{X\}, \{Z\}, \{\neg U, \neg Z\}$

(B1) $\{\neg X, Y\}, \{\neg Y, \neg Z, U\}, \{X\}, \{Z\}, \{\neg U, \neg Z\}, \{Y\}$

(C1) $\{\neg Y, \neg Z, U\}, \{Z\}, \{\neg U, \neg Z\}, \{Y\}$

(A2) $\{\neg Y, \neg Z, U\}, \{Z\}, \{\neg U, \neg Z\}, \{Y\}$

(B2) $\{\neg Y, \neg Z, U\}, \{Z\}, \{\neg U, \neg Z\}, \{Y\}, \{\neg Z, U\}$

(C2) $\{Z\}, \{\neg U, \neg Z\}, \{\neg Z, U\}$

(A3) $\{Z\}, \{\neg U, \neg Z\}, \{\neg Z, U\}$

(B3) $\{Z\}, \{\neg U, \neg Z\}, \{\neg Z, U\}, \{\neg U\}, \{U\}$

(C3) $\{\neg U\}, \{U\}$

Beispiel. $\mathfrak{K}: \{\neg X, Y\}, \{\neg Y, \neg Z, U\}, \{X\}, \{Z\}, \{\neg U, \neg Z\}$

$n = 4, \quad X, Y, Z, U$

(A1) $\{\neg X, Y\}, \{\neg Y, \neg Z, U\}, \{X\}, \{Z\}, \{\neg U, \neg Z\}$

(B1) $\{\neg X, Y\}, \{\neg Y, \neg Z, U\}, \{X\}, \{Z\}, \{\neg U, \neg Z\}, \{Y\}$

(C1) $\{\neg Y, \neg Z, U\}, \{Z\}, \{\neg U, \neg Z\}, \{Y\}$

(A2) $\{\neg Y, \neg Z, U\}, \{Z\}, \{\neg U, \neg Z\}, \{Y\}$

(B2) $\{\neg Y, \neg Z, U\}, \{Z\}, \{\neg U, \neg Z\}, \{Y\}, \{\neg Z, U\}$

(C2) $\{Z\}, \{\neg U, \neg Z\}, \{\neg Z, U\}$

(A3) $\{Z\}, \{\neg U, \neg Z\}, \{\neg Z, U\}$

(B3) $\{Z\}, \{\neg U, \neg Z\}, \{\neg Z, U\}, \{\neg U\}, \{U\}$

(C3) $\{\neg U\}, \{U\}$

(A4) $\{\neg U\}, \{U\}$

(B4) $\{\neg U\}, \{U\}, \emptyset$

(C4) $\emptyset$.

Beispiel. $\mathfrak{K}: \{\neg X, Y\}, \{\neg Y, \neg Z, U\}, \{X\}, \{Z\}, \{\neg U, \neg Z\}$

$n = 4, \quad X, Y, Z, U$

(A1) $\{\neg X, Y\}, \{\neg Y, \neg Z, U\}, \{X\}, \{Z\}, \{\neg U, \neg Z\}$

(B1) $\{\neg X, Y\}, \{\neg Y, \neg Z, U\}, \{X\}, \{Z\}, \{\neg U, \neg Z\}, \{Y\}$

(C1) $\{\neg Y, \neg Z, U\}, \{Z\}, \{\neg U, \neg Z\}, \{Y\}$

(A2) $\{\neg Y, \neg Z, U\}, \{Z\}, \{\neg U, \neg Z\}, \{Y\}$

(B2) $\{\neg Y, \neg Z, U\}, \{Z\}, \{\neg U, \neg Z\}, \{Y\}, \{\neg Z, U\}$

(C2) $\{Z\}, \{\neg U, \neg Z\}, \{\neg Z, U\}$

(A3) $\{Z\}, \{\neg U, \neg Z\}, \{\neg Z, U\}$

(B3) $\{Z\}, \{\neg U, \neg Z\}, \{\neg Z, U\}, \{\neg U\}, \{U\}$

(C3) $\{\neg U\}, \{U\}$

(A4) $\{\neg U\}, \{U\}$

(B4) $\{\neg U\}, \{U\}, \emptyset$

(C4) $\emptyset$. Somit nicht Erf $\mathfrak{K}$.

Schubfachprinzip: Werden $n+1$ Objekte auf n Schubfächer verteilt, so enthält mindestens ein Schubfach mindestens zwei Objekte.

Schubfachprinzip: Werden $n + 1$ Objekte auf n Schubfächer verteilt, so enthält mindestens ein Schubfach mindestens zwei Objekte.

Für $i = 1, \ldots, n + 1$ und $s = 1, \ldots, n$ Variable

$$X_{i,s} \qquad \text{“}i\text{-tes Objekt im }s\text{-ten Schubfach”}$$

Schubfachprinzip: Werden $n+1$ Objekte auf n Schubfächer verteilt, so enthält mindestens ein Schubfach mindestens zwei Objekte.

Für $i = 1, \ldots, n+1$ und $s = 1, \ldots, n$ Variable

$$X_{i,s} \qquad \text{“}i\text{-tes Objekt im } s\text{-ten Schubfach”}$$

$\mathfrak{K}_n$:

$$\{X_{i,1}, \ldots, X_{i,n}\} \;\text{ für } i \in [n+1]$$

$$\{\neg X_{i,s}, \neg X_{j,s}\} \;\text{ für } 1 \leq i < j \leq n+1,\; s \in [n].$$

Schubfachprinzip: Werden $n+1$ Objekte auf n Schubfächer verteilt, so enthält mindestens ein Schubfach mindestens zwei Objekte.

Für $i = 1, \ldots, n+1$ und $s = 1, \ldots, n$ Variable

$$X_{i,s} \qquad \text{“}i\text{-tes Objekt im }s\text{-ten Schubfach”}$$

$\mathfrak{K}_n$:

$$\{X_{i,1}, \ldots, X_{i,n}\} \;\text{ für } i \in [n+1]$$

$$\{\neg X_{i,s}, \neg X_{j,s}\} \;\text{ für } 1 \leq i < j \leq n+1,\; s \in [n].$$

Nach Schubfachprinzip:

$$\text{nicht Erf } \mathfrak{K}_n \text{ und somit } \mathfrak{K}_n \vdash_{\mathrm{R}} \emptyset.$$

Schubfachprinzip: Werden $n+1$ Objekte auf n Schubfächer verteilt, so enthält mindestens ein Schubfach mindestens zwei Objekte.

Für $i = 1, \ldots, n+1$ und $s = 1, \ldots, n$ Variable

$$X_{i,s} \qquad \text{“}i\text{-tes Objekt im }s\text{-ten Schubfach”}$$

$\mathfrak{K}_n$:

$$\{X_{i,1}, \ldots, X_{i,n}\} \ \text{ für } i \in [n+1]$$

$$\{\neg X_{i,s}, \neg X_{j,s}\} \ \text{ für } 1 \leq i < j \leq n+1, \ s \in [n].$$

Nach Schubfachprinzip:

$$\text{nicht Erf } \mathfrak{K}_n \text{ und somit } \mathfrak{K}_n \vdash_{\mathrm{R}} \emptyset.$$

Satz. Es gibt ein $c > 0$, so dass jeder Resolutionsbeweis von $\emptyset$ aus $\mathfrak{K}_n$ eine Länge $\geq 2^{c \cdot n}$ besitzt.

Eine Hornklausel ist eine Klausel, die höchestens ein positives Literal enthält.

Eine Hornklausel ist eine Klausel, die höchestens ein positives Literal enthält.

Bemerkung. Jede Resolvente von Hornklauseln ist eine Hornklausel.

Eine Hornklausel ist eine Klausel, die höchestens ein positives Literal enthält.

Bemerkung. Jede Resolvente von Hornklauseln ist eine Hornklausel.

Einheitsresolutionsregel: Sei K eine Klausel und X eine Variable.

$$\text{(ER)} \qquad \frac{K \mathbin{\dot\cup} \{\neg X\},\ \{X\}}{K}$$

Eine Hornklausel ist eine Klausel, die höchestens ein positives Literal enthält.

Bemerkung. Jede Resolvente von Hornklauseln ist eine Hornklausel.

Einheitsresolutionsregel: Sei K eine Klausel und X eine Variable.

$$\text{(ER)} \qquad \frac{K \mathbin{\dot\cup} \{\neg X\},\ \{X\}}{K}$$

Ein Einheitsresolutionsbeweis einer Klausel L aus $\mathfrak{K}$ ist ein Tupel $(K_1, \ldots, K_m)$ von Klauseln, so dass $K_m = L$ und für $i = 1, \ldots, m$ gilt

$K_i \in \mathfrak{K}$ oder
es gibt $j, k \in \{1, \ldots, i-1\}$, so dass K_i aus K_j und K_k durch (ER) entsteht.

$\mathfrak{K} \vdash_{\text{ER}} L$ gdw es gibt einen Einheitsresolutionsbeweis von L aus $\mathfrak{K}$.

Eine Hornklausel ist eine Klausel, die höchestens ein positives Literal enthält.

Bemerkung. Jede Resolvente von Hornklauseln ist eine Hornklausel.

Einheitsresolutionsregel: Sei K eine Klausel und X eine Variable.

$$\text{(ER)} \qquad \frac{K \,\dot{\cup}\, \{\neg X\},\ \{X\}}{K}$$

Ein Einheitsresolutionsbeweis einer Klausel L aus $\mathfrak{K}$ ist ein Tupel $(K_1, \ldots, K_m)$ von Klauseln, so dass $K_m = L$ und für $i = 1, \ldots, m$ gilt

$K_i \in \mathfrak{K}$ oder
es gibt $j, k \in \{1, \ldots, i-1\}$, so dass K_i aus K_j und K_k durch (ER) entsteht.

$\mathfrak{K} \vdash_{\mathrm{ER}} L$ gdw es gibt einen Einheitsresolutionsbeweis von L aus $\mathfrak{K}$.

Bemerkung. Wenn $\mathfrak{K} \vdash_{\mathrm{ER}} L$, so $\mathfrak{K} \vdash_{\mathrm{R}} L$.

Eine Hornklausel ist eine Klausel, die höchestens ein positives Literal enthält.

Bemerkung. Jede Resolvente von Hornklauseln ist eine Hornklausel.

Einheitsresolutionsregel: Sei K eine Klausel und X eine Variable.

$$\text{(ER)} \qquad \frac{K \,\dot\cup\, \{\neg X\},\ \{X\}}{K}$$

Ein Einheitsresolutionsbeweis einer Klausel L aus $\mathfrak{K}$ ist ein Tupel $(K_1, \ldots, K_m)$ von Klauseln, so dass $K_m = L$ und für $i = 1, \ldots, m$ gilt

$K_i \in \mathfrak{K}$ oder
es gibt $j, k \in \{1, \ldots, i-1\}$, so dass K_i aus K_j und K_k durch (ER) entsteht.

$\mathfrak{K} \vdash_{\mathrm{ER}} L$ gdw es gibt einen Einheitsresolutionsbeweis von L aus $\mathfrak{K}$.

Bemerkung. Wenn $\mathfrak{K} \vdash_{\mathrm{ER}} L$, so $\mathfrak{K} \vdash_{\mathrm{R}} L$.

Satz. Sei $\mathfrak{K}$ eine Menge von Hornlauseln. Dann:

$$\text{nicht Erf}\ \mathfrak{K} \quad \text{gdw} \quad \mathfrak{K} \vdash_{\mathrm{ER}} \emptyset.$$

Satz. Sei $\mathfrak{K}$ eine Menge von Hornlauseln. Dann:

$$\text{nicht Erf } \mathfrak{K} \quad \text{gdw} \quad \mathfrak{K} \vdash_{\mathrm{ER}} \emptyset.$$

Wenn Erf $\mathfrak{K}$, so ist die Belegung $b_{\mathfrak{K}}$ mit

$$b_{\mathfrak{K}}(X) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } \mathfrak{K} \vdash_{\mathrm{ER}} \{X\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine minimale $\mathfrak{K}$ erfüllende Belegung, d.h.:

- $b_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{K}) = 1$;
- für jede Belegung b mit $b(\mathfrak{K}) = 1$ gilt $b_{\mathfrak{K}} \leq b$ (d.h. $b_{\mathfrak{K}}(X) \leq b(X)$ für alle X).

Andere Darstellung der Einheitsresolution:

Markierungsalgorithmus: Eingabe: Menge $\mathfrak{K}$ von Hornklauseln

(M) Sind in einer Klausel K von $\mathfrak{K}$ alle negativen Literale markiert und kommt in K die Variable X positiv vor, so markiere in allen Klauseln von K alle Vorkommen des Literals $\neg X$.

Andere Darstellung der Einheitsresolution:

Markierungsalgorithmus: Eingabe: Menge $\mathfrak{K}$ von Hornklauseln

(M) Sind in einer Klausel K von $\mathfrak{K}$ alle negativen Literale markiert und kommt in K die Variable X positiv vor, so markiere in allen Klauseln von K alle Vorkommen des Literals $\neg X$.

Ist die Regel (M) nicht mehr anwendbar, so ist $\mathfrak{K}$ genau dann erfüllbar, wenn in keiner Klausel von $\mathfrak{K}$, (die nur negative Literale enthält), alle Literale markiert sind.

Andere Darstellung der Einheitsresolution:

Markierungsalgorithmus: Eingabe: Menge $\mathfrak{K}$ von Hornklauseln

(M) Sind in einer Klausel K von $\mathfrak{K}$ alle negativen Literale markiert und kommt in K die Variable X positiv vor, so markiere in allen Klauseln von K alle Vorkommen des Literals $\neg X$.

Ist die Regel (M) nicht mehr anwendbar, so ist $\mathfrak{K}$ genau dann erfüllbar, wenn in keiner Klausel von $\mathfrak{K}$, (die nur negative Literale enthält), alle Literale markiert sind. Für die Belegung $b_{\mathfrak{K}}$ gilt dann $b_{\mathfrak{K}}(X) = 1$ gdw das Literal X kommt in einer Klausel von $\mathfrak{K}$ vor, in der alle negativen Literale markiert sind.

(M) Sind in einer Klausel K von $\mathfrak{K}$ alle negativen Literale markiert und kommt in K die Variable X positiv vor, so markiere in allen Klauseln von K alle Vorkommen des Literals $\neg X$.

Ist die Regel (M) nicht mehr anwendbar, so ist $\mathfrak{K}$ genau dann erfüllbar, wenn in keiner Klausel von $\mathfrak{K}$, (die nur negative Literale enthält), alle Literale markiert sind.

(M) Sind in einer Klausel K von $\mathfrak{K}$ alle negativen Literale markiert und kommt in K die Variable X positiv vor, so markiere in allen Klauseln von K alle Vorkommen des Literals $\neg X$.

Ist die Regel (M) nicht mehr anwendbar, so ist $\mathfrak{K}$ genau dann erfüllbar, wenn in keiner Klausel von $\mathfrak{K}$, (die nur negative Literale enthält), alle Literale markiert sind.

$$\mathfrak{K}: \quad \{\neg X, \neg Y, \neg Z\}, \quad \{\neg U\}, \quad \{\neg V, X\}, \quad \{V\}, \quad \{Y\}, \quad \{\neg W, Z\}, \quad \{W\}$$

(M) Sind in einer Klausel K von $\mathfrak{K}$ alle negativen Literale markiert und kommt in K die Variable X positiv vor, so markiere in allen Klauseln von K alle Vorkommen des Literals $\neg X$.

Ist die Regel (M) nicht mehr anwendbar, so ist $\mathfrak{K}$ genau dann erfüllbar, wenn in keiner Klausel von $\mathfrak{K}$, (die nur negative Literale enthält), alle Literale markiert sind.

$$\mathfrak{K}: \quad \{\neg X, \neg Y, \neg Z\}, \quad \{\neg U\}, \quad \{\neg V, X\}, \quad \{V\}, \quad \{Y\}, \quad \{\neg W, Z\}, \quad \{W\}$$

$$\{\neg X, \underline{\neg Y}, \neg Z\}, \quad \{\neg U\}, \quad \{\underline{\neg V}, X\}, \quad \{V\}, \quad \{Y\}, \quad \{\underline{\neg W}, Z\}, \quad \{W\}$$

(M) Sind in einer Klausel K von $\mathfrak{K}$ alle negativen Literale markiert und kommt in K die Variable X positiv vor, so markiere in allen Klauseln von K alle Vorkommen des Literals $\neg X$.

Ist die Regel (M) nicht mehr anwendbar, so ist $\mathfrak{K}$ genau dann erfüllbar, wenn in keiner Klausel von $\mathfrak{K}$, (die nur negative Literale enthält), alle Literale markiert sind.

$$\mathfrak{K}: \quad \{\neg X, \neg Y, \neg Z\}, \quad \{\neg U\}, \quad \{\neg V, X\}, \quad \{V\}, \quad \{Y\}, \quad \{\neg W, Z\}, \quad \{W\}$$

$$\{\neg X, \underline{\neg Y}, \neg Z\}, \quad \{\neg U\}, \quad \{\underline{\neg V}, X\}, \quad \{V\}, \quad \{Y\}, \quad \{\underline{\neg W}, Z\}, \quad \{W\}$$

$$\{\underline{\neg X}, \underline{\neg Y}, \underline{\neg Z}\}, \quad \{\neg U\}, \quad \{\underline{\neg V}, X\}, \quad \{V\}, \quad \{Y\}, \quad \{\underline{\neg W}, Z\}, \quad \{W\}$$

(M) Sind in einer Klausel K von $\mathfrak{K}$ alle negativen Literale markiert und kommt in K die Variable X positiv vor, so markiere in allen Klauseln von K alle Vorkommen des Literals $\neg X$.

Ist die Regel (M) nicht mehr anwendbar, so ist $\mathfrak{K}$ genau dann erfüllbar, wenn in keiner Klausel von $\mathfrak{K}$, (die nur negative Literale enthält), alle Literale markiert sind.

$$\mathfrak{K}: \quad \{\neg X, \neg Y, \neg Z\}, \quad \{\neg U\}, \quad \{\neg V, X\}, \quad \{V\}, \quad \{Y\}, \quad \{\neg W, Z\}, \quad \{W\}$$

$$\{\neg X, \underline{\neg Y}, \neg Z\}, \quad \{\neg U\}, \quad \{\underline{\neg V}, X\}, \quad \{V\}, \quad \{Y\}, \quad \{\underline{\neg W}, Z\}, \quad \{W\}$$

$$\{\underline{\neg X}, \underline{\neg Y}, \underline{\neg Z}\}, \quad \{\neg U\}, \quad \{\underline{\neg V}, X\}, \quad \{V\}, \quad \{Y\}, \quad \{\underline{\neg W}, Z\}, \quad \{W\}$$

Somit nicht Erf $\mathfrak{K}$.

$$\mathfrak{K}: \quad \{\neg X, \neg Y, \neg Z\}, \quad \{\neg U\}, \quad \{\neg V, X\}, \quad \{V\}, \quad \{Y\}, \quad \{\neg W, Z\}, \quad \{W\}$$

$$\{\neg X, \underline{\neg Y}, \neg Z\}, \quad \{\neg U\}, \quad \{\underline{\neg V}, X\}, \quad \{V\}, \quad \{Y\}, \quad \{\underline{\neg W}, Z\}, \quad \{W\}$$

$$\{\underline{\neg X}, \underline{\neg Y}, \underline{\neg Z}\}, \quad \{\neg U\}, \quad \{\underline{\neg V}, X\}, \quad \{V\}, \quad \{Y\}, \quad \{\underline{\neg W}, Z\}, \quad \{W\}$$

$$\mathfrak{K}: \quad \{\neg X, \neg Y, \neg Z\}, \quad \{\neg U\}, \quad \{\neg V, X\}, \quad \{V\}, \quad \{Y\}, \quad \{\neg W, Z\}, \quad \{W\}$$

$$\{\neg X, \underline{\neg Y}, \neg Z\}, \quad \{\neg U\}, \quad \{\underline{\neg V}, X\}, \quad \{V\}, \quad \{Y\}, \quad \{\underline{\neg W}, Z\}, \quad \{W\}$$

$$\{\underline{\neg X}, \underline{\neg Y}, \underline{\neg Z}\}, \quad \{\neg U\}, \quad \{\underline{\neg V}, X\}, \quad \{V\}, \quad \{Y\}, \quad \{\underline{\neg W}, Z\}, \quad \{W\}$$

$$(\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z) \wedge \neg U \wedge (V \rightarrow X) \wedge V \wedge Y \wedge (W \rightarrow Z) \wedge W$$

$$\mathfrak{K}: \quad \{\neg X, \neg Y, \neg Z\}, \quad \{\neg U\}, \quad \{\neg V, X\}, \quad \{V\}, \quad \{Y\}, \quad \{\neg W, Z\}, \quad \{W\}$$

$$\{\neg X, \underline{\neg Y}, \neg Z\}, \quad \{\neg U\}, \quad \{\underline{\neg V}, X\}, \quad \{V\}, \quad \{Y\}, \quad \{\underline{\neg W}, Z\}, \quad \{W\}$$

$$\{\underline{\neg X}, \underline{\neg Y}, \underline{\neg Z}\}, \quad \{\neg U\}, \quad \{\underline{\neg V}, X\}, \quad \{V\}, \quad \{Y\}, \quad \{\underline{\neg W}, Z\}, \quad \{W\}$$

$$(\neg X \lor \neg Y \lor \neg Z) \land \neg U \land (V \to X) \land V \land Y \land (W \to Z) \land W$$

$$(\neg X \lor \underline{\neg Y} \lor \neg Z) \land \neg U \land (\underline{V} \to X) \land V \land Y \land (\underline{W} \to Z) \land W$$

$\mathfrak{K}: \quad \{\neg X, \neg Y, \neg Z\}, \quad \{\neg U\}, \quad \{\neg V, X\}, \quad \{V\}, \quad \{Y\}, \quad \{\neg W, Z\}, \quad \{W\}$

$\{\neg X, \underline{\neg Y}, \neg Z\}, \quad \{\neg U\}, \quad \{\underline{\neg V}, X\}, \quad \{V\}, \quad \{Y\}, \quad \{\underline{\neg W}, Z\}, \quad \{W\}$

$\{\underline{\neg X}, \underline{\neg Y}, \underline{\neg Z}\}, \quad \{\neg U\}, \quad \{\underline{\neg V}, X\}, \quad \{V\}, \quad \{Y\}, \quad \{\underline{\neg W}, Z\}, \quad \{W\}$

$(\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z) \wedge \neg U \wedge (V \rightarrow X) \wedge V \wedge Y \wedge (W \rightarrow Z) \wedge W$

$(\neg X \vee \underline{\neg Y} \vee \neg Z) \wedge \neg U \wedge (\underline{V} \rightarrow X) \wedge V \wedge Y \wedge (\underline{W} \rightarrow Z) \wedge W$

$(\underline{\neg X} \vee \underline{\neg Y} \vee \underline{\neg Z}) \wedge \neg U \wedge (\underline{V} \rightarrow X) \wedge V \wedge Y \wedge (\underline{W} \rightarrow Z) \wedge W$

$\mathfrak{K}: \quad \{\neg X, \neg Y, \neg Z\}, \quad \{U\}, \quad \{\neg U, X\}, \quad \{\neg U, \neg X, Y\}$

$\mathfrak{K}: \quad \{\neg X, \neg Y, \neg Z\}, \quad \{U\}, \quad \{\neg U, X\}, \quad \{\neg U, \neg X, Y\}$

$\{\neg X, \neg Y, \neg Z\}, \quad \{U\}, \quad \{\underline{\neg U}, X\}, \quad \{\underline{\neg U}, \neg X, Y\}$

$\mathfrak{K}: \quad \{\neg X, \neg Y, \neg Z\}, \quad \{U\}, \quad \{\neg U, X\}, \quad \{\neg U, \neg X, Y\}$

$\{\neg X, \neg Y, \neg Z\}, \quad \{U\}, \quad \{\underline{\neg U}, X\}, \quad \{\underline{\neg U}, \neg X, Y\}$

$\{\underline{\neg X}, \neg Y, \neg Z\}, \quad \{U\}, \quad \{\underline{\neg U}, X\}, \quad \{\underline{\neg U}, \underline{\neg X}, Y\}$

$$\mathfrak{K}: \quad \{\neg X, \neg Y, \neg Z\}, \quad \{U\}, \quad \{\neg U, X\}, \quad \{\neg U, \neg X, Y\}$$

$$\{\neg X, \neg Y, \neg Z\}, \quad \{U\}, \quad \{\underline{\neg U}, X\}, \quad \{\underline{\neg U}, \neg X, Y\}$$

$$\{\underline{\neg X}, \neg Y, \neg Z\}, \quad \{U\}, \quad \{\underline{\neg U}, X\}, \quad \{\underline{\neg U}, \underline{\neg X}, Y\}$$

$$\{\underline{\neg X}, \underline{\neg Y}, \neg Z\}, \quad \{U\}, \quad \{\underline{\neg U}, X\}, \quad \{\underline{\neg U}, \underline{\neg X}, Y\}$$

$\mathfrak{K}: \quad \{\neg X, \neg Y, \neg Z\}, \quad \{U\}, \quad \{\neg U, X\}, \quad \{\neg U, \neg X, Y\}$

$\{\neg X, \neg Y, \neg Z\}, \quad \{U\}, \quad \{\underline{\neg U}, X\}, \quad \{\underline{\neg U}, \neg X, Y\}$

$\{\underline{\neg X}, \neg Y, \neg Z\}, \quad \{U\}, \quad \{\underline{\neg U}, X\}, \quad \{\underline{\neg U}, \underline{\neg X}, Y\}$

$\{\underline{\neg X}, \underline{\neg Y}, \neg Z\}, \quad \{U\}, \quad \{\underline{\neg U}, X\}, \quad \{\underline{\neg U}, \underline{\neg X}, Y\}$

$$b_{\mathfrak{K}}(X) = b_{\mathfrak{K}}(Y) = b_{\mathfrak{K}}(U) = 1, \qquad b_{\mathfrak{K}}(Z) = 0$$

$\mathfrak{K}: \quad \{\neg X, \neg Y, \neg Z\}, \quad \{U\}, \quad \{\neg U, X\}, \quad \{\neg U, \neg X, Y\}$

$\{\neg X, \neg Y, \neg Z\}, \quad \{U\}, \quad \{\underline{\neg U}, X\}, \quad \{\underline{\neg U}, \neg X, Y\}$

$\{\underline{\neg X}, \neg Y, \neg Z\}, \quad \{U\}, \quad \{\underline{\neg U}, X\}, \quad \{\underline{\neg U}, \underline{\neg X}, Y\}$

$\{\underline{\neg X}, \underline{\neg Y}, \neg Z\}, \quad \{U\}, \quad \{\underline{\neg U}, X\}, \quad \{\underline{\neg U}, \underline{\neg X}, Y\}$

$$b_{\mathfrak{K}}(X) = b_{\mathfrak{K}}(Y) = b_{\mathfrak{K}}(U) = 1, \qquad b_{\mathfrak{K}}(Z) = 0$$

$(\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z) \wedge U \wedge (U \to X) \wedge ((U \wedge X) \to Y)$

$\mathfrak{K}: \quad \{\neg X, \neg Y, \neg Z\}, \quad \{U\}, \quad \{\neg U, X\}, \quad \{\neg U, \neg X, Y\}$

$\{\neg X, \neg Y, \neg Z\}, \quad \{U\}, \quad \{\underline{\neg U}, X\}, \quad \{\underline{\neg U}, \neg X, Y\}$

$\{\underline{\neg X}, \neg Y, \neg Z\}, \quad \{U\}, \quad \{\underline{\neg U}, X\}, \quad \{\underline{\neg U}, \underline{\neg X}, Y\}$

$\{\underline{\neg X}, \underline{\neg Y}, \neg Z\}, \quad \{U\}, \quad \{\underline{\neg U}, X\}, \quad \{\underline{\neg U}, \underline{\neg X}, Y\}$

$$b_{\mathfrak{K}}(X) = b_{\mathfrak{K}}(Y) = b_{\mathfrak{K}}(U) = 1, \qquad b_{\mathfrak{K}}(Z) = 0$$

$(\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z) \wedge U \wedge (U \rightarrow X) \wedge ((U \wedge X) \rightarrow Y)$

$(\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z) \wedge U \wedge (\underline{U} \rightarrow X) \wedge ((\underline{U} \wedge X) \rightarrow Y)$

$\mathfrak{K}: \quad \{\neg X, \neg Y, \neg Z\}, \quad \{U\}, \quad \{\neg U, X\}, \quad \{\neg U, \neg X, Y\}$

$\{\neg X, \neg Y, \neg Z\}, \quad \{U\}, \quad \{\underline{\neg U}, X\}, \quad \{\underline{\neg U}, \neg X, Y\}$

$\{\underline{\neg X}, \neg Y, \neg Z\}, \quad \{U\}, \quad \{\underline{\neg U}, X\}, \quad \{\underline{\neg U}, \underline{\neg X}, Y\}$

$\{\underline{\neg X}, \underline{\neg Y}, \neg Z\}, \quad \{U\}, \quad \{\underline{\neg U}, X\}, \quad \{\underline{\neg U}, \underline{\neg X}, Y\}$

$$b_{\mathfrak{K}}(X) = b_{\mathfrak{K}}(Y) = b_{\mathfrak{K}}(U) = 1, \qquad b_{\mathfrak{K}}(Z) = 0$$

$(\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z) \wedge U \wedge (U \to X) \wedge ((U \wedge X) \to Y)$

$(\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z) \wedge U \wedge (\underline{U} \to X) \wedge ((\underline{U} \wedge X) \to Y)$

$(\underline{\neg X} \vee \neg Y \vee \neg Z) \wedge U \wedge (\underline{U} \to X) \wedge ((\underline{U} \wedge \underline{X}) \to Y)$

$\mathfrak{K}: \quad \{\neg X, \neg Y, \neg Z\}, \quad \{U\}, \quad \{\neg U, X\}, \quad \{\neg U, \neg X, Y\}$

$\{\neg X, \neg Y, \neg Z\}, \quad \{U\}, \quad \{\underline{\neg U}, X\}, \quad \{\underline{\neg U}, \neg X, Y\}$

$\{\underline{\neg X}, \neg Y, \neg Z\}, \quad \{U\}, \quad \{\underline{\neg U}, X\}, \quad \{\underline{\neg U}, \underline{\neg X}, Y\}$

$\{\underline{\neg X}, \underline{\neg Y}, \neg Z\}, \quad \{U\}, \quad \{\underline{\neg U}, X\}, \quad \{\underline{\neg U}, \underline{\neg X}, Y\}$

$$b_{\mathfrak{K}}(X) = b_{\mathfrak{K}}(Y) = b_{\mathfrak{K}}(U) = 1, \qquad b_{\mathfrak{K}}(Z) = 0$$

$(\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z) \wedge U \wedge (U \rightarrow X) \wedge ((U \wedge X) \rightarrow Y)$

$(\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z) \wedge U \wedge (\underline{U} \rightarrow X) \wedge ((\underline{U} \wedge X) \rightarrow Y)$

$(\underline{\neg X} \vee \neg Y \vee \neg Z) \wedge U \wedge (\underline{U} \rightarrow X) \wedge ((\underline{U} \wedge \underline{X}) \rightarrow Y)$

$(\underline{\neg X} \vee \underline{\neg Y} \vee \neg Z) \wedge U \wedge (\underline{U} \rightarrow X) \wedge ((\underline{U} \wedge \underline{X}) \rightarrow Y)$

Vor.: (1) $(X \to Y)$

(2) $\neg(Y \land Z)$ also z.z. $\{(X \to Y), \neg(Y \land Z)\} \models \neg(X \land Z)$

Beh.: (3) $\neg(X \land Z)$

Vor.: (1) $(X \to Y)$

(2) $\neg(Y \wedge Z)$ also z.z. $\{(X \to Y), \neg(Y \wedge Z)\} \models \neg(X \wedge Z)$

Beh.: (3) $\neg(X \wedge Z)$

$\{(X \to Y), \neg(Y \wedge Z), (X \wedge Z)\} \models X$

Vor.: (1) $(X \to Y)$

(2) $\neg(Y \land Z)$ also z.z. $\{(X \to Y), \neg(Y \land Z)\} \models \neg(X \land Z)$

Beh.: (3) $\neg(X \land Z)$

$\{(X \to Y), \neg(Y \land Z), (X \land Z)\} \models X$

$\{(X \to Y), \neg(Y \land Z), (X \land Z)\} \models Y$

Vor.: (1) $(X \rightarrow Y)$

(2) $\neg(Y \wedge Z)$ also z.z. $\{(X \rightarrow Y), \neg(Y \wedge Z)\} \models \neg(X \wedge Z)$

Beh.: (3) $\neg(X \wedge Z)$

$\{(X \rightarrow Y), \neg(Y \wedge Z), (X \wedge Z)\} \models X$

$\{(X \rightarrow Y), \neg(Y \wedge Z), (X \wedge Z)\} \models Y$

$\{(X \rightarrow Y), \neg(Y \wedge Z), (X \wedge Z)\} \models Z$

Vor.: (1) $(X \rightarrow Y)$

(2) $\neg(Y \wedge Z)$ also z.z. $\{(X \rightarrow Y), \neg(Y \wedge Z)\} \models \neg(X \wedge Z)$

Beh.: (3) $\neg(X \wedge Z)$

$$\{(X \rightarrow Y), \neg(Y \wedge Z), (X \wedge Z)\} \models X$$

$$\{(X \rightarrow Y), \neg(Y \wedge Z), (X \wedge Z)\} \models Y$$

$$\{(X \rightarrow Y), \neg(Y \wedge Z), (X \wedge Z)\} \models Z$$

$$\{(X \rightarrow Y), \neg(Y \wedge Z), (X \wedge Z)\} \models \underbrace{(Y \wedge Z)}_{\alpha}$$

Vor.: (1) $(X \to Y)$

(2) $\neg(Y \wedge Z)$ also z.z. $\{(X \to Y), \neg(Y \wedge Z)\} \models \neg(X \wedge Z)$

Beh.: (3) $\neg(X \wedge Z)$

$$\{(X \to Y), \neg(Y \wedge Z), (X \wedge Z)\} \models X$$

$$\{(X \to Y), \neg(Y \wedge Z), (X \wedge Z)\} \models Y$$

$$\{(X \to Y), \neg(Y \wedge Z), (X \wedge Z)\} \models Z$$

$$\{(X \to Y), \neg(Y \wedge Z), (X \wedge Z)\} \models \underbrace{(Y \wedge Z)}_{\alpha}$$

$$\{(X \to Y), \neg\alpha, (X \wedge Z)\} \models \neg\alpha$$

Vor.: (1) $(X \rightarrow Y)$

(2) $\neg(Y \wedge Z)$ also z.z. $\{(X \rightarrow Y), \neg(Y \wedge Z)\} \models \neg(X \wedge Z)$

Beh.: (3) $\neg(X \wedge Z)$

$$\{(X \rightarrow Y), \neg(Y \wedge Z), (X \wedge Z)\} \models X$$

$$\{(X \rightarrow Y), \neg(Y \wedge Z), (X \wedge Z)\} \models Y$$

$$\{(X \rightarrow Y), \neg(Y \wedge Z), (X \wedge Z)\} \models Z$$

$$\{(X \rightarrow Y), \neg(Y \wedge Z), (X \wedge Z)\} \models \underbrace{(Y \wedge Z)}_{\alpha}$$

$$\{(X \rightarrow Y), \neg\alpha, (X \wedge Z)\} \models \neg\alpha$$

$$\{(X \rightarrow Y), \neg\alpha, (X \wedge Z)\} \models (\alpha \wedge \neg\alpha)$$

Vor.: (1) $(X \to Y)$

(2) $\neg(Y \land Z)$ also z.z. $\{(X \to Y), \neg(Y \land Z)\} \models \neg(X \land Z)$

Beh.: (3) $\neg(X \land Z)$

$$\{(X \to Y), \neg(Y \land Z), (X \land Z)\} \models X$$

$$\{(X \to Y), \neg(Y \land Z), (X \land Z)\} \models Y$$

$$\{(X \to Y), \neg(Y \land Z), (X \land Z)\} \models Z$$

$$\{(X \to Y), \neg(Y \land Z), (X \land Z)\} \models \underbrace{(Y \land Z)}_{\alpha}$$

$$\{(X \to Y), \neg\alpha, (X \land Z)\} \models \neg\alpha$$

$$\{(X \to Y), \neg\alpha, (X \land Z)\} \models (\alpha \land \neg\alpha)$$

$$\{(X \to Y), \neg\alpha\} \models \neg(X \land Z)$$

Vor.: (1) $(X \to Y)$

(2) $\neg(Y \wedge Z)$ also z.z. $\{(X \to Y), \neg(Y \wedge Z)\} \models \neg(X \wedge Z)$

Beh.: (3) $\neg(X \wedge Z)$

$$\{(X \to Y), \neg(Y \wedge Z), (X \wedge Z)\} \models X$$

$$\{(X \to Y), \neg(Y \wedge Z), (X \wedge Z)\} \models Y$$

$$\{(X \to Y), \neg(Y \wedge Z), (X \wedge Z)\} \models Z$$

$$\{(X \to Y), \neg(Y \wedge Z), (X \wedge Z)\} \models \underbrace{(Y \wedge Z)}_{\alpha}$$

$$\{(X \to Y), \neg\alpha, (X \wedge Z)\} \models \neg\alpha$$

$$\{(X \to Y), \neg\alpha, (X \wedge Z)\} \models (\alpha \wedge \neg\alpha)$$

$$\{(X \to Y), \neg\alpha\} \models \neg(X \wedge Z)$$

$$\{(X \to Y), \neg(Y \wedge Z)\} \models \neg(X \wedge Z)$$

Eine Sequenz

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta$$

ist korrekt, wenn $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \models \beta$.

Eine Sequenz

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta$$

ist korrekt, wenn $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \models \beta$.

Eine Sequenzenregel

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma_1, \beta_1 \\ \vdots \\ \Gamma_s, \beta_s\end{array}}{\Gamma, \beta}$$

ist korrekt, wenn sie bei Anwendung auf korrekte Sequenzen eine korrekte Sequenz liefert. Ist $s = 0$, so bedeutet dies: Γ, β ist korrekt.

Eine Sequenz

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta$$

ist korrekt, wenn $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \models \beta$.

Eine Sequenzenregel

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma_1, \beta_1 \\ \vdots \\ \Gamma_s, \beta_s\end{array}}{\Gamma, \beta}$$

ist korrekt, wenn sie bei Anwendung auf korrekte Sequenzen eine korrekte Sequenz liefert. Ist $s = 0$, so bedeutet dies: Γ, β ist korrekt.

Ein Sequenzenkalkül $\mathfrak{S}$ ist eine Menge von Sequenzenregeln.

Eine Sequenz

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta$$

ist korrekt, wenn $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \models \beta$.

Eine Sequenzenregel

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma_1, \beta_1 \\ \vdots \\ \Gamma_s, \beta_s\end{array}}{\Gamma, \beta}$$

ist korrekt, wenn sie bei Anwendung auf korrekte Sequenzen eine korrekte Sequenz liefert. Ist $s = 0$, so bedeutet dies: Γ, β ist korrekt.

Ein Sequenzenkalkül $\mathfrak{S}$ ist eine Menge von Sequenzenregeln.

Eine Sequenz Γ, β ist in $\mathfrak{S}$ ableitbar oder in $\mathfrak{S}$ formal beweisbar, $\vdash_{\mathfrak{S}} \Gamma, \beta$, wenn sie durch endlichmalige Anwendung der Regeln in $\mathfrak{S}$ gewonnen werden kann.

Eine Sequenz

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta$$

ist korrekt, wenn $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \models \beta$.

Eine Sequenzenregel

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma_1, \beta_1 \\ \vdots \\ \Gamma_s, \beta_s\end{array}}{\Gamma, \beta}$$

ist korrekt, wenn sie bei Anwendung auf korrekte Sequenzen eine korrekte Sequenz liefert. Ist $s = 0$, so bedeutet dies: Γ, β ist korrekt.

Ein Sequenzenkalkül $\mathfrak{S}$ ist eine Menge von Sequenzenregeln.

Eine Sequenz Γ, β ist in $\mathfrak{S}$ ableitbar oder in $\mathfrak{S}$ formal beweisbar, $\vdash_{\mathfrak{S}} \Gamma, \beta$, wenn sie durch endlichmalige Anwendung der Regeln in $\mathfrak{S}$ gewonnen werden kann.

$\mathfrak{S}$ ist korrekt: Alle Regeln in $\mathfrak{S}$ sind korrekt.

Eine Sequenz

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta$$

ist korrekt, wenn $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \models \beta$.

Eine Sequenzenregel

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma_1, \beta_1 \\ \vdots \\ \Gamma_s, \beta_s\end{array}}{\Gamma, \beta}$$

ist korrekt, wenn sie bei Anwendung auf korrekte Sequenzen eine korrekte Sequenz liefert. Ist $s = 0$, so bedeutet dies: Γ, β ist korrekt.

Ein Sequenzenkalkül $\mathfrak{S}$ ist eine Menge von Sequenzenregeln.

Eine Sequenz Γ, β ist in $\mathfrak{S}$ ableitbar oder in $\mathfrak{S}$ formal beweisbar, $\vdash_{\mathfrak{S}} \Gamma, \beta$, wenn sie durch endlichmalige Anwendung der Regeln in $\mathfrak{S}$ gewonnen werden kann.

$\mathfrak{S}$ ist korrekt: Alle Regeln in $\mathfrak{S}$ sind korrekt.

Bemerkung. Ist $\mathfrak{S}$ korrekt, so ist jede in $\mathfrak{S}$ ableitbare Sequenz korrekt.

Eine Sequenz

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta$$

ist korrekt, wenn $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \models \beta$.

Eine Sequenzenregel

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma_1, \beta_1 \\ \vdots \\ \Gamma_s, \beta_s\end{array}}{\Gamma, \beta}$$

ist korrekt, wenn sie bei Anwendung auf korrekte Sequenzen eine korrekte Sequenz liefert. Ist $s = 0$, so bedeutet dies: Γ, β ist korrekt.

Ein Sequenzenkalkül $\mathfrak{S}$ ist eine Menge von Sequenzenregeln.

Eine Sequenz Γ, β ist in $\mathfrak{S}$ ableitbar oder in $\mathfrak{S}$ formal beweisbar, $\vdash_{\mathfrak{S}} \Gamma, \beta$, wenn sie durch endlichmalige Anwendung der Regeln in $\mathfrak{S}$ gewonnen werden kann.

$\mathfrak{S}$ ist korrekt: Alle Regeln in $\mathfrak{S}$ sind korrekt.

Bemerkung. Ist $\mathfrak{S}$ korrekt, so ist jede in $\mathfrak{S}$ ableitbare Sequenz korrekt.

$\mathfrak{S}$ ist vollständig: Jede korrekte Sequenz ist in $\mathfrak{S}$ ableitbar.

Ein korrekter und vollständiger Sequenzenkalkül $\mathfrak{S}_0$ für AA$(\neg, \vee)$

(Vor) $$\frac{}{\Gamma, \alpha}$$ falls α in Γ

(Ant) $$\frac{\Gamma, \alpha}{\Gamma', \alpha}$$ falls jeder Ausdruck in Γ auch in Γ' vorkommt

(FU) $$\frac{\begin{array}{c}\Gamma, \alpha, \beta \\ \Gamma, \neg\alpha, \beta\end{array}}{\Gamma, \beta}$$

(Wid) $$\frac{\begin{array}{c}\Gamma, \neg\alpha, \beta \\ \Gamma, \neg\alpha, \neg\beta\end{array}}{\Gamma, \alpha}$$

($\vee$A) $$\frac{\begin{array}{c}\Gamma, \alpha, \beta \\ \Gamma, \delta, \beta\end{array}}{\Gamma, (\alpha \vee \delta), \beta}$$

($\vee$S$_1$) $$\frac{\Gamma, \alpha}{\Gamma, (\alpha \vee \beta)}$$

($\vee$S$_2$) $$\frac{\Gamma, \alpha}{\Gamma, (\beta \vee \alpha)}$$

Für jedes $\alpha \in \mathrm{AA}(\neg, \vee)$: $\quad \vdash_{\mathfrak{S}_0} (\alpha \vee \neg\alpha)$

Für jedes $\alpha \in \mathrm{AA}(\neg, \vee)$: $\vdash_{\mathfrak{S}_0} (\alpha \vee \neg\alpha)$

1. α α (Vor)

Für jedes $\alpha \in \mathrm{AA}(\neg, \vee)$: $\vdash_{\mathfrak{S}_0} (\alpha \vee \neg\alpha)$

1. $\alpha \; \alpha$ (Vor)
2. $\alpha \; (\alpha \vee \neg\alpha)$ ($\vee$S$_1$) auf 1

Für jedes $\alpha \in \mathrm{AA}(\neg, \vee)$: $\vdash_{\mathfrak{S}_0} (\alpha \vee \neg\alpha)$

1. $\alpha \ \alpha$ (Vor)
2. $\alpha \ (\alpha \vee \neg\alpha)$ $(\vee \mathrm{S}_1)$ auf 1
3. $\neg\alpha \ \neg\alpha$ (Vor)

Für jedes $\alpha \in \mathrm{AA}(\neg, \vee)$: $\vdash_{\mathfrak{S}_0} (\alpha \vee \neg\alpha)$

1. $\alpha\ \alpha$ (Vor)
2. $\alpha\ (\alpha \vee \neg\alpha)$ $(\vee\mathrm{S}_1)$ auf 1
3. $\neg\alpha\ \neg\alpha$ (Vor)
4. $\neg\alpha\ (\alpha \vee \neg\alpha)$ $(\vee\mathrm{S}_2)$ auf 3

Für jedes $\alpha \in \mathrm{AA}(\neg, \vee)$: $\vdash_{\mathfrak{S}_0} (\alpha \vee \neg\alpha)$

1. $\alpha\ \alpha$ (Vor)
2. $\alpha\ (\alpha \vee \neg\alpha)$ $(\vee \mathrm{S}_1)$ auf 1
3. $\neg\alpha\ \neg\alpha$ (Vor)
4. $\neg\alpha\ (\alpha \vee \neg\alpha)$ $(\vee \mathrm{S}_2)$ auf 3
5. $(\alpha \vee \neg\alpha)$ (FU) auf 2,4

Rechtfertigung für (Wid$'$):

Rechtfertigung für (Wid′):

1. $\Gamma\,\alpha$ (Prämisse)

Rechtfertigung für (Wid$'$):

1. $\Gamma\ \alpha$ (Prämisse)

2. $\Gamma\ \neg\alpha$ (Prämisse)

Rechtfertigung für (Wid$'$):

1. $\Gamma\ \alpha$ (Prämisse)
2. $\Gamma\ \neg\alpha$ (Prämisse)
3. $\Gamma\ \neg\beta\ \alpha$ (Ant) auf 1

Rechtfertigung für (Wid′):

1. $\Gamma\ \alpha$ (Prämisse)
2. $\Gamma\ \neg\alpha$ (Prämisse)
3. $\Gamma\ \neg\beta\ \alpha$ (Ant) auf 1
4. $\Gamma\ \neg\beta\ \neg\alpha$ (Ant) auf 2

Rechtfertigung für (Wid′):

1. $\Gamma\ \alpha$ (Prämisse)
2. $\Gamma\ \neg\alpha$ (Prämisse)
3. $\Gamma\ \neg\beta\ \alpha$ (Ant) auf 1
4. $\Gamma\ \neg\beta\ \neg\alpha$ (Ant) auf 2
5. $\Gamma\ \beta$ (Wid) auf 3,4

Rechtfertigung für (MP′):

1	$\Gamma, (\alpha \vee \beta)$	Prämisse
2	$\Gamma, \neg\alpha$	Prämisse
3	$\Gamma, \alpha, \neg\alpha$	(Ant) auf 2
4	Γ, α, α	(Vor)
5	Γ, α, β	(Wid′) auf 4 und 3
6	Γ, β, β	(Vor)
7	$\Gamma, (\alpha \vee \beta), \beta$	($\vee$A) auf 5 und 6
8	$\Gamma, \neg(\alpha \vee \beta), (\alpha \vee \beta)$	(Ant) auf 1
9	$\Gamma, \neg(\alpha \vee \beta), \neg(\alpha \vee \beta)$	(Vor)
10	$\Gamma, \neg(\alpha \vee \beta), \beta$	(Wid′) auf 8 und 9
11	Γ, β	(FU) auf 7 und 10

$\vdash$ statt $\vdash_{\mathfrak{S}_0}$.

$\vdash$ statt $\vdash_{\mathfrak{S}_0}$.

Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{AA}(\neg, \vee)$ und $\beta \in \mathrm{AA}(\neg, \vee)$.

β ist aus Γ ableitbar, $\Gamma \vdash \beta$,

gdw es gibt endlich viele $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \Gamma$ mit: $\vdash \alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta$

$\vdash$ statt $\vdash_{\mathfrak{S}_0}$.

Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{AA}(\neg, \vee)$ und $\beta \in \mathrm{AA}(\neg, \vee)$.

β ist aus Γ ableitbar, $\Gamma \vdash \beta$,

gdw es gibt endlich viele $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \Gamma$ mit: $\vdash \alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta$

Γ ist widerspruchsfrei, Wf Γ,

gdw es gibt kein α mit: $\Gamma \vdash \alpha$ und $\Gamma \vdash \neg\alpha$.

$\vdash$ statt $\vdash_{\mathfrak{G}_0}$.

Sei $\Gamma \subseteq AA(\neg, \vee)$ und $\beta \in AA(\neg, \vee)$.

β ist aus Γ ableitbar, $\Gamma \vdash \beta$,

gdw es gibt endlich viele $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \Gamma$ mit: $\vdash \alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta$

Γ ist widerspruchsfrei, Wf Γ,

gdw es gibt kein α mit: $\Gamma \vdash \alpha$ und $\Gamma \vdash \neg\alpha$.

Bemerkung 1. Wenn Erf Γ, so Wf Γ.

$\vdash$ statt $\vdash_{\mathfrak{G}_0}$.

Sei $\Gamma \subseteq AA(\neg, \vee)$ und $\beta \in AA(\neg, \vee)$.

β ist aus Γ ableitbar, $\Gamma \vdash \beta$,

gdw es gibt endlich viele $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \Gamma$ mit: $\vdash \alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta$

Γ ist widerspruchsfrei, Wf Γ,

gdw es gibt kein α mit: $\Gamma \vdash \alpha$ und $\Gamma \vdash \neg\alpha$.

Bemerkung 1. Wenn Erf Γ, so Wf Γ.

Ziel: Wenn Wf Γ, so Erf Γ.

Dann auch: Wenn $\Gamma \models \beta$, so $\Gamma \vdash \beta$.

$\vdash$ statt $\vdash_{\mathfrak{G}_0}$.

Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{AA}(\neg, \vee)$ und $\beta \in \mathrm{AA}(\neg, \vee)$.

β ist aus Γ ableitbar, $\Gamma \vdash \beta$,

gdw es gibt endlich viele $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \Gamma$ mit: $\vdash \alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta$

Γ ist widerspruchsfrei, $\mathrm{Wf}\ \Gamma$,

gdw es gibt kein α mit: $\Gamma \vdash \alpha$ und $\Gamma \vdash \neg\alpha$.

Bemerkung 1. Wenn Erf Γ, so Wf Γ.

Ziel: Wenn Wf Γ, so Erf Γ.

Dann auch: Wenn $\Gamma \models \beta$, so $\Gamma \vdash \beta$.

Wegen Korrektheit: Wenn $\Gamma \vdash \beta$, so $\Gamma \models \beta$ und somit ($\Gamma \vdash \beta$ gdw $\Gamma \models \beta$).

Lemma 1. Wf Γ gdw für alle endlichen $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$: Wf Γ_0.

Lemma 1. Wf Γ gdw für alle endlichen $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$: Wf Γ_0.

Lemma 2. nicht Wf Γ gdw für alle α: $\Gamma \vdash \alpha$.

Lemma 1. Wf Γ gdw für alle endlichen $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$: Wf Γ_0.

Lemma 2. nicht Wf Γ gdw für alle α: $\Gamma \vdash \alpha$.

Lemma 3. Für alle Γ, α:

Lemma 1. Wf Γ gdw für alle endlichen $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$: Wf Γ_0.

Lemma 2. nicht Wf Γ gdw für alle α: $\Gamma \vdash \alpha$.

Lemma 3. Für alle Γ, α:

a) $\Gamma \vdash \alpha$ gdw nicht Wf $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$.

Lemma 1. Wf Γ gdw für alle endlichen $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$: Wf Γ_0.

Lemma 2. nicht Wf Γ gdw für alle α: $\Gamma \vdash \alpha$.

Lemma 3. Für alle Γ, α:

a) $\Gamma \vdash \alpha$ gdw nicht Wf $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$.

b) $\Gamma \vdash \neg\alpha$ gdw nicht Wf $\Gamma \cup \{\alpha\}$.

Lemma 1. Wf Γ gdw für alle endlichen $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$: Wf Γ_0.

Lemma 2. nicht Wf Γ gdw für alle α: $\Gamma \vdash \alpha$.

Lemma 3. Für alle Γ, α:

a) $\Gamma \vdash \alpha$ gdw nicht Wf $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$.

b) $\Gamma \vdash \neg\alpha$ gdw nicht Wf $\Gamma \cup \{\alpha\}$.

c) Wenn Wf Γ, so Wf $\Gamma \cup \{\alpha\}$ oder Wf $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$.

Lemma 1. Wf Γ gdw für alle endlichen $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$: Wf Γ_0.

Lemma 2. nicht Wf Γ gdw für alle α: $\Gamma \vdash \alpha$.

Lemma 3. Für alle Γ, α:

a) $\Gamma \vdash \alpha$ gdw nicht Wf $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$.

b) $\Gamma \vdash \neg\alpha$ gdw nicht Wf $\Gamma \cup \{\alpha\}$.

c) Wenn Wf Γ, so Wf $\Gamma \cup \{\alpha\}$ oder Wf $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$.

Bemerkung 2. Wenn Wf Γ, so Erf Γ (und somit (Wf Γ gdw Erf Γ)).

Lemma 1. Wf Γ gdw für alle endlichen $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$: Wf Γ_0.

Lemma 2. nicht Wf Γ gdw für alle α: $\Gamma \vdash \alpha$.

Lemma 3. Für alle Γ, α:

a) $\Gamma \vdash \alpha$ gdw nicht Wf $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$.

b) $\Gamma \vdash \neg\alpha$ gdw nicht Wf $\Gamma \cup \{\alpha\}$.

c) Wenn Wf Γ, so Wf $\Gamma \cup \{\alpha\}$ oder Wf $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$.

Bemerkung 2. Wenn Wf Γ, so Erf Γ (und somit (Wf Γ gdw Erf Γ)).

Korrektheit- und Vollständigkeitssatz: $\Gamma \vdash \beta$ gdw $\Gamma \models \beta$.

HILBERTs System $\mathfrak{H}_0$:

(A1) $$\frac{}{(X \to (Y \to X))}$$

(A2) $$\frac{}{((X \to (Y \to Z)) \to ((X \to Y) \to (X \to Z)))}$$

(A3) $$\frac{}{((\neg X \to Y) \to ((\neg X \to \neg Y) \to X))}$$

HILBERTs System $\mathfrak{H}_0$:

(A1) $$\frac{}{(X \to (Y \to X))}$$

(A2) $$\frac{}{((X \to (Y \to Z)) \to ((X \to Y) \to (X \to Z)))}$$

(A3) $$\frac{}{((\neg X \to Y) \to ((\neg X \to \neg Y) \to X))}$$

(MP) $$\frac{X \quad (X \to Y)}{Y}$$

(SUB) $$\frac{\alpha}{\alpha\frac{\beta_1,\ldots,\beta_n}{X_1,\ldots,X_n}}$$ $X_1, \ldots, X_n$ paarw. verschieden

HILBERTs System $\mathfrak{H}_0$:

(A1) $$\frac{}{(X \to (Y \to X))}$$

(A2) $$\frac{}{((X \to (Y \to Z)) \to ((X \to Y) \to (X \to Z)))}$$

(A3) $$\frac{}{((\neg X \to Y) \to ((\neg X \to \neg Y) \to X))}$$

(MP) $$\frac{X \qquad (X \to Y)}{Y}$$

(SUB) $$\frac{\alpha}{\alpha\frac{\beta_1,\ldots,\beta_n}{X_1,\ldots,X_n}}$$ $X_1, \ldots, X_n$ paarw. verschieden

MEREDITHs System: (MP), (SUB), (A).

(A) $$\frac{}{(((((X \to Y) \to (\neg Z \to \neg U)) \to Z) \to V) \to ((V \to X) \to (U \to X)))}$$

$$\frac{}{\top} \qquad \frac{}{\bot} \qquad \frac{}{X} \qquad \frac{\alpha}{\neg\alpha} \qquad \frac{\alpha, \beta}{(\alpha \wedge \beta)} \qquad \frac{\alpha, \beta}{(\alpha \vee \beta)} \qquad \frac{\alpha}{\forall X \alpha} \qquad \frac{\alpha}{\exists X \alpha}$$

$$\frac{}{\top} \qquad \frac{}{\bot} \qquad \frac{}{X} \qquad \frac{\alpha}{\neg\alpha} \qquad \frac{\alpha, \beta}{(\alpha \wedge \beta)} \qquad \frac{\alpha, \beta}{(\alpha \vee \beta)} \qquad \frac{\alpha}{\forall X \alpha} \qquad \frac{\alpha}{\exists X \alpha}$$

Satz über die eindeutige Zerlegbarkeit. Jeder Ausdruck $\alpha \in \mathrm{QAA}$ ist entweder ein Ausdruck der Gestalt

(1)	$\top$	oder	(2)	$\bot$	oder
(3)	X	oder	(4)	$\neg\beta$	oder
(5)	$(\beta \wedge \gamma)$	oder	(6)	$(\beta \vee \gamma)$	oder
(7)	$\forall X \beta$	oder	(8)	$\exists X \beta$	oder

Dabei sind eindeutig bestimmt

β in (4), $\quad$ β und γ in (5),(6) $\quad$ und $\quad$ X und β in (7),(8).

$b : \mathrm{AV} \to \{0,1\}$ totale Belegung, $X \in \mathrm{AV}$ und $b_0 \in \{0,1\}$.

$b : \mathrm{AV} \to \{0,1\}$ totale Belegung, $X \in \mathrm{AV}$ und $b_0 \in \{0,1\}$. Dann bezeichnet $b[X \to b_0]$ die totale Belebung mit

$$b[X \to b_0](Y) := \begin{cases} b_0 & \text{wenn } Y = X \\ b(Y) & \text{sonst} \end{cases}$$

$b : \mathrm{AV} \to \{0,1\}$ totale Belegung, $X \in \mathrm{AV}$ und $b_0 \in \{0,1\}$. Dann bezeichnet $b[X \to b_0]$ die totale Belebung mit

$$b[X \to b_0](Y) := \begin{cases} b_0 & \text{wenn } Y = X \\ b(Y) & \text{sonst} \end{cases}$$

Zusätzliche Festlegungen bei der Semantik:

$$b(\forall X \alpha) = 1 \quad \text{gdw} \quad \big(b[X \to 1](\alpha) = 1 \text{ und } b[X \to 0](\alpha) = 1\big)$$

$b : \mathrm{AV} \longrightarrow \{0,1\}$ totale Belegung, $X \in \mathrm{AV}$ und $b_0 \in \{0,1\}$. Dann bezeichnet $b[X \longrightarrow b_0]$ die totale Belebung mit

$$b[X \longrightarrow b_0](Y) := \begin{cases} b_0 & \text{wenn } Y = X \\ b(Y) & \text{sonst} \end{cases}$$

Zusätzliche Festlegungen bei der Semantik:

$$b(\forall X \alpha) = 1 \quad \text{gdw} \quad \big(b[X \rightarrow 1](\alpha) = 1 \text{ und } b[X \rightarrow 0](\alpha) = 1\big)$$

$$b(\exists X \alpha) = 1 \quad \text{gdw} \quad \big(b[X \rightarrow 1](\alpha) = 1 \text{ oder } b[X \rightarrow 0](\alpha) = 1\big)$$

Für $\alpha \in \mathrm{QAA}$ sei $\mathrm{fr}(\alpha)$, die Menge der in α frei vorkommenden Variablen, durch Induktion über α definiert:

Für $\alpha \in \mathrm{QAA}$ sei fr(α), die Menge der in α frei vorkommenden Variablen, durch Induktion über α definiert:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{fr}(\top) = \emptyset; & \mathrm{fr}(\bot) = \emptyset; \\ \mathrm{fr}(X) = \{X\}; & \mathrm{fr}(\neg\alpha) = \mathrm{fr}(\alpha); \\ \mathrm{fr}((\alpha \wedge \beta)) = \mathrm{fr}(\alpha) \cup \mathrm{fr}(\beta); & \mathrm{fr}((\alpha \vee \beta)) = \mathrm{fr}(\alpha) \cup \mathrm{fr}(\beta); \\ \mathrm{fr}(\forall X\alpha) = \mathrm{fr}(\alpha) \setminus \{X\}; & \mathrm{fr}(\exists X\alpha) = \mathrm{fr}(\alpha) \setminus \{X\}. \end{array}$$

Für $\alpha \in \mathrm{QAA}$ sei $\mathrm{fr}(\alpha)$, die Menge der in α frei vorkommenden Variablen, durch Induktion über α definiert:

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{fr}(\top) = \emptyset; & \mathrm{fr}(\bot) = \emptyset; \\
\mathrm{fr}(X) = \{X\}; & \mathrm{fr}(\neg\alpha) = \mathrm{fr}(\alpha); \\
\mathrm{fr}((\alpha \wedge \beta)) = \mathrm{fr}(\alpha) \cup \mathrm{fr}(\beta); & \mathrm{fr}((\alpha \vee \beta)) = \mathrm{fr}(\alpha) \cup \mathrm{fr}(\beta); \\
\mathrm{fr}(\forall X \alpha) = \mathrm{fr}(\alpha) \setminus \{X\}; & \mathrm{fr}(\exists X \alpha) = \mathrm{fr}(\alpha) \setminus \{X\}.
\end{array}
$$

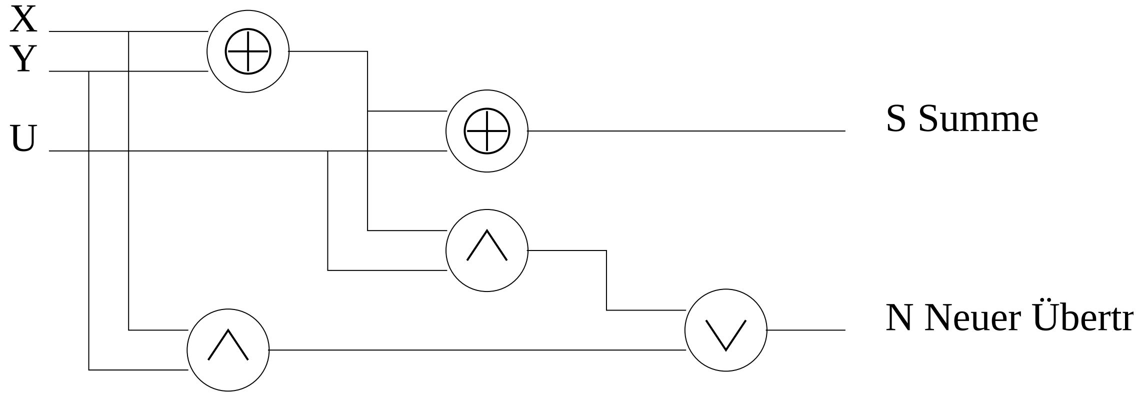
$$
\begin{aligned}
\mathrm{fr}((\exists X (X \wedge Z) \wedge \forall Y (\neg Y \vee X))) &= \mathrm{fr}(\exists X (X \wedge Z)) \cup \mathrm{fr}(\forall Y (\neg Y \vee X)) \\
&= \Big(\mathrm{fr}((X \wedge Z)) \setminus \{X\}\Big) \cup \Big(\mathrm{fr}((\neg Y \vee X)) \setminus \{Y\}\Big) \\
&= \Big(\{X, Z\} \setminus \{X\}\Big) \cup \Big(\{Y, X\} \setminus \{Y\}\Big) \\
&= \{Z, X\}.
\end{aligned}
$$

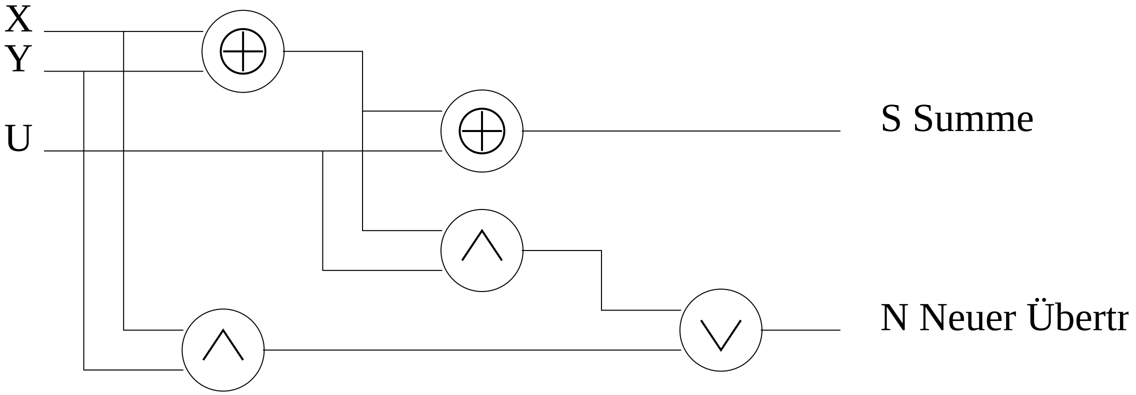
Koinzidenzlemma. Ist $\alpha \in \mathrm{QAA}$ und sind b, b' totale Belegungen mit

$$b \restriction \mathrm{fr}(\alpha) = b' \restriction \mathrm{fr}(\alpha) \qquad \text{(d.h. } b(X) = b'(X) \text{ für alle } X \in \mathrm{fr}(\alpha)),$$

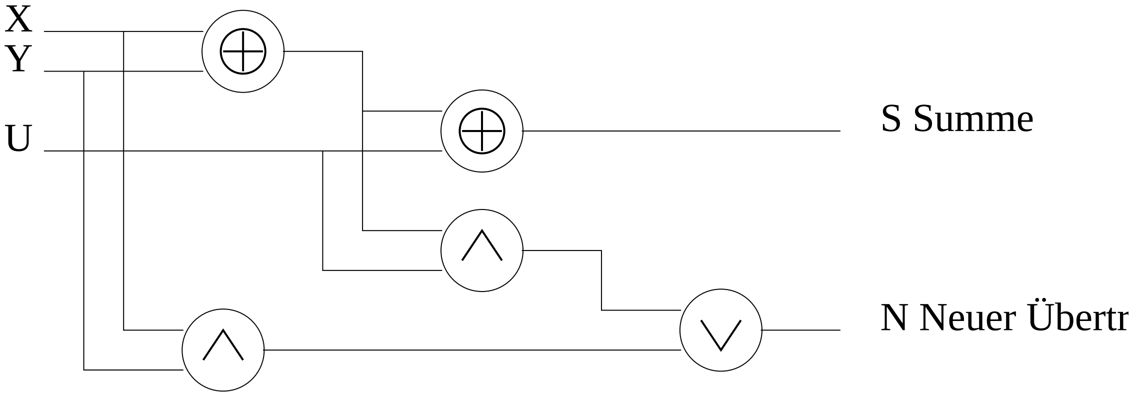
so

$$b(\alpha) = b'(\alpha).$$


X
Y
U
S Summe
N Neuer Übertr



Beschreibung der Schaltung: $\alpha_S := ((X \oplus Y) \oplus U)$,



Beschreibung der Schaltung: $\alpha_S := ((X \oplus Y) \oplus U), \quad \alpha_N := ((X \oplus Y) \wedge U) \vee (X \wedge Y))$

Sei $\mathfrak{R}$ eine zweistellige Relation auf A.

Sei $\mathfrak{R}$ eine zweistellige Relation auf A.

$\mathfrak{R}$ ist reflexiv, wenn für alle $a \in A$ gilt:

$$\mathfrak{R}aa.$$

Sei $\mathfrak{R}$ eine zweistellige Relation auf A.

$\mathfrak{R}$ ist reflexiv, wenn für alle $a \in A$ gilt:

$$\mathfrak{R}aa.$$

$\mathfrak{R}$ ist irreflexiv, wenn für alle $a \in A$ gilt:

$$\text{nicht } \mathfrak{R}aa.$$

Sei $\mathfrak{R}$ eine zweistellige Relation auf A.

$\mathfrak{R}$ ist reflexiv, wenn für alle $a \in A$ gilt:

$$\mathfrak{R}aa.$$

$\mathfrak{R}$ ist irreflexiv, wenn für alle $a \in A$ gilt:

$$\text{nicht } \mathfrak{R}aa.$$

$\mathfrak{R}$ ist symmetrisch, wenn für alle $a, b \in A$ gilt:

$$\text{wenn } \mathfrak{R}ab, \text{so } \mathfrak{R}ba.$$

Sei $\mathfrak{R}$ eine zweistellige Relation auf A.

$\mathfrak{R}$ ist reflexiv, wenn für alle $a \in A$ gilt:

$$\mathfrak{R}aa.$$

$\mathfrak{R}$ ist irreflexiv, wenn für alle $a \in A$ gilt:

$$\text{nicht } \mathfrak{R}aa.$$

$\mathfrak{R}$ ist symmetrisch, wenn für alle $a, b \in A$ gilt:

$$\text{wenn } \mathfrak{R}ab, \text{so } \mathfrak{R}ba.$$

$\mathfrak{R}$ ist konnex, wenn für alle $a, b \in A$ gilt:

$$\mathfrak{R}ab \text{ oder } \mathfrak{R}ba.$$

Sei $\mathfrak{R}$ eine zweistellige Relation auf A.

$\mathfrak{R}$ ist reflexiv, wenn für alle $a \in A$ gilt:

$$\mathfrak{R}aa.$$

$\mathfrak{R}$ ist irreflexiv, wenn für alle $a \in A$ gilt:

$$\text{nicht } \mathfrak{R}aa.$$

$\mathfrak{R}$ ist symmetrisch, wenn für alle $a, b \in A$ gilt:

$$\text{wenn } \mathfrak{R}ab, \text{so } \mathfrak{R}ba.$$

$\mathfrak{R}$ ist konnex, wenn für alle $a, b \in A$ gilt:

$$\mathfrak{R}ab \text{ oder } \mathfrak{R}ba.$$

$\mathfrak{R}$ ist transitiv, wenn für alle $a, b, c \in A$ gilt:

$$\text{wenn } \mathfrak{R}ab \text{ und } \mathfrak{R}bc, \text{ so } \mathfrak{R}ac.$$

Sei S eine Symbolmenge. Eine S-Struktur ist ein Paar

$$\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{a})$$

bestehend aus

Sei S eine Symbolmenge. Eine S-Struktur ist ein Paar

$$\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{a})$$

bestehend aus

- einer nicht leeren Menge A, dem Träger, (Grundbereich, Universum) von $\mathfrak{A}$;

Sei S eine Symbolmenge. Eine S-Struktur ist ein Paar

$$\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{a})$$

bestehend aus

- einer nicht leeren Menge A, dem Träger, (Grundbereich, Universum) von $\mathfrak{A}$;
- einer auf S definierten Abbildung $\mathfrak{a}$, die
  - für alle $n \geq 1$ jedem n-stelligen Relationssymbol $R \in S$ eine n-stellige Relation $\mathfrak{a}(R) \subseteq A^n$ zuordnet;
  - für alle $n \geq 1$ jedem n-stelligen Funktionssymbol $f \in S$ eine n-stellige Funktion $\mathfrak{a}(f) : A^n \rightarrow A$ zuordnet;
  - jedem Konstantensymbol $c \in S$ ein Element $\mathfrak{a}(c) \in A$ zuordnet.

Digraphen und Graphen.

Digraphen und Graphen.

Sei $S = \{E\}$.

Digraphen und Graphen.

Sei $S = \{E\}$.

Digraphen “sind” S-Strukturen (G, E^G).

G ist die Menge der Punkte und E^G die Menge der (gerichteten) Kanten.

Digraphen und Graphen.

Sei $S = \{E\}$.

Digraphen "sind" S-Strukturen (G, E^G).

G ist die Menge der Punkte und E^G die Menge der (gerichteten) Kanten.

Graphen "sind" S-Strukturen

$$(G, E^G)$$

mit symmetrischem und irreflexivem E^G.

Alphabet Σ_S der Sprache der ersten Stufe zur Symbolmenge S:

Alphabet Σ_S der Sprache der ersten Stufe zur Symbolmenge S:

(a) Variable: v_1, v_2,... x, y, z

Alphabet Σ_S der Sprache der ersten Stufe zur Symbolmenge S:

(a) Variable: v_1, v_2,... x, y, z

(b) Junktoren: $\neg$, $\wedge$, $\vee$

Alphabet Σ_S der Sprache der ersten Stufe zur Symbolmenge S:

(a) Variable: v_1, v_2,... x, y, z

(b) Junktoren: $\neg$, $\wedge$, $\vee$

(c) Quantoren: $\forall$, $\exists$

Alphabet Σ_S der Sprache der ersten Stufe zur Symbolmenge S:

(a) Variable: v_1, v_2,... x, y, z

(b) Junktoren: $\neg$, $\wedge$, $\vee$

(c) Quantoren: $\forall$, $\exists$

(d) Gleichheitszeichen: $=$

Alphabet Σ_S der Sprache der ersten Stufe zur Symbolmenge S:

(a) Variable: v_1, v_2,... x, y, z

(b) Junktoren: $\neg$, $\wedge$, $\vee$

(c) Quantoren: $\forall$, $\exists$

(d) Gleichheitszeichen: $=$

(e) Hilfszeichen:), (, ,

Alphabet Σ_S der Sprache der ersten Stufe zur Symbolmenge S:

(a) Variable: v_1, v_2,... x, y, z

(b) Junktoren: $\neg$, $\wedge$, $\vee$

(c) Quantoren: $\forall$, $\exists$

(d) Gleichheitszeichen: $=$

(e) Hilfszeichen:), (, ,

(f) die Symbole in S.

Alphabet Σ_S der Sprache der ersten Stufe zur Symbolmenge S:

(a) Variable: v_1, v_2,... x, y, z

(b) Junktoren: $\neg$, $\wedge$, $\vee$

(c) Quantoren: $\forall$, $\exists$

(d) Gleichheitszeichen: $=$

(e) Hilfszeichen:), (, ,

(f) die Symbole in S.

Somit

$$\Sigma_S = \Sigma_0 \cup S,$$

wobei Σ_0 die Menge der in (a) bis (e) vorkommenden Symbole bezeichnet.

Alphabet Σ_S der Sprache der ersten Stufe zur Symbolmenge S:

(a) Variable: v_1, v_2,... x, y, z

(b) Junktoren: $\neg$, $\wedge$, $\vee$

(c) Quantoren: $\forall$, $\exists$

(d) Gleichheitszeichen: $=$

(e) Hilfszeichen: $)$, $($, $,$

(f) die Symbole in S.

Somit

$$\Sigma_S = \Sigma_0 \cup S,$$

wobei Σ_0 die Menge der in (a) bis (e) vorkommenden Symbole bezeichnet.

$$V := \{v_1, v_2, \ldots\}$$

ist die Menge der Variable.

Definition. Sei S eine Symbolmenge. S-Terme oder kurz Terme sind die Zeichenreihen über Σ_S, die im folgenden Kalkül ableitbar sind:

Definition. Sei S eine Symbolmenge. S-Terme oder kurz Terme sind die Zeichenreihen über Σ_S, die im folgenden Kalkül ableitbar sind:

(T1) $\dfrac{}{x}$ (T2) $\dfrac{}{c}\ c \in S$ (T3) $\dfrac{t_1, \ldots, t_n}{f(t_1, \ldots, t_n)}\ f \in S$ n-st.

Definition. Sei S eine Symbolmenge. S-Terme oder kurz Terme sind die Zeichenreihen über Σ_S, die im folgenden Kalkül ableitbar sind:

$$\text{(T1)}\ \frac{}{x} \qquad \text{(T2)}\ \frac{}{c}\ c \in S \qquad \text{(T3)}\ \frac{t_1, \ldots, t_n}{f(t_1, \ldots, t_n)}\ f \in S\ n\text{-st.}$$

T^S = Menge der S-Terme.

Definition. Sei S eine Symbolmenge. S-Terme oder kurz Terme sind die Zeichenreihen über Σ_S, die im folgenden Kalkül ableitbar sind:

(T1) $\dfrac{}{x}$ (T2) $\dfrac{}{c}\ c \in S$ (T3) $\dfrac{t_1, \ldots, t_n}{f(t_1, \ldots, t_n)}\ f \in S$ n-st.

T^S = Menge der S-Terme.

Beispiel. Für $S = \{f_6^1, f_1^3, c_1, c_4, c_9\}$ ist

$$f_1^3(c_4, f_1^3(v_7, v_7, c_1), f_6^1(c_4))$$

ein S-Term.

Ableitung:

1	c_1	(T2)
2	c_4	(T2)
3	v_7	(T1)
4	$f_6^1(c_4)$	(T3) auf 2
5	$f_1^3(v_7, v_7, c_1)$	(T3) auf 3,3,1
6	$f_1^3(c_4, f_1^3(v_7, v_7, c_1), f_6^1(c_4))$	(T3) auf 2,5,4

Eindeutige Zerlegbarkeit von Termen. Jeder S-Term ist entweder

Eindeutige Zerlegbarkeit von Termen. Jeder S-Term ist entweder

1. eine Variable oder

Eindeutige Zerlegbarkeit von Termen. Jeder S-Term ist entweder

1. eine Variable oder
2. eine Konstante in S oder

Eindeutige Zerlegbarkeit von Termen. Jeder S-Term ist entweder

1. eine Variable oder
2. eine Konstante in S oder
3. ein Term der Gestalt $f(t_1, \ldots, t_n)$ für ein n-stelliges $f \in S$ und $t_1, \ldots, t_n \in T^S$.

   Dabei sind f und $t_1, \ldots, t_n$ eindeutig bestimmt.

Eindeutige Zerlegbarkeit von Termen. Jeder S-Term ist entweder

1. eine Variable oder
2. eine Konstante in S oder
3. ein Term der Gestalt $f(t_1, \ldots, t_n)$ für ein n-stelliges $f \in S$ und $t_1, \ldots, t_n \in T^S$.

   Dabei sind f und $t_1, \ldots, t_n$ eindeutig bestimmt.

Lemma. (1) Für alle $t, t' \in T^S$:

$$t \text{ ist kein echtes Anfangsstück von } t'.$$

Eindeutige Zerlegbarkeit von Termen. Jeder S-Term ist entweder

1. eine Variable oder
2. eine Konstante in S oder
3. ein Term der Gestalt $f(t_1, \ldots, t_n)$ für ein n-stelliges $f \in S$ und $t_1, \ldots, t_n \in T^S$.

   Dabei sind f und $t_1, \ldots, t_n$ eindeutig bestimmt.

Lemma. (1) Für alle $t, t' \in T^S$:

$$t \text{ ist kein echtes Anfangsstück von } t'.$$

(2) An jeder Stelle in einem Term, an der kein Hilfssymbol steht, beginnt genau ein Term.

Eindeutige Zerlegbarkeit von Termen. Jeder S-Term ist entweder

1. eine Variable oder
2. eine Konstante in S oder
3. ein Term der Gestalt $f(t_1, \ldots, t_n)$ für ein n-stelliges $f \in S$ und $t_1, \ldots, t_n \in T^S$.

   Dabei sind f und $t_1, \ldots, t_n$ eindeutig bestimmt.

Lemma. (1) Für alle $t, t' \in T^S$:

$$t \text{ ist kein echtes Anfangsstück von } t'.$$

(2) An jeder Stelle in einem Term, an der kein Hilfssymbol steht, beginnt genau ein Term. Seien $t \in T^S$, $1 \leq i \leq |t|$ und $t = uav$ mit $u, v \in \Sigma_S^*$, $a \in \Sigma_S$, $|u| = i - 1$ und $a \neq ($, $a \neq)$, $a \neq ,$.

Eindeutige Zerlegbarkeit von Termen. Jeder S-Term ist entweder

1. eine Variable oder
2. eine Konstante in S oder
3. ein Term der Gestalt $f(t_1, \ldots, t_n)$ für ein n-stelliges $f \in S$ und $t_1, \ldots, t_n \in T^S$.

   Dabei sind f und $t_1, \ldots, t_n$ eindeutig bestimmt.

Lemma. (1) Für alle $t, t' \in T^S$:

$$t \text{ ist kein echtes Anfangsstück von } t'.$$

(2) An jeder Stelle in einem Term, an der kein Hilfssymbol steht, beginnt genau ein Term. Seien $t \in T^S$, $1 \leq i \leq |t|$ und $t = uav$ mit $u, v \in \Sigma_S^*$, $a \in \Sigma_S$, $|u| = i - 1$ und $a \neq ($, $a \neq)$, $a \neq ,$. Dann gibt es genau ein $t' \in T^S$ mit

$$t = ut'v' \text{ für ein geeignetes } v' \in \Sigma_S^*.$$

Definition. (1) Sei $\mathfrak{A}$ eine S-Struktur. Eine Belegung β in $\mathfrak{A}$ (in A) ist eine Abbildung $\beta : V \to A$.

Definition. (1) Sei $\mathfrak{A}$ eine S-Struktur. Eine Belegung β in $\mathfrak{A}$ (in A) ist eine Abbildung $\beta : V \to A$.

(2) Eine S-Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ besteht aus einer S-Struktur $\mathfrak{A}$ und einer Belegung β in $\mathfrak{A}$.

Definition. (1) Sei $\mathfrak{A}$ eine S-Struktur. Eine Belegung β in $\mathfrak{A}$ (in A) ist eine Abbildung $\beta : V \to A$.

(2) Eine S-Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ besteht aus einer S-Struktur $\mathfrak{A}$ und einer Belegung β in $\mathfrak{A}$.

Definition. Sei $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ eine S-Interpretation. Induktiv über den Aufbau der S-Terme definiert man den Wert $\mathfrak{I}(t)$ des Terms t bei $\mathfrak{I}$. Dabei ist $\mathfrak{I}(t) \in A$.

Definition. (1) Sei $\mathfrak{A}$ eine S-Struktur. Eine Belegung β in $\mathfrak{A}$ (in A) ist eine Abbildung $\beta : V \to A$.

(2) Eine S-Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ besteht aus einer S-Struktur $\mathfrak{A}$ und einer Belegung β in $\mathfrak{A}$.

Definition. Sei $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ eine S-Interpretation. Induktiv über den Aufbau der S-Terme definiert man den Wert $\mathfrak{I}(t)$ des Terms t bei $\mathfrak{I}$. Dabei ist $\mathfrak{I}(t) \in A$.

zu (T1): $\mathfrak{I}(x) := \beta(x)$;

Definition. (1) Sei $\mathfrak{A}$ eine S-Struktur. Eine Belegung β in $\mathfrak{A}$ (in A) ist eine Abbildung $\beta : V \to A$.

(2) Eine S-Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ besteht aus einer S-Struktur $\mathfrak{A}$ und einer Belegung β in $\mathfrak{A}$.

Definition. Sei $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ eine S-Interpretation. Induktiv über den Aufbau der S-Terme definiert man den Wert $\mathfrak{I}(t)$ des Terms t bei $\mathfrak{I}$. Dabei ist $\mathfrak{I}(t) \in A$.

zu (T1): $\mathfrak{I}(x) := \beta(x)$;

zu (T2): $\mathfrak{I}(c) := c^{\mathfrak{A}}$;

Definition. (1) Sei $\mathfrak{A}$ eine S-Struktur. Eine Belegung β in $\mathfrak{A}$ (in A) ist eine Abbildung $\beta : V \to A$.

(2) Eine S-Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ besteht aus einer S-Struktur $\mathfrak{A}$ und einer Belegung β in $\mathfrak{A}$.

Definition. Sei $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ eine S-Interpretation. Induktiv über den Aufbau der S-Terme definiert man den Wert $\mathfrak{I}(t)$ des Terms t bei $\mathfrak{I}$. Dabei ist $\mathfrak{I}(t) \in A$.

zu (T1): $\mathfrak{I}(x) := \beta(x);$

zu (T2): $\mathfrak{I}(c) := c^{\mathfrak{A}};$

zu (T3): $\mathfrak{I}(f(t_1, \ldots, t_n)) := f^{\mathfrak{A}}(\mathfrak{I}(t_1), \ldots, \mathfrak{I}(t_n)).$

Definition. S-Ausdrücke oder S-Formeln der Sprache der ersten Stufe sind die Zeichenreihen über Σ_S^*, die man im folgenden Kalkül herleiten kann:

Definition. S-Ausdrücke oder S-Formeln der Sprache der ersten Stufe sind die Zeichenreihen über Σ_S^*, die man im folgenden Kalkül herleiten kann:

(A1) Sind $t_1, t_2 \in T^S$, so ist $t_1 = t_2$ ein S-Ausdruck.

Definition. S-Ausdrücke oder S-Formeln der Sprache der ersten Stufe sind die Zeichenreihen über Σ_S^*, die man im folgenden Kalkül herleiten kann:

(A1) Sind $t_1, t_2 \in T^S$, so ist $t_1 = t_2$ ein S-Ausdruck.

(A2) Ist $R \in S$ ein r-stelliges R-Symbol und sind $t_1, \ldots, t_r \in T^S$, so ist $Rt_1 \ldots t_r$ ein S-Ausdruck.

Definition. S-Ausdrücke oder S-Formeln der Sprache der ersten Stufe sind die Zeichenreihen über Σ_S^*, die man im folgenden Kalkül herleiten kann:

(A1) Sind $t_1, t_2 \in T^S$, so ist $t_1 = t_2$ ein S-Ausdruck.

(A2) Ist $R \in S$ ein r-stelliges R-Symbol und sind $t_1, \ldots, t_r \in T^S$, so ist $Rt_1 \ldots t_r$ ein S-Ausdruck.

(A3) Ist φ ein S-Ausdruck, so auch $\neg\varphi$.

Definition. S-Ausdrücke oder S-Formeln der Sprache der ersten Stufe sind die Zeichenreihen über Σ_S^*, die man im folgenden Kalkül herleiten kann:

(A1) Sind $t_1, t_2 \in T^S$, so ist $t_1 = t_2$ ein S-Ausdruck.

(A2) Ist $R \in S$ ein r-stelliges R-Symbol und sind $t_1, \ldots, t_r \in T^S$, so ist $Rt_1 \ldots t_r$ ein S-Ausdruck.

(A3) Ist φ ein S-Ausdruck, so auch $\neg\varphi$.

(A4) Sind φ und ψ beide S-Ausdrücke, so auch $(\varphi \wedge \psi)$.

Definition. S-Ausdrücke oder S-Formeln der Sprache der ersten Stufe sind die Zeichenreihen über Σ_S^*, die man im folgenden Kalkül herleiten kann:

(A1) Sind $t_1, t_2 \in T^S$, so ist $t_1 = t_2$ ein S-Ausdruck.

(A2) Ist $R \in S$ ein r-stelliges R-Symbol und sind $t_1, \ldots, t_r \in T^S$, so ist $Rt_1 \ldots t_r$ ein S-Ausdruck.

(A3) Ist φ ein S-Ausdruck, so auch $\neg\varphi$.

(A4) Sind φ und ψ beide S-Ausdrücke, so auch $(\varphi \wedge \psi)$.

(A5) Sind φ und ψ beide S-Ausdrücke, so auch $(\varphi \vee \psi)$.

Definition. S-Ausdrücke oder S-Formeln der Sprache der ersten Stufe sind die Zeichenreihen über Σ_S^*, die man im folgenden Kalkül herleiten kann:

(A1) Sind $t_1, t_2 \in T^S$, so ist $t_1 = t_2$ ein S-Ausdruck.

(A2) Ist $R \in S$ ein r-stelliges R-Symbol und sind $t_1, \ldots, t_r \in T^S$, so ist $Rt_1 \ldots t_r$ ein S-Ausdruck.

(A3) Ist φ ein S-Ausdruck, so auch $\neg\varphi$.

(A4) Sind φ und ψ beide S-Ausdrücke, so auch $(\varphi \wedge \psi)$.

(A5) Sind φ und ψ beide S-Ausdrücke, so auch $(\varphi \vee \psi)$.

(A6) Ist φ ein S-Ausdruck und x eine Variable, so ist $\forall x\varphi$ ein S-Ausdruck.

Definition. S-Ausdrücke oder S-Formeln der Sprache der ersten Stufe sind die Zeichenreihen über Σ_S^*, die man im folgenden Kalkül herleiten kann:

(A1) Sind $t_1, t_2 \in T^S$, so ist $t_1 = t_2$ ein S-Ausdruck.

(A2) Ist $R \in S$ ein r-stelliges R-Symbol und sind $t_1, \ldots, t_r \in T^S$, so ist $Rt_1 \ldots t_r$ ein S-Ausdruck.

(A3) Ist φ ein S-Ausdruck, so auch $\neg\varphi$.

(A4) Sind φ und ψ beide S-Ausdrücke, so auch $(\varphi \wedge \psi)$.

(A5) Sind φ und ψ beide S-Ausdrücke, so auch $(\varphi \vee \psi)$.

(A6) Ist φ ein S-Ausdruck und x eine Variable, so ist $\forall x\varphi$ ein S-Ausdruck.

(A7) Ist φ ein S-Ausdruck und x eine Variable, so ist $\exists x\varphi$ ein S-Ausdruck.

Definition. **S-Ausdrücke** oder **S-Formeln** der Sprache der ersten Stufe sind die Zeichenreihen über Σ_S^*, die man im folgenden Kalkül herleiten kann:

(A1) Sind $t_1, t_2 \in T^S$, so ist $t_1 = t_2$ ein S-Ausdruck.

(A2) Ist $R \in S$ ein r-stelliges R-Symbol und sind $t_1, \ldots, t_r \in T^S$, so ist $Rt_1 \ldots t_r$ ein S-Ausdruck.

(A3) Ist φ ein S-Ausdruck, so auch $\neg\varphi$.

(A4) Sind φ und ψ beide S-Ausdrücke, so auch $(\varphi \wedge \psi)$.

(A5) Sind φ und ψ beide S-Ausdrücke, so auch $(\varphi \vee \psi)$.

(A6) Ist φ ein S-Ausdruck und x eine Variable, so ist $\forall x\varphi$ ein S-Ausdruck.

(A7) Ist φ ein S-Ausdruck und x eine Variable, so ist $\exists x\varphi$ ein S-Ausdruck.

L^S Menge der S-Ausdrücke.

(A1) $\dfrac{}{t_1 = t_2}$ $t_1, t_2 \in T^S$ (A2) $\dfrac{}{Rt_1 \ldots t_r}$ $R \in S$ r-stellig, $t_1, \ldots, t_r \in T^S$

(A3) $\dfrac{\varphi}{\neg\varphi}$ (A4) $\dfrac{\varphi, \psi}{(\varphi \wedge \psi)}$ (A5) $\dfrac{\varphi, \psi}{(\varphi \vee \psi)}$

(A6) $\dfrac{\varphi}{\forall x \varphi}$ (A7) $\dfrac{\varphi}{\exists x \varphi}$

(A1) $\dfrac{}{t_1 = t_2}$ $t_1, t_2 \in T^S$ (A2) $\dfrac{}{Rt_1 \dots t_r}$ $R \in S$ r-stellig, $t_1, \dots, t_r \in T^S$

(A3) $\dfrac{\varphi}{\neg\varphi}$ (A4) $\dfrac{\varphi, \psi}{(\varphi \wedge \psi)}$ (A5) $\dfrac{\varphi, \psi}{(\varphi \vee \psi)}$

(A6) $\dfrac{\varphi}{\forall x \varphi}$ (A7) $\dfrac{\varphi}{\exists x \varphi}$

Beispiel. Für $S := \{\underset{2}{E}, \underset{1}{f}\}$ ist $\forall v_1 \exists v_5 (Ev_1 f(v_5) \vee Ev_5 v_5)$ ein S-Ausdruck.

(A1) $\dfrac{}{t_1 = t_2}$ $t_1, t_2 \in T^S$ (A2) $\dfrac{}{Rt_1 \ldots t_r}$ $R \in S$ r-stellig, $t_1, \ldots, t_r \in T^S$

(A3) $\dfrac{\varphi}{\neg\varphi}$ (A4) $\dfrac{\varphi, \psi}{(\varphi \wedge \psi)}$ (A5) $\dfrac{\varphi, \psi}{(\varphi \vee \psi)}$

(A6) $\dfrac{\varphi}{\forall x \varphi}$ (A7) $\dfrac{\varphi}{\exists x \varphi}$

Beispiel. Für $S := \{\underset{2}{E}, \underset{1}{f}\}$ ist $\forall v_1 \exists v_5 (Ev_1 f(v_5) \vee Ev_5 v_5)$ ein S-Ausdruck.

1	$Ev_1 f(v_5)$	(A2)
2	$Ev_5 v_5$	(A2)
3	$(Ev_1 f(v_5) \vee Ev_5 v_5)$	(A5) auf 1, 2
4	$\exists v_5 (Ev_1 f(v_5) \vee Ev_5 v_5)$	(A7) auf 3
5	$\forall v_1 \exists v_5 (Ev_1 f(v_5) \vee Ev_5 v_5)$	(A6) auf 4

Eindeutige Zerlegbarkeit von Ausdücken. Jeder S-Ausdruck ist entweder ein Ausdruck der Gestalt

(1)	$t_1 = t_2$	oder	(2)	$Rt_1 \ldots t_r$	oder
(3)	$\neg\varphi$	oder	(4)	$(\varphi \wedge \psi)$	oder
(5)	$(\varphi \vee \psi)$	oder	(6)	$\forall x \varphi$	oder
(7)	$\exists x \varphi$.				

Eindeutige Zerlegbarkeit von Ausdücken. Jeder S-Ausdruck ist entweder ein Ausdruck der Gestalt

(1)	$t_1 = t_2$	oder	(2)	$Rt_1 \ldots t_r$	oder
(3)	$\neg\varphi$	oder	(4)	$(\varphi \wedge \psi)$	oder
(5)	$(\varphi \vee \psi)$	oder	(6)	$\forall x \varphi$	oder
(7)	$\exists x \varphi$.				

Dabei sind eindeutig bestimmt:

$t_1, t_2 \in T^S$ in (1), $R \in S$ und $t_1, \ldots, t_r \in T^S$ in (2),

φ in (3), φ und ψ in (4), (5), x und φ in (6) und (7).

Eindeutige Zerlegbarkeit von Ausdücken. Jeder S-Ausdruck ist entweder ein Ausdruck der Gestalt

(1)	$t_1 = t_2$	oder	(2)	$Rt_1 \ldots t_r$	oder
(3)	$\neg\varphi$	oder	(4)	$(\varphi \wedge \psi)$	oder
(5)	$(\varphi \vee \psi)$	oder	(6)	$\forall x\varphi$	oder
(7)	$\exists x\varphi$.				

Dabei sind eindeutig bestimmt:

$t_1, t_2 \in T^S$ in (1), $R \in S$ und $t_1, \ldots, t_r \in T^S$ in (2),

φ in (3), φ und ψ in (4), (5), x und φ in (6) und (7).

Ausdrücke der Gestalt (1) und der Gestalt (2) sind atomare S-Ausdrücke.

Für $t \in T^S$ oder $\varphi \in L^S$ sei $\mathrm{var}(t)$ bzw. $\mathrm{var}(\varphi)$ die Menge der in t bzw. φ vorkommenden Variablen.

Für $t \in T^S$ oder $\varphi \in L^S$ sei $\mathrm{var}(t)$ bzw. $\mathrm{var}(\varphi)$ die Menge der in t bzw. φ vorkommenden Variablen.

Definition. Die Menge $\mathrm{fr}(\varphi)$ der in φ frei vorkommenden Variablen wird durch Induktion über dem Ausdruckskalkül definiert:

Für $t \in T^S$ oder $\varphi \in L^S$ sei $\mathrm{var}(t)$ bzw. $\mathrm{var}(\varphi)$ die Menge der in t bzw. φ vorkommenden Variablen.

Definition. Die Menge $\mathrm{fr}(\varphi)$ der in φ frei vorkommenden Variablen wird durch Induktion über dem Ausdruckskalkül definiert:

(zu (A1) und (A2)): $\quad \mathrm{fr}(\varphi) = \mathrm{var}(\varphi)$, falls φ atomar

Für $t \in T^S$ oder $\varphi \in L^S$ sei $\mathrm{var}(t)$ bzw. $\mathrm{var}(\varphi)$ die Menge der in t bzw. φ vorkommenden Variablen.

Definition. Die Menge $\mathrm{fr}(\varphi)$ der in φ frei vorkommenden Variablen wird durch Induktion über dem Ausdruckskalkül definiert:

(zu (A1) und (A2)): $\mathrm{fr}(\varphi) = \mathrm{var}(\varphi)$, falls φ atomar

(zu (A3)): $\mathrm{fr}(\neg\varphi) = \mathrm{fr}(\varphi)$

Für $t \in T^S$ oder $\varphi \in L^S$ sei var(t) bzw. var(φ) die Menge der in t bzw. φ vorkommenden Variablen.

Definition. Die Menge fr(φ) der in φ frei vorkommenden Variablen wird durch Induktion über dem Ausdruckskalkül definiert:

(zu (A1) und (A2)): $\mathrm{fr}(\varphi) = \mathrm{var}(\varphi)$, falls φ atomar

(zu (A3)): $\mathrm{fr}(\neg\varphi) = \mathrm{fr}(\varphi)$

(zu (A4)): $\mathrm{fr}((\varphi \wedge \psi)) = \mathrm{fr}(\varphi) \cup \mathrm{fr}(\psi)$

Für $t \in T^S$ oder $\varphi \in L^S$ sei $\mathrm{var}(t)$ bzw. $\mathrm{var}(\varphi)$ die Menge der in t bzw. φ vorkommenden Variablen.

Definition. Die Menge $\mathrm{fr}(\varphi)$ der in φ frei vorkommenden Variablen wird durch Induktion über dem Ausdruckskalkül definiert:

(zu (A1) und (A2)): $\mathrm{fr}(\varphi) = \mathrm{var}(\varphi)$, falls φ atomar

(zu (A3)): $\mathrm{fr}(\neg\varphi) = \mathrm{fr}(\varphi)$

(zu (A4)): $\mathrm{fr}((\varphi \wedge \psi)) = \mathrm{fr}(\varphi) \cup \mathrm{fr}(\psi)$

(zu (A5)): $\mathrm{fr}((\varphi \vee \psi)) = \mathrm{fr}(\varphi) \cup \mathrm{fr}(\psi)$

Für $t \in T^S$ oder $\varphi \in L^S$ sei var(t) bzw. var(φ) die Menge der in t bzw. φ vorkommenden Variablen.

Definition. Die Menge fr(φ) der in φ frei vorkommenden Variablen wird durch Induktion über dem Ausdruckskalkül definiert:

(zu (A1) und (A2)): $\text{fr}(\varphi) = \text{var}(\varphi)$, falls φ atomar

(zu (A3)): $\text{fr}(\neg\varphi) = \text{fr}(\varphi)$

(zu (A4)): $\text{fr}((\varphi \wedge \psi)) = \text{fr}(\varphi) \cup \text{fr}(\psi)$

(zu (A5)): $\text{fr}((\varphi \vee \psi)) = \text{fr}(\varphi) \cup \text{fr}(\psi)$

(zu (A6)): $\text{fr}(\forall x \varphi) = \text{fr}(\varphi) \setminus \{x\}$

Für $t \in T^S$ oder $\varphi \in L^S$ sei var(t) bzw. var(φ) die Menge der in t bzw. φ vorkommenden Variablen.

Definition. Die Menge fr(φ) der in φ frei vorkommenden Variablen wird durch Induktion über dem Ausdruckskalkül definiert:

(zu (A1) und (A2)): $\mathrm{fr}(\varphi) = \mathrm{var}(\varphi)$, falls φ atomar

(zu (A3)): $\mathrm{fr}(\neg\varphi) = \mathrm{fr}(\varphi)$

(zu (A4)): $\mathrm{fr}((\varphi \wedge \psi)) = \mathrm{fr}(\varphi) \cup \mathrm{fr}(\psi)$

(zu (A5)): $\mathrm{fr}((\varphi \vee \psi)) = \mathrm{fr}(\varphi) \cup \mathrm{fr}(\psi)$

(zu (A6)): $\mathrm{fr}(\forall x\varphi) = \mathrm{fr}(\varphi) \setminus \{x\}$

(zu (A7)): $\mathrm{fr}(\exists x\varphi) = \mathrm{fr}(\varphi) \setminus \{x\}$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$\mathrm{fr}((\exists u Rxu \wedge \exists y \forall x (Ryx \vee Ryu)))$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$\mathrm{fr}((\exists u Rxu \land \exists y \forall x (Ryx \lor Ryu)))$$

$$\begin{aligned}
&= \quad \mathrm{fr}(\exists u Rxu) \cup \mathrm{fr}(\exists y \forall x (Ryx \lor Ryu)) \\
&= \\
&= \\
&= \\
&= \\
&= \\
&=
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{fr}((\exists u Rxu \land \exists y \forall x (Ryx \lor Ryu)))\\
&\quad = \quad \mathrm{fr}(\exists u Rxu) \cup \mathrm{fr}(\exists y \forall x (Ryx \lor Ryu))\\
&\quad = \quad (\mathrm{fr}(Rxu) \setminus \{u\}) \cup (\mathrm{fr}(\forall x (Ryx \lor Ryu)) \setminus \{y\})\\
&\quad =\\
&\quad =\\
&\quad =\\
&\quad =\\
&\quad =
\end{aligned}
$$

$$\mathrm{fr}((\exists u Rxu \wedge \exists y \forall x (Ryx \vee Ryu)))$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{fr}(\exists u Rxu) \cup \mathrm{fr}(\exists y \forall x (Ryx \vee Ryu)) \\
&= (\mathrm{fr}(Rxu) \setminus \{u\}) \cup (\mathrm{fr}(\forall x (Ryx \vee Ryu)) \setminus \{y\}) \\
&= (\{x, u\} \setminus \{u\}) \cup (\mathrm{fr}((Ryx \vee Ryu)) \setminus \{y, x\}) \\
&= \\
&= \\
&= \\
&=
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{fr}((\exists u Rxu \wedge \exists y \forall x (Ryx \vee Ryu))) \\
&= \quad \mathrm{fr}(\exists u Rxu) \cup \mathrm{fr}(\exists y \forall x (Ryx \vee Ryu)) \\
&= \quad (\mathrm{fr}(Rxu) \setminus \{u\}) \cup (\mathrm{fr}(\forall x (Ryx \vee Ryu)) \setminus \{y\}) \\
&= \quad (\{x, u\} \setminus \{u\}) \cup (\mathrm{fr}((Ryx \vee Ryu)) \setminus \{y, x\}) \\
&= \quad \{x\} \cup ((\mathrm{fr}(Ryx) \cup \mathrm{fr}(Ryu)) \setminus \{y, x\}) \\
&= \\
&= \\
&=
\end{aligned}
$$

$$\mathrm{fr}((\exists u Rxu \wedge \exists y \forall x (Ryx \vee Ryu)))$$

$$\begin{aligned}
&= \mathrm{fr}(\exists u Rxu) \cup \mathrm{fr}(\exists y \forall x (Ryx \vee Ryu)) \\
&= (\mathrm{fr}(Rxu) \setminus \{u\}) \cup (\mathrm{fr}(\forall x (Ryx \vee Ryu)) \setminus \{y\}) \\
&= (\{x, u\} \setminus \{u\}) \cup (\mathrm{fr}((Ryx \vee Ryu)) \setminus \{y, x\}) \\
&= \{x\} \cup ((\mathrm{fr}(Ryx) \cup \mathrm{fr}(Ryu)) \setminus \{y, x\}) \\
&= \{x\} \cup ((\{y, x\} \cup \{y, u\}) \setminus \{y, x\}) \\
&= \\
&=
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{fr}((\exists u Rxu \wedge \exists y \forall x (Ryx \vee Ryu))) \\
&\quad = \quad \mathrm{fr}(\exists u Rxu) \cup \mathrm{fr}(\exists y \forall x (Ryx \vee Ryu)) \\
&\quad = \quad (\mathrm{fr}(Rxu) \setminus \{u\}) \cup (\mathrm{fr}(\forall x (Ryx \vee Ryu)) \setminus \{y\}) \\
&\quad = \quad (\{x, u\} \setminus \{u\}) \cup (\mathrm{fr}((Ryx \vee Ryu)) \setminus \{y, x\}) \\
&\quad = \quad \{x\} \cup ((\mathrm{fr}(Ryx) \cup \mathrm{fr}(Ryu)) \setminus \{y, x\}) \\
&\quad = \quad \{x\} \cup ((\{y, x\} \cup \{y, u\}) \setminus \{y, x\}) \\
&\quad = \quad \{x\} \cup \{u\} \\
&\quad =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{fr}((\exists u Rxu \wedge \exists y \forall x (Ryx \vee Ryu))) \\
&\quad = \quad \mathrm{fr}(\exists u Rxu) \cup \mathrm{fr}(\exists y \forall x (Ryx \vee Ryu)) \\
&\quad = \quad (\mathrm{fr}(Rxu) \setminus \{u\}) \cup (\mathrm{fr}(\forall x (Ryx \vee Ryu)) \setminus \{y\}) \\
&\quad = \quad (\{x, u\} \setminus \{u\}) \cup (\mathrm{fr}((Ryx \vee Ryu)) \setminus \{y, x\}) \\
&\quad = \quad \{x\} \cup ((\mathrm{fr}(Ryx) \cup \mathrm{fr}(Ryu)) \setminus \{y, x\}) \\
&\quad = \quad \{x\} \cup ((\{y, x\} \cup \{y, u\}) \setminus \{y, x\}) \\
&\quad = \quad \{x\} \cup \{u\} \\
&\quad = \quad \{x, u\}.
\end{aligned}
$$

Definition. S-Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$, $x_1, \ldots, x_m$ paarweise verschiedene Variable, $a_1, \ldots, a_m \in A$

Definition. S-Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$, $x_1, \ldots, x_m$ paarweise verschiedene Variable, $a_1, \ldots, a_m \in A$

$$\mathfrak{I}\frac{a_1 \ldots a_m}{x_1 \ldots x_m} := (\mathfrak{A}, \beta\frac{a_1 \ldots a_m}{x_1 \ldots x_m}),$$

Definition. S-Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$, $x_1, \ldots, x_m$ paarweise verschiedene Variable, $a_1, \ldots, a_m \in A$

$$\mathfrak{I}\frac{a_1 \ldots a_m}{x_1 \ldots x_m} := (\mathfrak{A}, \beta\frac{a_1 \ldots a_m}{x_1 \ldots x_m}),$$

wobei $\beta\frac{a_1 \ldots a_m}{x_1 \ldots x_m}$ die Belegung in $\mathfrak{A}$ ist mit

Definition. S-Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$, $x_1, \ldots, x_m$ paarweise verschiedene Variable, $a_1, \ldots, a_m \in A$

$$\mathfrak{I}\frac{a_1 \ldots a_m}{x_1 \ldots x_m} := (\mathfrak{A}, \beta\frac{a_1 \ldots a_m}{x_1 \ldots x_m}),$$

wobei $\beta\frac{a_1 \ldots a_m}{x_1 \ldots x_m}$ die Belegung in $\mathfrak{A}$ ist mit

$$\beta\frac{a_1 \ldots a_m}{x_1 \ldots x_m}(y) := \begin{cases} a_i & y = x_i \\ \beta(y) & y \neq x_1, \ldots, y \neq x_m \end{cases}$$

Definition. Induktiv über dem Ausdruckskalkül definieren wir für jeden S-Ausdruck φ und jede Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ den Wahrheitswert $\mathrm{WW}(\varphi, \mathfrak{I}) \in \{0, 1\}$.

Definition. Induktiv über dem Ausdruckskalkül definieren wir für jeden S-Ausdruck φ und jede Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ den Wahrheitswert $\mathrm{WW}(\varphi, \mathfrak{I}) \in \{0, 1\}$. Statt $\mathrm{WW}(\varphi, \mathfrak{I}) = 1$ sagen wir $\mathfrak{I}$ ist ein Modell von φ oder $\mathfrak{I}$ erfüllt φ oder φ gilt bei $\mathfrak{I}$

Definition. Induktiv über dem Ausdruckskalkül definieren wir für jeden S-Ausdruck φ und jede Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ den Wahrheitswert $\mathrm{WW}(\varphi, \mathfrak{I}) \in \{0, 1\}$. Statt $\mathrm{WW}(\varphi, \mathfrak{I}) = 1$ sagen wir $\mathfrak{I}$ ist ein Modell von φ oder $\mathfrak{I}$ erfüllt φ oder φ gilt bei $\mathfrak{I}$und schreiben $\mathfrak{I} \models \varphi$ oder auch $\mathfrak{A} \underset{\beta}{\models} \varphi$:

Definition. Induktiv über dem Ausdruckskalkül definieren wir für jeden S-Ausdruck φ und jede Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ den Wahrheitswert $\mathrm{WW}(\varphi, \mathfrak{I}) \in \{0, 1\}$. Statt $\mathrm{WW}(\varphi, \mathfrak{I}) = 1$ sagen wir $\mathfrak{I}$ ist ein Modell von φ oder $\mathfrak{I}$ erfüllt φ oder φ gilt bei $\mathfrak{I}$ und schreiben $\mathfrak{I} \models \varphi$ oder auch $\mathfrak{A} \underset{\beta}{\models} \varphi$:

(zu (A1)): $\mathfrak{I} \models t_1 = t_2$ gdw. $\mathfrak{I}(t_1) = \mathfrak{I}(t_2)$

Definition. Induktiv über dem Ausdruckskalkül definieren wir für jeden S-Ausdruck φ und jede Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ den Wahrheitswert $\mathrm{WW}(\varphi, \mathfrak{I}) \in \{0, 1\}$. Statt $\mathrm{WW}(\varphi, \mathfrak{I}) = 1$ sagen wir $\mathfrak{I}$ ist ein Modell von φ oder $\mathfrak{I}$ erfüllt φ oder φ gilt bei $\mathfrak{I}$ und schreiben $\mathfrak{I} \models \varphi$ oder auch $\mathfrak{A} \models_{\beta} \varphi$:

(zu (A1)): $\mathfrak{I} \models t_1 = t_2$ gdw. $\mathfrak{I}(t_1) = \mathfrak{I}(t_2)$

(zu (A2)): $\mathfrak{I} \models Rt_1 \ldots t_r$ gdw. $R^{\mathfrak{A}} \mathfrak{I}(t_1) \ldots \mathfrak{I}(t_n)$

Definition. Induktiv über dem Ausdruckskalkül definieren wir für jeden S-Ausdruck φ und jede Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ den Wahrheitswert $\mathrm{WW}(\varphi, \mathfrak{I}) \in \{0, 1\}$. Statt $\mathrm{WW}(\varphi, \mathfrak{I}) = 1$ sagen wir $\mathfrak{I}$ ist ein Modell von φ oder $\mathfrak{I}$ erfüllt φ oder φ gilt bei $\mathfrak{I}$ und schreiben $\mathfrak{I} \models \varphi$ oder auch $\mathfrak{A} \underset{\beta}{\models} \varphi$:

(zu (A1)): $\mathfrak{I} \models t_1 = t_2$ gdw. $\mathfrak{I}(t_1) = \mathfrak{I}(t_2)$

(zu (A2)): $\mathfrak{I} \models Rt_1 \ldots t_r$ gdw. $R^{\mathfrak{A}}\mathfrak{I}(t_1) \ldots \mathfrak{I}(t_n)$

(zu (A3)): $\mathfrak{I} \models \neg\varphi$ gdw. nicht $\mathfrak{I} \models \varphi$

Definition. Induktiv über dem Ausdruckskalkül definieren wir für jeden S-Ausdruck φ und jede Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ den Wahrheitswert $\mathrm{WW}(\varphi, \mathfrak{I}) \in \{0, 1\}$. Statt $\mathrm{WW}(\varphi, \mathfrak{I}) = 1$ sagen wir $\mathfrak{I}$ ist ein Modell von φ oder $\mathfrak{I}$ erfüllt φ oder φ gilt bei $\mathfrak{I}$und schreiben $\mathfrak{I} \models \varphi$ oder auch $\mathfrak{A} \underset{\beta}{\models} \varphi$:

(zu (A1)): $\mathfrak{I} \models t_1 = t_2$ gdw. $\mathfrak{I}(t_1) = \mathfrak{I}(t_2)$

(zu (A2)): $\mathfrak{I} \models Rt_1 \ldots t_r$ gdw. $R^{\mathfrak{A}}\mathfrak{I}(t_1) \ldots \mathfrak{I}(t_n)$

(zu (A3)): $\mathfrak{I} \models \neg\varphi$ gdw. nicht $\mathfrak{I} \models \varphi$

$$\mathrm{WW}(\neg\varphi, \mathfrak{I}) = \dot{\neg}(\mathrm{WW}(\varphi, \mathfrak{I}))$$

Definition. Induktiv über dem Ausdruckskalkül definieren wir für jeden S-Ausdruck φ und jede Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ den Wahrheitswert $\mathrm{WW}(\varphi, \mathfrak{I}) \in \{0, 1\}$. Statt $\mathrm{WW}(\varphi, \mathfrak{I}) = 1$ sagen wir $\mathfrak{I}$ ist ein Modell von φ oder $\mathfrak{I}$ erfüllt φ oder φ gilt bei $\mathfrak{I}$ und schreiben $\mathfrak{I} \models \varphi$ oder auch $\mathfrak{A} \models_{\beta} \varphi$:

(zu (A1)): $\mathfrak{I} \models t_1 = t_2$ gdw. $\mathfrak{I}(t_1) = \mathfrak{I}(t_2)$

(zu (A2)): $\mathfrak{I} \models Rt_1 \ldots t_r$ gdw. $R^{\mathfrak{A}}\mathfrak{I}(t_1) \ldots \mathfrak{I}(t_n)$

(zu (A3)): $\mathfrak{I} \models \neg\varphi$ gdw. nicht $\mathfrak{I} \models \varphi$

$$\mathrm{WW}(\neg\varphi, \mathfrak{I}) = \dot{\neg}(\mathrm{WW}(\varphi, \mathfrak{I}))$$

(zu (A4)): $\mathfrak{I} \models (\varphi \wedge \psi)$ gdw. $(\mathfrak{I} \models \varphi$ und $\mathfrak{I} \models \psi)$

(zu (A5)): $\mathfrak{I} \models (\varphi \vee \psi)$ gdw. $(\mathfrak{I} \models \varphi$ oder $\mathfrak{I} \models \psi)$

Definition. Induktiv über dem Ausdruckskalkül definieren wir für jeden S-Ausdruck φ und jede Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ den Wahrheitswert $\mathrm{WW}(\varphi, \mathfrak{I}) \in \{0, 1\}$. Statt $\mathrm{WW}(\varphi, \mathfrak{I}) = 1$ sagen wir $\mathfrak{I}$ ist ein Modell von φ oder $\mathfrak{I}$ erfüllt φ oder φ gilt bei $\mathfrak{I}$und schreiben $\mathfrak{I} \models \varphi$ oder auch $\mathfrak{A} \underset{\beta}{\models} \varphi$:

(zu (A1)): $\mathfrak{I} \models t_1 = t_2$ gdw. $\mathfrak{I}(t_1) = \mathfrak{I}(t_2)$

(zu (A2)): $\mathfrak{I} \models Rt_1 \dots t_r$ gdw. $R^{\mathfrak{A}}\mathfrak{I}(t_1) \dots \mathfrak{I}(t_n)$

(zu (A3)): $\mathfrak{I} \models \neg\varphi$ gdw. nicht $\mathfrak{I} \models \varphi$

$$\mathrm{WW}(\neg\varphi, \mathfrak{I}) = \dot{\neg}(\mathrm{WW}(\varphi, \mathfrak{I}))$$

(zu (A4)): $\mathfrak{I} \models (\varphi \wedge \psi)$ gdw. ($\mathfrak{I} \models \varphi$ und $\mathfrak{I} \models \psi$)

(zu (A5)): $\mathfrak{I} \models (\varphi \vee \psi)$ gdw. ($\mathfrak{I} \models \varphi$ oder $\mathfrak{I} \models \psi$)

(zu (A6)): $\mathfrak{I} \models \forall x\ \varphi$ gdw. für alle $a \in A$: $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$

Definition. Induktiv über dem Ausdruckskalkül definieren wir für jeden S-Ausdruck φ und jede Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ den Wahrheitswert $\mathrm{WW}(\varphi, \mathfrak{I}) \in \{0, 1\}$. Statt $\mathrm{WW}(\varphi, \mathfrak{I}) = 1$ sagen wir $\mathfrak{I}$ ist ein Modell von φ oder $\mathfrak{I}$ erfüllt φ oder φ gilt bei $\mathfrak{I}$und schreiben $\mathfrak{I} \models \varphi$ oder auch $\mathfrak{A} \models_{\beta} \varphi$:

(zu (A1)): $\mathfrak{I} \models t_1 = t_2$ gdw. $\mathfrak{I}(t_1) = \mathfrak{I}(t_2)$

(zu (A2)): $\mathfrak{I} \models Rt_1 \dots t_r$ gdw. $R^{\mathfrak{A}} \mathfrak{I}(t_1) \dots \mathfrak{I}(t_n)$

(zu (A3)): $\mathfrak{I} \models \neg\varphi$ gdw. nicht $\mathfrak{I} \models \varphi$

$$\mathrm{WW}(\neg\varphi, \mathfrak{I}) = \dot{\neg}(\mathrm{WW}(\varphi, \mathfrak{I}))$$

(zu (A4)): $\mathfrak{I} \models (\varphi \wedge \psi)$ gdw. $(\mathfrak{I} \models \varphi$ und $\mathfrak{I} \models \psi)$

(zu (A5)): $\mathfrak{I} \models (\varphi \vee \psi)$ gdw. $(\mathfrak{I} \models \varphi$ oder $\mathfrak{I} \models \psi)$

(zu (A6)): $\mathfrak{I} \models \forall x\, \varphi$ gdw. für alle $a \in A$: $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$

(zu (A7)): $\mathfrak{I} \models \exists x\, \varphi$ gdw. ex. $a \in A$: $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$

$$S = \{\underset{2}{g}\}, \quad \mathfrak{R} = (\mathbb{R}, \cdot), \quad \mathfrak{I} = (\mathfrak{R}, \beta) \text{ mit } \beta(v_n) = \begin{cases} n & n \text{ ungerade} \\ -n & \text{sonst} \end{cases}$$

$$S = \{\underset{2}{g}\}, \quad \mathfrak{R} = (\mathbb{R}, \cdot), \quad \mathfrak{I} = (\mathfrak{R}, \beta) \text{ mit } \beta(v_n) = \begin{cases} n & n \text{ ungerade} \\ -n & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{I} \models \neg \exists v_1 g(v_1, v_1) = v_2 \\
\iff \quad & \text{nicht } \mathfrak{I} \models \exists v_1 g(v_1, v_1) = v_2 \\
\iff \quad & \text{nicht ex. } r \in \mathbb{R} : \ \mathfrak{I}\frac{r}{v_1} \models g(v_1, v_1) = v_2 \\
\iff \quad & \text{nicht ex. } r \in \mathbb{R} : \ \mathfrak{I}\frac{r}{v_1}(g(v_1, v_1)) = \mathfrak{I}\frac{r}{v_1}(v_2) \\
\iff \quad & \text{nicht ex. } r \in \mathbb{R} : \ r \cdot r = -2.
\end{aligned}$$

$$S = \{\underset{2}{g}\}, \quad \mathfrak{R} = (\mathbb{R}, \cdot), \quad \mathfrak{I} = (\mathfrak{R}, \beta) \text{ mit } \beta(v_n) = \begin{cases} n & n \text{ ungerade} \\ -n & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \mathfrak{I} \models \neg \exists v_1 g(v_1, v_1) = v_2 \\ \iff \quad & \text{nicht } \mathfrak{I} \models \exists v_1 g(v_1, v_1) = v_2 \\ \iff \quad & \text{nicht ex. } r \in \mathbb{R} : \ \mathfrak{I}\frac{r}{v_1} \models g(v_1, v_1) = v_2 \\ \iff \quad & \text{nicht ex. } r \in \mathbb{R} : \ \mathfrak{I}\frac{r}{v_1}(g(v_1, v_1)) = \mathfrak{I}\frac{r}{v_1}(v_2) \\ \iff \quad & \text{nicht ex. } r \in \mathbb{R} : \ r \cdot r = -2. \end{aligned}$$

Somit: $\mathfrak{I} \models \neg \exists v_1 g(v_1, v_1) = v_2$.

$$S = \{\underset{2}{g}\}, \quad \mathfrak{R} = (\mathbb{R}, \cdot), \quad \mathfrak{I} = (\mathfrak{R}, \beta) \text{ mit } \beta(v_n) = \begin{cases} n & n \text{ ungerade} \\ -n & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \mathfrak{I} \models \neg\exists v_1 g(v_1, v_1) = v_2 \\ \iff \quad & \text{nicht } \mathfrak{I} \models \exists v_1 g(v_1, v_1) = v_2 \\ \iff \quad & \text{nicht ex. } r \in \mathbb{R} : \ \mathfrak{I}\frac{r}{v_1} \models g(v_1, v_1) = v_2 \\ \iff \quad & \text{nicht ex. } r \in \mathbb{R} : \ \mathfrak{I}\frac{r}{v_1}(g(v_1, v_1)) = \mathfrak{I}\frac{r}{v_1}(v_2) \\ \iff \quad & \text{nicht ex. } r \in \mathbb{R} : \ r \cdot r = -2. \end{aligned}$$

Somit: $\mathfrak{I} \models \neg\exists v_1 g(v_1, v_1) = v_2$.

Entsprechend: $\mathfrak{I} \models \neg\exists v_{116} g(v_{116}, v_{116}) = v_2$.

$$S = \{\underset{2}{g}\}, \quad \mathfrak{R} = (\mathbb{R}, \cdot), \quad \mathfrak{I} = (\mathfrak{R}, \beta) \text{ mit } \beta(v_n) = \begin{cases} n & n \text{ ungerade} \\ -n & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \mathfrak{I} \models \neg\exists v_1 g(v_1, v_1) = v_2 \\ \iff \quad & \text{nicht } \mathfrak{I} \models \exists v_1 g(v_1, v_1) = v_2 \\ \iff \quad & \text{nicht ex. } r \in \mathbb{R} : \ \mathfrak{I}\frac{r}{v_1} \models g(v_1, v_1) = v_2 \\ \iff \quad & \text{nicht ex. } r \in \mathbb{R} : \ \mathfrak{I}\frac{r}{v_1}(g(v_1, v_1)) = \mathfrak{I}\frac{r}{v_1}(v_2) \\ \iff \quad & \text{nicht ex. } r \in \mathbb{R} : \ r \cdot r = -2. \end{aligned}$$

Somit: $\mathfrak{I} \models \neg\exists v_1 g(v_1, v_1) = v_2$.

Entsprechend: $\mathfrak{I} \models \neg\exists v_{116} g(v_{116}, v_{116}) = v_2$.

Dagegen: $\mathfrak{I} \not\models \neg\exists v_1 g(v_1, v_1) = v_3$, da

$$\mathfrak{I} \models \exists v_1 g(v_1, v_1) = v_3.$$

Koinzidenzlemma. S, S_1, S_2 Symbolmengen, $S \subseteq S_1 \cap S_2$.

Koinzidenzlemma. S, S_1, S_2 Symbolmengen, $S \subseteq S_1 \cap S_2$.

Für $j = 1, 2$ sei $\mathfrak{I}_j := (\mathfrak{A}_j, \beta_j)$ eine S_j-Interpretation.

Koinzidenzlemma. S, S_1, S_2 Symbolmengen, $S \subseteq S_1 \cap S_2$.

Für $j = 1, 2$ sei $\mathfrak{I}_j := (\mathfrak{A}_j, \beta_j)$ eine S_j-Interpretation.

Gelte $\mathfrak{A}_1 \upharpoonright S = \mathfrak{A}_2 \upharpoonright S$ (d.h. $A_1 = A_2$ und $k^{\mathfrak{A}_1} = k^{\mathfrak{A}_2}$ für $k \in S$).

Dann

Koinzidenzlemma. S, S_1, S_2 Symbolmengen, $S \subseteq S_1 \cap S_2$.

Für $j = 1, 2$ sei $\mathfrak{I}_j := (\mathfrak{A}_j, \beta_j)$ eine S_j-Interpretation.

Gelte $\mathfrak{A}_1 \upharpoonright S = \mathfrak{A}_2 \upharpoonright S$ (d.h. $A_1 = A_2$ und $k^{\mathfrak{A}_1} = k^{\mathfrak{A}_2}$ für $k \in S$).

Dann

1. Für $t \in T^S$: Wenn $\beta_1 \upharpoonright \mathrm{var}(t) = \beta_2 \upharpoonright \mathrm{var}(t)$, so $\mathfrak{I}_1(t) = \mathfrak{I}_2(t)$.

Koinzidenzlemma. S, S_1, S_2 Symbolmengen, $S \subseteq S_1 \cap S_2$.

Für $j = 1, 2$ sei $\mathfrak{I}_j := (\mathfrak{A}_j, \beta_j)$ eine S_j-Interpretation.

Gelte $\mathfrak{A}_1 \upharpoonright S = \mathfrak{A}_2 \upharpoonright S$ (d.h. $A_1 = A_2$ und $k^{\mathfrak{A}_1} = k^{\mathfrak{A}_2}$ für $k \in S$).

Dann

1. Für $t \in T^S$: Wenn $\beta_1 \upharpoonright \mathrm{var}(t) = \beta_2 \upharpoonright \mathrm{var}(t)$, so $\mathfrak{I}_1(t) = \mathfrak{I}_2(t)$.
2. Für $\varphi \in L^S$: Wenn $\beta_1 \upharpoonright \mathrm{fr}(\varphi) = \beta_2 \upharpoonright \mathrm{fr}(\varphi)$, so $(\mathfrak{I}_1 \models \varphi \text{ gdw } \mathfrak{I}_2 \models \varphi)$.

Koinzidenzlemma. S, S_1, S_2 Symbolmengen, $S \subseteq S_1 \cap S_2$.

Für $j = 1, 2$ sei $\mathfrak{I}_j := (\mathfrak{A}_j, \beta_j)$ eine S_j-Interpretation.

Gelte $\mathfrak{A}_1 \upharpoonright S = \mathfrak{A}_2 \upharpoonright S$ (d.h. $A_1 = A_2$ und $k^{\mathfrak{A}_1} = k^{\mathfrak{A}_2}$ für $k \in S$).

Dann

1. Für $t \in T^S$: Wenn $\beta_1 \upharpoonright \mathrm{var}(t) = \beta_2 \upharpoonright \mathrm{var}(t)$, so $\mathfrak{I}_1(t) = \mathfrak{I}_2(t)$.
2. Für $\varphi \in L^S$: Wenn $\beta_1 \upharpoonright \mathrm{fr}(\varphi) = \beta_2 \upharpoonright \mathrm{fr}(\varphi)$, so $(\mathfrak{I}_1 \models \varphi$ gdw $\mathfrak{I}_2 \models \varphi)$.

Teil des Beweises von 2): $\varphi := Rt_1 \ldots t_r$:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{I}_1 \models Rt_1 \ldots t_r \quad &\Longleftrightarrow \quad R^{\mathfrak{A}_1}\mathfrak{I}_1(t_1) \ldots \mathfrak{I}_1(t_r) \\
&\Longleftrightarrow \quad R^{\mathfrak{A}_1}\mathfrak{I}_2(t_1) \ldots \mathfrak{I}_2(t_r) \qquad \text{(wegen 1)} \\
&\Longleftrightarrow \quad R^{\mathfrak{A}_2}\mathfrak{I}_2(t_1) \ldots \mathfrak{I}_2(t_r) \qquad (\text{wegen } R^{\mathfrak{A}_1} = R^{\mathfrak{A}_2}) \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{I}_2 \models Rt_1 \ldots t_r.
\end{aligned}
$$

$\Phi \subseteq L^S$, $\varphi, \psi \in L^S$

$\Phi \subseteq L^S$, $\varphi, \psi \in L^S$

1. $\mathfrak{I}$ S-Interpretation

   $\mathfrak{I}$ Modell von Φ, $\mathfrak{I} \models \Phi$, gdw für alle $\chi \in \Phi : \mathfrak{I} \models \chi$.

$\Phi \subseteq L^S$, $\varphi, \psi \in L^S$

1. $\mathfrak{I}$ S-Interpretation

   $\mathfrak{I}$ Modell von Φ, $\mathfrak{I} \models \Phi$, gdw für alle $\chi \in \Phi : \mathfrak{I} \models \chi$.

2. ψ folgt aus Φ, $\Phi \models \psi$, gdw für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$: wenn $\mathfrak{I} \models \Phi$, so $\mathfrak{I} \models \psi$.

$\Phi \subseteq L^S$, $\varphi, \psi \in L^S$

1. $\mathfrak{I}$ S-Interpretation

   $\mathfrak{I}$ Modell von Φ, $\mathfrak{I} \models \Phi$, gdw für alle $\chi \in \Phi : \mathfrak{I} \models \chi$.

2. ψ folgt aus Φ, $\Phi \models \psi$, gdw für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$: wenn $\mathfrak{I} \models \Phi$, so $\mathfrak{I} \models \psi$.

   Falls $\Phi = \{\varphi\}$, dann auch $\varphi \models \psi$ statt $\Phi \models \psi$.

$\Phi \subseteq L^S$, $\varphi, \psi \in L^S$

1. $\mathfrak{I}$ S-Interpretation

   $\mathfrak{I}$ Modell von Φ, $\mathfrak{I} \models \Phi$, gdw für alle $\chi \in \Phi : \mathfrak{I} \models \chi$.

2. ψ folgt aus Φ, $\Phi \models \psi$, gdw für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$: wenn $\mathfrak{I} \models \Phi$, so $\mathfrak{I} \models \psi$.

   Falls $\Phi = \{\varphi\}$, dann auch $\varphi \models \psi$ statt $\Phi \models \psi$.

3. φ ist erfüllbar, Erf φ, gdw es gibt eine Interpretation, die φ erfüllt.

   Φ ist erfüllbar, Erf Φ, gdw es gibt eine Interpretation, die Φ erfüllt.

$\Phi \subseteq L^S$, $\varphi, \psi \in L^S$

1. $\mathfrak{I}$ S-Interpretation

   $\mathfrak{I}$ Modell von Φ, $\mathfrak{I} \models \Phi$, gdw für alle $\chi \in \Phi : \mathfrak{I} \models \chi$.

2. ψ folgt aus Φ, $\Phi \models \psi$, gdw für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$: wenn $\mathfrak{I} \models \Phi$, so $\mathfrak{I} \models \psi$.

   Falls $\Phi = \{\varphi\}$, dann auch $\varphi \models \psi$ statt $\Phi \models \psi$.

3. φ ist erfüllbar, Erf φ, gdw es gibt eine Interpretation, die φ erfüllt.

   Φ ist erfüllbar, Erf Φ, gdw es gibt eine Interpretation, die Φ erfüllt.

4. φ ist allgemeingültig, $\models \varphi$, gdw für alle $\mathfrak{I}$: $\mathfrak{I} \models \varphi$.

   gdw $\emptyset \models \varphi$

$\Phi \subseteq L^S$, $\varphi, \psi \in L^S$

1. $\mathfrak{I}$ S-Interpretation

   $\mathfrak{I}$ Modell von Φ, $\mathfrak{I} \models \Phi$, gdw für alle $\chi \in \Phi : \mathfrak{I} \models \chi$.

2. ψ folgt aus Φ, $\Phi \models \psi$, gdw für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$: wenn $\mathfrak{I} \models \Phi$, so $\mathfrak{I} \models \psi$.

   Falls $\Phi = \{\varphi\}$, dann auch $\varphi \models \psi$ statt $\Phi \models \psi$.

3. φ ist erfüllbar, Erf φ, gdw es gibt eine Interpretation, die φ erfüllt.

   Φ ist erfüllbar, Erf Φ, gdw es gibt eine Interpretation, die Φ erfüllt.

4. φ ist allgemeingültig, $\models \varphi$, gdw für alle $\mathfrak{I}$: $\mathfrak{I} \models \varphi$.

   gdw $\emptyset \models \varphi$

5. φ und ψ logisch äquivalent, $\varphi \equiv \psi$, gdw $\models \varphi \leftrightarrow \psi$

   gdw für alle $\mathfrak{I}$: ($\mathfrak{I} \models \varphi$ gdw $\mathfrak{I} \models \psi$).

$S = \{\underset{2}{R}\}$; $x := v_1$, $y := v_2$, $z := v_3$.

R reflexiv:

$$\varphi_{\text{refl}} := \forall x Rxx$$

$S = \{\underset{2}{R}\}$; $\quad x := v_1,\ y := v_2,\ z := v_3.$

R reflexiv:

$$\varphi_{\text{refl}} := \forall x R x x$$

R irreflexiv:

$$\varphi_{\text{irrefl}} := \forall x \neg R x x$$

$S = \{\underset{2}{R}\}; \quad x := v_1,\, y := v_2,\, z := v_3.$

R reflexiv:

$$\varphi_{\text{refl}} := \forall x Rxx$$

R irreflexiv:

$$\varphi_{\text{irrefl}} := \forall x \neg Rxx$$

R symmetrisch:

$$\varphi_{\text{symm}} := \forall x \forall y (Rxy \rightarrow Ryx)$$

$S = \{\underset{2}{R}\}$; $\quad x := v_1,\ y := v_2,\ z := v_3.$

R reflexiv:

$$\varphi_{\text{refl}} := \forall x Rxx$$

R irreflexiv:

$$\varphi_{\text{irrefl}} := \forall x \neg Rxx$$

R symmetrisch:

$$\varphi_{\text{symm}} := \forall x \forall y (Rxy \rightarrow Ryx)$$

R antisymmetrisch:

$$\varphi_{\text{antisymm}} := \forall x \forall y ((Rxy \wedge Ryx) \rightarrow x = y)$$

$S = \{\underset{2}{R}\}; \quad x := v_1,\ y := v_2,\ z := v_3.$

R reflexiv:

$$\varphi_{\text{refl}} := \forall x Rxx$$

R irreflexiv:

$$\varphi_{\text{irrefl}} := \forall x \neg Rxx$$

R symmetrisch:

$$\varphi_{\text{symm}} := \forall x \forall y (Rxy \rightarrow Ryx)$$

R antisymmetrisch:

$$\varphi_{\text{antisymm}} := \forall x \forall y ((Rxy \wedge Ryx) \rightarrow x = y)$$

R konnex:

$$\varphi_{\text{konnex}} := \forall x \forall y (Rxy \vee Ryx)$$

$S = \{\underset{2}{R}\}; \quad x := v_1,\ y := v_2,\ z := v_3.$

R reflexiv:

$$\varphi_{\text{refl}} := \forall x R x x$$

R irreflexiv:

$$\varphi_{\text{irrefl}} := \forall x \neg R x x$$

R symmetrisch:

$$\varphi_{\text{symm}} := \forall x \forall y (Rxy \rightarrow Ryx)$$

R antisymmetrisch:

$$\varphi_{\text{antisymm}} := \forall x \forall y ((Rxy \wedge Ryx) \rightarrow x = y)$$

R konnex:

$$\varphi_{\text{konnex}} := \forall x \forall y (Rxy \vee Ryx)$$

R transitiv:

$$\varphi_{\text{transitiv}} := \forall x \forall y \forall z ((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)$$

Die Modelle von $\Phi_{\mathrm{pOrd}} := \{\varphi_{\mathrm{refl}}, \varphi_{\mathrm{antisymm}}, \varphi_{\mathrm{transitiv}}\}$ sind die partiellen Ordnungen.

Die Modelle von $\Phi_{\mathrm{pOrd}} := \{\varphi_{\mathrm{refl}}, \varphi_{\mathrm{antisymm}}, \varphi_{\mathrm{transitiv}}\}$ sind die partiellen Ordnungen.

Die Modelle von $\Phi_{\mathrm{Ord}} := \{\varphi_{\mathrm{refl}}, \varphi_{\mathrm{antisymm}}, \varphi_{\mathrm{transitiv}}, \varphi_{\mathrm{konnex}}\}$ sind die Ordnungen.

Die Modelle von $\Phi_{\text{pOrd}} := \{\varphi_{\text{refl}}, \varphi_{\text{antisymm}}, \varphi_{\text{transitiv}}\}$ sind die partiellen Ordnungen.

Die Modelle von $\Phi_{\text{Ord}} := \{\varphi_{\text{refl}}, \varphi_{\text{antisymm}}, \varphi_{\text{transitiv}}, \varphi_{\text{konnex}}\}$ sind die Ordnungen.

Die Modelle von $\Phi_{\text{Äqui}} := \{\varphi_{\text{refl}}, \varphi_{\text{symm}}, \varphi_{\text{transitiv}}\}$ sind die Äquivalenzstrukturen (Äquivalenzrelationen).

Die Modelle von $\Phi_{\mathrm{pOrd}} := \{\varphi_{\mathrm{refl}}, \varphi_{\mathrm{antisymm}}, \varphi_{\mathrm{transitiv}}\}$ sind die partiellen Ordnungen.

Die Modelle von $\Phi_{\mathrm{Ord}} := \{\varphi_{\mathrm{refl}}, \varphi_{\mathrm{antisymm}}, \varphi_{\mathrm{transitiv}}, \varphi_{\mathrm{konnex}}\}$ sind die Ordnungen.

Die Modelle von $\Phi_{\mathrm{Äqui}} := \{\varphi_{\mathrm{refl}}, \varphi_{\mathrm{symm}}, \varphi_{\mathrm{transitiv}}\}$ sind die Äquivalenzstrukturen (Äquivalenzrelationen).

$S = \{\underset{2}{E}\}$

Die Modelle von $\Phi_{\mathrm{Graph}} := \{\varphi_{\mathrm{symm}}, \varphi_{\mathrm{irrefl}}\}$! sind die Graphen.

Die Modelle von $\Phi_{\text{pOrd}} := \{\varphi_{\text{refl}}, \varphi_{\text{antisymm}}, \varphi_{\text{transitiv}}\}$ sind die partiellen Ordnungen.

Die Modelle von $\Phi_{\text{Ord}} := \{\varphi_{\text{refl}}, \varphi_{\text{antisymm}}, \varphi_{\text{transitiv}}, \varphi_{\text{konnex}}\}$ sind die Ordnungen.

Die Modelle von $\Phi_{\text{Äqui}} := \{\varphi_{\text{refl}}, \varphi_{\text{symm}}, \varphi_{\text{transitiv}}\}$ sind die Äquivalenzstrukturen (Äquivalenzrelationen).

$S = \{\underset{2}{E}\}$

Die Modelle von $\Phi_{\text{Graph}} := \{\varphi_{\text{symm}}, \varphi_{\text{irrefl}}\}$! sind die Graphen.

Die Modelle von $\Phi_{\text{Digraph}} := \emptyset$ sind die Digraphen.

Die Modelle von $\Phi_{\text{pOrd}} := \{\varphi_{\text{refl}}, \varphi_{\text{antisymm}}, \varphi_{\text{transitiv}}\}$ sind die partiellen Ordnungen.

Die Modelle von $\Phi_{\text{Ord}} := \{\varphi_{\text{refl}}, \varphi_{\text{antisymm}}, \varphi_{\text{transitiv}}, \varphi_{\text{konnex}}\}$ sind die Ordnungen.

Die Modelle von $\Phi_{\text{Äqui}} := \{\varphi_{\text{refl}}, \varphi_{\text{symm}}, \varphi_{\text{transitiv}}\}$ sind die Äquivalenzstrukturen (Äquivalenzrelationen).

$S = \{\underset{2}{E}\}$

Die Modelle von $\Phi_{\text{Graph}} := \{\varphi_{\text{symm}}, \varphi_{\text{irrefl}}\}$! sind die Graphen.

Die Modelle von $\Phi_{\text{Digraph}} := \emptyset$ sind die Digraphen.

Die Modelle von $\Phi_{\text{Digraph}} \cup \{\forall x \neg Exx\}$ sind die schleifenlosen Digraphen.

$S = \{+, \cdot, 0, 1\}$

Die Modelle von

$$\forall x \forall y \forall z (x + y) + z = x + (y + z) \qquad \forall x \, x + 0 = x$$

$$\forall x \forall y \forall z (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \qquad \forall x \, x \cdot 1 = x$$

$$\Phi_{\mathrm{Kp}} : \quad \forall x \exists y \, x + y = 0 \qquad \forall x (\neg x = 0 \rightarrow \exists y \, x \cdot y = 1)$$

$$\forall x \forall y \, x + y = y + x \qquad \forall x \forall y \, x \cdot y = y \cdot x$$

$$\neg 0 = 1 \qquad \forall x \forall y \forall z \, x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

sind die Körper.

K Klasse endlicher Strukturen, Φ Menge von Ausdrücken der ersten Stufe.

Das Model-Checking Problem:

MC(K,Φ)	*Input:*	Struktur $\mathfrak{A} \in K$, Satz $\psi \in \Phi$
	Frage:	$\mathfrak{A} \models \psi$?

K Klasse endlicher Strukturen, Φ Menge von Ausdrücken der ersten Stufe.

Das Model-Checking Problem:

$\mathrm{MC}(K,\Phi)$	*Input:*	Struktur $\mathfrak{A} \in K$, Satz $\psi \in \Phi$
	Frage:	$\mathfrak{A} \models \psi$?

$$\mathfrak{D} \models \exists x \underbrace{(\underline{K}x \wedge \exists y(\underline{F}y \wedge Lxy \wedge Mcy))}_{\varphi(x)}$$

K Klasse endlicher Strukturen, Φ Menge von Ausdrücken der ersten Stufe.

Das Model-Checking Problem:

MC(K,Φ)	*Input:*	Struktur $\mathfrak{A} \in K$, Satz $\psi \in \Phi$
	Frage:	$\mathfrak{A} \models \psi$?

$$\mathfrak{D} \models \exists x \, \underbrace{(\underline{K}x \wedge \exists y(\underline{F}y \wedge Lxy \wedge Mcy))}_{\varphi(x)}$$

Das Auswertungsproblem:

AUS(K,Φ)	*Input:*	Struktur $\mathfrak{A} \in K$, $n \geq 1$, $\psi(x_1, \ldots, x_n) \in \Phi$
	Problem:	Berechne $\psi(\mathfrak{A}) := \{(a_1, \ldots, a_n) \mid \mathfrak{A} \models \psi[a_1, \ldots, a_n]\}$.

$$\{k \mid \mathfrak{D} \models \varphi[k]\}$$

Sei $\mathfrak{G} = (G, E^{\mathfrak{G}}$ ein Digraph.

Sei $\mathfrak{G} = (G, E^{\mathfrak{G}}$ ein Digraph.

- Ein Weg ist ein Tupel $(a_1, \ldots, a_m) \in G^m$ für ein $m \geq 1$, so dass für $i = 1, \ldots, m-1$:
$$(a_i, a_{i+1}) \in E^G.$$
$(a_1, \ldots, a_m)$ ist dann ein Weg von a_1 nach a_m der Länge $m-1$.

Sei $\mathfrak{G} = (G, E^{\mathfrak{G}}$ ein Digraph.

- Ein Weg ist ein Tupel $(a_1, \ldots, a_m) \in G^m$ für ein $m \geq 1$, so dass für $i = 1, \ldots, m-1$:

$$(a_i, a_{i+1}) \in E^G.$$

  $(a_1, \ldots, a_m)$ ist dann ein Weg von a_1 nach a_m der Länge $m-1$.

- Ein Pfad ist ein Weg, dessen Punkte paarweise verschieden sind.

Sei $\mathfrak{G} = (G, E^{\mathfrak{G}}$ ein Digraph.

- Ein Weg ist ein Tupel $(a_1, \ldots, a_m) \in G^m$ für ein $m \geq 1$, so dass für $i = 1, \ldots, m-1$:
$$(a_i, a_{i+1}) \in E^G.$$
$(a_1, \ldots, a_m)$ ist dann ein Weg von a_1 nach a_m der Länge $m-1$.
- Ein Pfad ist ein Weg, dessen Punkte paarweise verschieden sind.

Sei $\mathfrak{G} = (G, E^{\mathfrak{G}})$ ein Graph.

Sei $\mathfrak{G} = (G, E^{\mathfrak{G}}$ ein Digraph.

- Ein Weg ist ein Tupel $(a_1, \dots, a_m) \in G^m$ für ein $m \geq 1$, so dass für $i = 1, \dots, m-1$:
$$(a_i, a_{i+1}) \in E^G.$$
$(a_1, \dots, a_m)$ ist dann ein Weg von a_1 nach a_m der Länge $m-1$.
- Ein Pfad ist ein Weg, dessen Punkte paarweise verschieden sind.

Sei $\mathfrak{G} = (G, E^{\mathfrak{G}})$ ein Graph.

- $\mathfrak{G}$ ist zusammenhängend, wenn es für alle $a, b \in G$ einen Weg von a nach b gibt.

Sei $\mathfrak{G} = (G, E^{\mathfrak{G}}$ ein Digraph.

- Ein Weg ist ein Tupel $(a_1, \ldots, a_m) \in G^m$ für ein $m \geq 1$, so dass für $i = 1, \ldots, m-1$:
$$(a_i, a_{i+1}) \in E^G.$$
$(a_1, \ldots, a_m)$ ist dann ein Weg von a_1 nach a_m der Länge $m-1$.
- Ein Pfad ist ein Weg, dessen Punkte paarweise verschieden sind.

Sei $\mathfrak{G} = (G, E^{\mathfrak{G}})$ ein Graph.

- $\mathfrak{G}$ ist zusammenhängend, wenn es für alle $a, b \in G$ einen Weg von a nach b gibt.
- Ein Kreis in einem Graphen ist ein Weg $(a_1, \ldots, a_m)$ mit $m \geq 4$, $a_m = a_1$ und $a_i \neq a_j$ für $1 \leq i < j \leq m-1$.

Sei $\mathfrak{G} = (G, E^{\mathfrak{G}}$ ein Digraph.

- Ein Weg ist ein Tupel $(a_1, \ldots, a_m) \in G^m$ für ein $m \geq 1$, so dass für $i = 1, \ldots, m-1$:
$$(a_i, a_{i+1}) \in E^G.$$
$(a_1, \ldots, a_m)$ ist dann ein Weg von a_1 nach a_m der Länge $m-1$.
- Ein Pfad ist ein Weg, dessen Punkte paarweise verschieden sind.

Sei $\mathfrak{G} = (G, E^{\mathfrak{G}})$ ein Graph.

- $\mathfrak{G}$ ist zusammenhängend, wenn es für alle $a, b \in G$ einen Weg von a nach b gibt.
- Ein Kreis in einem Graphen ist ein Weg $(a_1, \ldots, a_m)$ mit $m \geq 4$, $a_m = a_1$ und $a_i \neq a_j$ für $1 \leq i < j \leq m-1$.

Satz. Sei $\mathfrak{G} = (G, E^{\mathfrak{G}})$ ein Graph. Die Relation $\sim \subseteq G \times G$ definiert durch

$$a \sim b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{es gibt einen Weg von } a \text{ nach } b$$

Sei $\mathfrak{G} = (G, E^{\mathfrak{G}}$ ein Digraph.

- Ein Weg ist ein Tupel $(a_1, \ldots, a_m) \in G^m$ für ein $m \geq 1$, so dass für $i = 1, \ldots, m-1$:
$$(a_i, a_{i+1}) \in E^G.$$
$(a_1, \ldots, a_m)$ ist dann ein Weg von a_1 nach a_m der Länge $m-1$.
- Ein Pfad ist ein Weg, dessen Punkte paarweise verschieden sind.

Sei $\mathfrak{G} = (G, E^{\mathfrak{G}})$ ein Graph.

- $\mathfrak{G}$ ist zusammenhängend, wenn es für alle $a, b \in G$ einen Weg von a nach b gibt.
- Ein Kreis in einem Graphen ist ein Weg $(a_1, \ldots, a_m)$ mit $m \geq 4$, $a_m = a_1$ und $a_i \neq a_j$ für $1 \leq i < j \leq m-1$.

Satz. Sei $\mathfrak{G} = (G, E^{\mathfrak{G}})$ ein Graph. Die Relation $\sim \subseteq G \times G$ definiert durch
$$a \sim b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{es gibt einen Weg von } a \text{ nach } b$$
ist eine Äquivalenzrelation.

Sei $\mathfrak{G} = (G, E^{\mathfrak{G}}$ ein Digraph.

- Ein Weg ist ein Tupel $(a_1, \ldots, a_m) \in G^m$ für ein $m \geq 1$, so dass für $i = 1, \ldots, m-1$:

$$(a_i, a_{i+1}) \in E^G.$$

  $(a_1, \ldots, a_m)$ ist dann ein Weg von a_1 nach a_m der Länge $m-1$.

- Ein Pfad ist ein Weg, dessen Punkte paarweise verschieden sind.

Sei $\mathfrak{G} = (G, E^{\mathfrak{G}})$ ein Graph.

- $\mathfrak{G}$ ist zusammenhängend, wenn es für alle $a, b \in G$ einen Weg von a nach b gibt.
- Ein Kreis in einem Graphen ist ein Weg $(a_1, \ldots, a_m)$ mit $m \geq 4$, $a_m = a_1$ und $a_i \neq a_j$ für $1 \leq i < j \leq m-1$.

Satz. Sei $\mathfrak{G} = (G, E^{\mathfrak{G}})$ ein Graph. Die Relation $\sim \subseteq G \times G$ definiert durch

$$a \sim b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{es gibt einen Weg von } a \text{ nach } b$$

ist eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen von $\sim$ bezeichnet man als die Zusammenhangskomponnenten von $\mathfrak{G}$.

Bemerkung. Sei S beliebig und $\mathfrak{A}$ eine S-Struktur mit mindestens 2 Elementen.

Bemerkung. Sei S beliebig und $\mathfrak{A}$ eine S-Struktur mit mindestens 2 Elementen. Für $n \geq 1$ sei $x_n := v_{2 \cdot n-1}$ und $y_n := v_{2 \cdot n}$.

Bemerkung. Sei S beliebig und $\mathfrak{A}$ eine S-Struktur mit mindestens 2 Elementen. Für $n \geq 1$ sei $x_n := v_{2\cdot n-1}$ und $y_n := v_{2\cdot n}$. Die Abbildung $^* : \mathrm{QAA} \to L^S$ sei induktiv wie folgt definiert:

$$\begin{array}{lcl} X_i^* & := & x_i = y_i \\ \neg\alpha\ ^* & := & \neg\ \alpha^* \\ (\alpha \wedge \beta)^* & := & (\alpha^* \vee \beta^*) \\ (\alpha \vee \beta)^* & := & (\alpha^* \vee \beta^*) \\ \exists X_i \alpha\ ^* & := & \exists x_i \exists y_i \alpha^* \\ \forall X_i \alpha\ ^* & := & \forall x_i \forall y_i \alpha^* \end{array}$$

Dann gilt für jeden Satz $\alpha \in \mathrm{QAA}$:

$$\alpha \text{ ist erfüllbar } \iff \mathfrak{A} \models \alpha^*.$$

Bemerkung. Sei S beliebig und $\mathfrak{A}$ eine S-Struktur mit mindestens 2 Elementen. Für $n \geq 1$ sei $x_n := v_{2\cdot n-1}$ und $y_n := v_{2\cdot n}$. Die Abbildung * : QAA $\to L^S$ sei induktiv wie folgt definiert:

$$
\begin{array}{lll}
X_i^* & := & x_i = y_i \\
\neg\alpha\ ^* & := & \neg\ \alpha^* \\
(\alpha \wedge \beta)^* & := & (\alpha^* \vee \beta^*) \\
(\alpha \vee \beta)^* & := & (\alpha^* \vee \beta^*) \\
\exists X_i \alpha\ ^* & := & \exists x_i \exists y_i \alpha^* \\
\forall X_i \alpha\ ^* & := & \forall x_i \forall y_i \alpha^*
\end{array}
$$

Dann gilt für jeden Satz $\alpha \in$ QAA:

$$\alpha \text{ ist erfüllbar } \iff \mathfrak{A} \models \alpha^*.$$

Folgerung. Sei S beliebig und sei K eine Klasse von endlichen S-Strukturen, die eine mindestens zweielementige Struktur enthält. Dann

$$\text{QBSAT} \leq^{\text{pol}} \text{MC}(K, L^S).$$

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ S-Strukturen

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ S-Strukturen

1. (a) $\pi : A \to B$, π ist Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach (auf) $\mathfrak{B}$, $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, wenn

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ S-Strukturen

1. (a) $\pi : A \to B$, π ist Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach (auf) $\mathfrak{B}$, $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, wenn

   (1) π ist bijektiv;

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ S-Strukturen

1. (a) $\pi : A \to B$, π ist Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach (auf) $\mathfrak{B}$, $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, wenn
   (1) π ist bijektiv;
   (2) Für $R \in S, R$ r-stellig, $a_1, \ldots, a_r \in A$:

$$R^{\mathfrak{A}} a_1 \ldots a_r \iff R^{\mathfrak{B}} \pi(a_1) \ldots \pi(a_r);$$

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ S-Strukturen

1. (a) $\pi : A \to B$, π ist Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach (auf) $\mathfrak{B}$, $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, wenn
   (1) π ist bijektiv;
   (2) Für $R \in S, R$ r-stellig, $a_1, \ldots, a_r \in A$:
   $$R^{\mathfrak{A}} a_1 \ldots a_r \iff R^{\mathfrak{B}} \pi(a_1) \ldots \pi(a_r);$$
   (3) Für $f \in S, f$ r-stellig, $a_1, \ldots, a_r \in A$:
   $$\pi(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_r)) = f^{\mathfrak{B}}(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_r));$$

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ S-Strukturen

1. (a) $\pi : A \to B$, π ist Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach (auf) $\mathfrak{B}$, $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, wenn

   (1) π ist bijektiv;

   (2) Für $R \in S, R$ r-stellig, $a_1, \ldots, a_r \in A$:

$$R^{\mathfrak{A}} a_1 \ldots a_r \iff R^{\mathfrak{B}} \pi(a_1) \ldots \pi(a_r);$$

   (3) Für $f \in S, f$ r-stellig, $a_1, \ldots, a_r \in A$:

$$\pi(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_r)) = f^{\mathfrak{B}}(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_r));$$

   (4) Für $c \in S$: $\qquad \pi(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$.

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ S-Strukturen

1. (a) $\pi : A \to B$, π ist Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach (auf) $\mathfrak{B}$, $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, wenn
   - (1) π ist bijektiv;
   - (2) Für $R \in S, R$ r-stellig, $a_1, \ldots, a_r \in A$:
   $$R^{\mathfrak{A}} a_1 \ldots a_r \iff R^{\mathfrak{B}} \pi(a_1) \ldots \pi(a_r);$$
   - (3) Für $f \in S, f$ r-stellig, $a_1, \ldots, a_r \in A$:
   $$\pi(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_r)) = f^{\mathfrak{B}}(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_r));$$
   - (4) Für $c \in S$: $\qquad \pi(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$.

   (b) $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind isomorph, $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, gdw. ex. π mit $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ S-Strukturen

1. (a) $\pi : A \to B$, π ist Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach (auf) $\mathfrak{B}$, $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, wenn
   (1) π ist bijektiv;
   (2) Für $R \in S, R$ r-stellig, $a_1, \ldots, a_r \in A$:
   $$R^{\mathfrak{A}} a_1 \ldots a_r \iff R^{\mathfrak{B}} \pi(a_1) \ldots \pi(a_r);$$
   (3) Für $f \in S, f$ r-stellig, $a_1, \ldots, a_r \in A$:
   $$\pi(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_r)) = f^{\mathfrak{B}}(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_r));$$
   (4) Für $c \in S$: $\quad \pi(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$.

   (b) $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind isomorph, $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, gdw. ex. π mit $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.
2. $\pi : A \to B$, π ist starker Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ gdw π erfüllt (2), (3) und (4).
3. $\pi : A \to B$, π Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ gdw π erfüllt (3), (4) und

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ S-Strukturen

1. (a) $\pi : A \to B$, π ist Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach (auf) $\mathfrak{B}$, $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, wenn
   (1) π ist bijektiv;
   (2) Für $R \in S, R$ r-stellig, $a_1, \dots, a_r \in A$:
   $$R^{\mathfrak{A}} a_1 \dots a_r \iff R^{\mathfrak{B}} \pi(a_1) \dots \pi(a_r);$$
   (3) Für $f \in S, f$ r-stellig, $a_1, \dots, a_r \in A$:
   $$\pi(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_r)) = f^{\mathfrak{B}}(\pi(a_1), \dots, \pi(a_r));$$
   (4) Für $c \in S$: $\qquad \pi(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$.

   (b) $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind isomorph, $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, gdw. ex. π mit $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

2. $\pi : A \to B$, π ist starker Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ gdw π erfüllt (2), (3) und (4).

3. $\pi : A \to B$, π Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ gdw π erfüllt (3), (4) und
   (2′) für $R \in S, R$ r-stellig, $a_1, \dots, a_r \in A$,
   $$\text{wenn } R^{\mathfrak{A}} a_1 \dots a_r, \text{ so } R^{\mathfrak{B}} \pi(a_1) \dots \pi(a_r).$$

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ S-Strukturen

1. (a) $\pi : A \to B$, π ist Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach (auf) $\mathfrak{B}$, $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, wenn
   (1) π ist bijektiv;
   (2) Für $R \in S, R$ r-stellig, $a_1, \ldots, a_r \in A$:
   $$R^{\mathfrak{A}} a_1 \ldots a_r \iff R^{\mathfrak{B}} \pi(a_1) \ldots \pi(a_r);$$
   (3) Für $f \in S, f$ r-stellig, $a_1, \ldots, a_r \in A$:
   $$\pi(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_r)) = f^{\mathfrak{B}}(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_r));$$
   (4) Für $c \in S$: $\quad \pi(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$.

   (b) $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind isomorph, $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, gdw. ex. π mit $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.
2. $\pi : A \to B$, π ist starker Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ gdw π erfüllt (2), (3) und (4).
3. $\pi : A \to B$, π Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ gdw π erfüllt (3), (4) und
   (2′) für $R \in S, R$ r-stellig, $a_1, \ldots, a_r \in A$,
   $$\text{wenn } R^{\mathfrak{A}} a_1 \ldots a_r, \text{ so } R^{\mathfrak{B}} \pi(a_1) \ldots \pi(a_r).$$

Schreibweisen: $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ Isomorphismus (starker Homomorph., Homomorph.).

Bemerkung. Sei $\mathfrak{B}$ S-Struktur und $A_0 \supseteq B$. Dann existiert eine S-Struktur $\mathfrak{A}$ mit

$$A = A_0 \text{ und } \mathfrak{B} \text{ ist ein starkes homom. Bild von } \mathfrak{A}$$

(wobei "$\mathfrak{B}$ ist ein starkes homom. Bild von $\mathfrak{A}$" bedutet: es gibt einen surjektiven, starken Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$).

Bemerkung. Sei $\mathfrak{B}$ S-Struktur und $A_0 \supseteq B$. Dann existiert eine S-Struktur $\mathfrak{A}$ mit

$$A = A_0 \text{ und } \mathfrak{B} \text{ ist ein starkes homom. Bild von } \mathfrak{A}$$

(wobei "$\mathfrak{B}$ ist ein starkes homom. Bild von $\mathfrak{A}$" bedutet: es gibt einen surjektiven, starken Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$).

Beweis: Sei $b_0 \in B$ beliebig. Definiere $\pi : A_0 \to B$ durch

$$\pi(a) := \begin{cases} a & \text{für } a \in B \\ b_0 & \text{für } a \in A_0 \setminus B. \end{cases}$$

Bemerkung. Sei $\mathfrak{B}$ S-Struktur und $A_0 \supseteq B$. Dann existiert eine S-Struktur $\mathfrak{A}$ mit

$$A = A_0 \text{ und } \mathfrak{B} \text{ ist ein starkes homom. Bild von } \mathfrak{A}$$

(wobei "$\mathfrak{B}$ ist ein starkes homom. Bild von $\mathfrak{A}$" bedutet: es gibt einen surjektiven, starken Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$).

Beweis: Sei $b_0 \in B$ beliebig. Definiere $\pi : A_0 \to B$ durch

$$\pi(a) := \begin{cases} a & \text{für } a \in B \\ b_0 & \text{für } a \in A_0 \setminus B. \end{cases}$$

Definiere S-Struktur $\mathfrak{A}$ mit $A = A_0$ durch die folgenden Festlegungen:

$$\begin{aligned} R^{\mathfrak{A}} a_1 \dots a_r \quad &\iff \quad R^{\mathfrak{B}} \pi(a_1) \dots \pi(a_r) \\ f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_r) \quad &:= \quad f^{\mathfrak{B}}(\pi(a_1), \dots, \pi(a_r)) \\ c^{\mathfrak{A}} \quad &:= \quad c^{\mathfrak{B}}. \end{aligned}$$

Bemerkung. Sei $\mathfrak{B}$ S-Struktur und $A_0 \supseteq B$. Dann existiert eine S-Struktur $\mathfrak{A}$ mit

$$A = A_0 \text{ und } \mathfrak{B} \text{ ist ein starkes homom. Bild von } \mathfrak{A}$$

(wobei "$\mathfrak{B}$ ist ein starkes homom. Bild von $\mathfrak{A}$" bedutet: es gibt einen surjektiven, starken Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$).

Beweis: Sei $b_0 \in B$ beliebig. Definiere $\pi : A_0 \to B$ durch

$$\pi(a) := \begin{cases} a & \text{für } a \in B \\ b_0 & \text{für } a \in A_0 \setminus B. \end{cases}$$

Definiere S-Struktur $\mathfrak{A}$ mit $A = A_0$ durch die folgenden Festlegungen:

$$\begin{array}{rcl} R^{\mathfrak{A}} a_1 \ldots a_r & \Longleftrightarrow & R^{\mathfrak{B}} \pi(a_1) \ldots \pi(a_r) \\ f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_r) & := & f^{\mathfrak{B}}(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_r)) \\ c^{\mathfrak{A}} & := & c^{\mathfrak{B}}. \end{array}$$

Dann ist $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ starker, surjektiver Homom.; etwa:

$$\pi(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_r)) = \pi(f^{\mathfrak{B}}(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_r))) \qquad (\text{Def. von } f^{\mathfrak{A}})$$

$$= f^{\mathfrak{B}}(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_r)) \qquad (\text{nach Def. von } \pi\text{, da } f^{\mathfrak{B}}(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_r)) \in B).$$

$$\exists x(\underline{K}x \wedge \exists y(\underline{F}y \wedge Lxy \wedge Mcy))$$

$$\exists x \exists y(\underline{K}x \wedge \underline{F}y \wedge Lxy \wedge Mcy)$$

Isomorphie- und Homomorphielemma. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ S-Str

1. Wenn $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, so für alle $\varphi \in L_0^S$:

$$\mathfrak{A} \models \varphi \iff \mathfrak{B} \models \varphi.$$

2. Ist $\mathfrak{B}$ ein starkes homomorphes Bild von $\mathfrak{A}$, d.h. ex. ein starker Homom. von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{B}$, so gilt für alle gleichheitsfreien $\varphi \in L_0^S$:

$$\mathfrak{A} \models \varphi \iff \mathfrak{B} \models \varphi.$$

3. Ist $\mathfrak{B}$ ein homom. Bild von $\mathfrak{A}$, d.h. ex. ein Homom. von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{B}$, so gilt für alle $\varphi \in L_0^S$ ohne $\neg$:

$$\text{wenn } \mathfrak{A} \models \varphi, \text{ so } \mathfrak{B} \models \varphi.$$

Beweis: Sei $\pi : A \to B$ die entsprechende Abbildung. Dann zeigen wir:

(i) Für alle $n \geq 1$, $a_1, \ldots, a_n \in A$, $t \in T_n^S$:

$$\pi(t^{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots, a_n]) = t^{\mathfrak{B}}[\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)].$$

(i) Für alle $n \geq 1$, $a_1, \ldots, a_n \in A$, $t(x_1 \ldots x_n) \in T^S$:

$$\pi(t^{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots, a_n]) = t^{\mathfrak{B}}[\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)].$$

Induktion über t:

x_j: $\quad \pi(x_j^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]) = \pi(a_j) = x_j^{\mathfrak{B}}[\pi(\bar{a})]$.

(i) Für alle $n \geq 1$, $a_1, \ldots, a_n \in A$, $t(x_1 \ldots x_n) \in T^S$:

$$\pi(t^{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots, a_n]) = t^{\mathfrak{B}}[\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)].$$

Induktion über t:

x_j: $\pi(x_j^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]) = \pi(a_j) = x_j^{\mathfrak{B}}[\pi(\bar{a})]$.

c: $\pi(c^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]) = \pi(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}} = c^{\mathfrak{B}}[\pi(\bar{a})]$.

(i) Für alle $n \geq 1$, $a_1, \ldots, a_n \in A$, $t(x_1 \ldots x_n) \in T^S$:

$$\pi(t^{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots, a_n]) = t^{\mathfrak{B}}[\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)].$$

Induktion über t:

x_j: $\pi(x_j^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]) = \pi(a_j) = x_j^{\mathfrak{B}}[\pi(\bar{a})]$.

c: $\pi(c^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]) = \pi(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}} = c^{\mathfrak{B}}[\pi(\bar{a})]$.

$f(t_1, \ldots, t_r)$:

(i) Für alle $n \geq 1$, $a_1, \dots, a_n \in A$, $t(x_1 \dots x_n) \in T^S$:

$$\pi(t^{\mathfrak{A}}[a_1, \dots, a_n]) = t^{\mathfrak{B}}[\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)].$$

Induktion über t:

x_j: $\pi(x_j^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]) = \pi(a_j) = x_j^{\mathfrak{B}}[\pi(\bar{a})]$.

c: $\pi(c^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]) = \pi(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}} = c^{\mathfrak{B}}[\pi(\bar{a})]$.

$f(t_1, \dots, t_r)$:

$$\pi(f(t_1, \dots, t_r)^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]) \quad = \quad \pi(f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[\bar{a}], \dots, t_r^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]))$$

(i) Für alle $n \geq 1$, $a_1, \dots, a_n \in A$, $t(x_1 \dots x_n) \in T^S$:

$$\pi(t^{\mathfrak{A}}[a_1, \dots, a_n]) = t^{\mathfrak{B}}[\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)].$$

Induktion über t:

x_j: $\pi(x_j^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]) = \pi(a_j) = x_j^{\mathfrak{B}}[\pi(\bar{a})]$.

c: $\pi(c^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]) = \pi(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}} = c^{\mathfrak{B}}[\pi(\bar{a})]$.

$f(t_1, \dots, t_r)$:

$$\begin{array}{rcl} \pi(f(t_1, \dots, t_r)^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]) & = & \pi(f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[\bar{a}], \dots, t_r^{\mathfrak{A}}[\bar{a}])) \\ (\pi \text{ Homom.}) & = & f^{\mathfrak{B}}(\pi(t_1^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]), \dots, \pi(t_r^{\mathfrak{A}}[\bar{a}])) \end{array}$$

(i) Für alle $n \geq 1$, $a_1, \ldots, a_n \in A$, $t(x_1 \ldots x_n) \in T^S$:

$$\pi(t^{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots, a_n]) = t^{\mathfrak{B}}[\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)].$$

Induktion über t:

x_j: $\pi(x_j^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]) = \pi(a_j) = x_j^{\mathfrak{B}}[\pi(\bar{a})]$.

c: $\pi(c^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]) = \pi(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}} = c^{\mathfrak{B}}[\pi(\bar{a})]$.

$f(t_1, \ldots, t_r)$:

$$\begin{array}{rcl} \pi(f(t_1, \ldots, t_r)^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]) & = & \pi(f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[\bar{a}], \ldots, t_r^{\mathfrak{A}}[\bar{a}])) \\ (\pi \text{ Homom.}) & = & f^{\mathfrak{B}}(\pi(t_1^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]), \ldots, \pi(t_r^{\mathfrak{A}}[\bar{a}])) \\ (\text{Ind.Vor.}) & = & f^{\mathfrak{B}}(t_1^{\mathfrak{B}}[\pi(\bar{a})], \ldots, t_r^{\mathfrak{B}}[\pi(\bar{a})]) \\ & = & f(t_1, \ldots, t_r)^{\mathfrak{B}}[\pi(\bar{a})]. \end{array}$$

(ii) Für alle $n \geq 1$, $a_1, \ldots, a_n \in A$, $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in L^S$:

- Ist π ein Isomorphismus, so

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \iff \mathfrak{B} \models \varphi[\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)].$$

- Ist π ein starker Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{B}$ und φ ohne $=$:

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \iff \mathfrak{B} \models \varphi[\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)].$$

- Ist π ein Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{B}$ und φ ohne $\neg$:

$$\text{wenn } \mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n], \text{ so } \mathfrak{B} \models \varphi[\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)].$$

  Insbesondere: Ist $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in L^S$ eine konjunktive Anfrage, so

$$\text{wenn } \mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n], \text{ so } \mathfrak{B} \models \varphi[\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)].$$

$t_1 = t_2$:

$t_1 = t_2$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models t_1 = t_2[\bar{a}] \quad & \iff \quad t_1^{\mathfrak{A}}[\bar{a}] = t_2^{\mathfrak{A}}[\bar{a}] \\
(\Leftarrow, \pi \text{ inj.}) \quad & \iff \quad \pi(t_1^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]) = \pi(t_2^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]) \\
(\text{wegen (i)}) \quad & \iff \quad t_1^{\mathfrak{B}}[\pi(\bar{a})] = t_2^{\mathfrak{B}}[\pi(\bar{a})] \\
& \iff \quad \mathfrak{B} \models t_1 = t_2[\pi(\bar{a})].
\end{aligned}$$

$t_1 = t_2$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models t_1 = t_2[\bar{a}] \quad &\iff \quad t_1^{\mathfrak{A}}[\bar{a}] = t_2^{\mathfrak{A}}[\bar{a}] \\
(\Leftarrow,\ \pi \text{ inj.}) \quad &\iff \quad \pi(t_1^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]) = \pi(t_2^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]) \\
(\text{wegen (i)}) \quad &\iff \quad t_1^{\mathfrak{B}}[\pi(\bar{a})] = t_2^{\mathfrak{B}}[\pi(\bar{a})] \\
&\iff \quad \mathfrak{B} \models t_1 = t_2[\pi(\bar{a})].
\end{aligned}$$

$Rt_1 \ldots t_r$:

$t_1 = t_2$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models t_1 = t_2[\bar{a}] \quad &\iff \quad t_1^{\mathfrak{A}}[\bar{a}] = t_2^{\mathfrak{A}}[\bar{a}] \\ (\Leftarrow, \pi \text{ inj.}) \quad &\iff \quad \pi(t_1^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]) = \pi(t_2^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]) \\ (\text{wegen (i)}) \quad &\iff \quad t_1^{\mathfrak{B}}[\pi(\bar{a})] = t_2^{\mathfrak{B}}[\pi(\bar{a})] \\ &\iff \quad \mathfrak{B} \models t_1 = t_2[\pi(\bar{a})]. \end{aligned}$$

$Rt_1 \dots t_r$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models Rt_1 \dots t_r[\bar{a}] \quad &\iff \quad R^{\mathfrak{A}} t_1^{\mathfrak{A}}[\bar{a}] \dots t_r^{\mathfrak{A}}[\bar{a}] \\ &\iff \quad R^{\mathfrak{B}} \pi(t_1^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]) \dots \pi(t_r^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]) \\ (\Rightarrow, \pi \text{ Hom.} \quad & \quad\quad\quad\; \Leftarrow, \pi \text{ starker Hom.}) \\ (\text{wegen (i)}) \quad &\iff \quad R^{\mathfrak{B}} t_1^{\mathfrak{B}}[\pi(\bar{a})] \dots t_r^{\mathfrak{B}}[\pi(\bar{a})] \\ &\iff \quad \mathfrak{B} \models Rt_1 \dots t_r[\pi(\bar{a})]. \end{aligned}$$

Sei $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \exists y \psi$.

Sei $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \exists y \psi$. Da $y \notin \mathrm{fr}(\varphi)$, können wir o.B.d.A. annehmen, dass $y \notin \{x_1, \ldots, x_n\}$. Somit $\psi = \psi(x_1, \ldots, x_n, y)$. Nun gilt:

Sei $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \exists y \psi$. Da $y \notin \mathrm{fr}(\varphi)$, können wir o.B.d.A. annehmen, dass $y \notin \{x_1, \ldots, x_n\}$. Somit $\psi = \psi(x_1, \ldots, x_n, y)$. Nun gilt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{a}] \quad \Longleftrightarrow \quad \text{ex. } a \in A\text{: } \mathfrak{A} \models \psi[\bar{a}, a]$$

Sei $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \exists y \psi$. Da $y \notin \mathrm{fr}(\varphi)$, können wir o.B.d.A. annehmen, dass $y \notin \{x_1, \ldots, x_n\}$. Somit $\psi = \psi(x_1, \ldots, x_n, y)$. Nun gilt:

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{A} \models \varphi[\bar{a}] & \iff & \text{ex. } a \in A\text{: } \mathfrak{A} \models \psi[\bar{a}, a] \\ \iff \text{, Ind.vor.} & \iff & \text{ex. } a \in A\text{: } \mathfrak{B} \models \psi[\pi(\bar{a}), \pi(a)] \end{array}$$

Sei $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \exists y \psi$. Da $y \notin \mathrm{fr}(\varphi)$, können wir o.B.d.A. annehmen, dass $y \notin \{x_1, \ldots, x_n\}$. Somit $\psi = \psi(x_1, \ldots, x_n, y)$. Nun gilt:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{a}] & \Longleftrightarrow & \text{ex. } a \in A\text{: } \mathfrak{A} \models \psi[\bar{a}, a] \\
\Longleftrightarrow \text{, Ind.vor.} & \Longleftrightarrow & \text{ex. } a \in A\text{: } \mathfrak{B} \models \psi[\pi(\bar{a}), \pi(a)] \\
(\Leftarrow,\ \pi \text{ surjektiv}) & \Longleftrightarrow & \text{ex. } b \in B\text{: } \mathfrak{B} \models \psi[\pi(\bar{a}), b]
\end{array}
$$

Sei $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \exists y \psi$. Da $y \notin \mathrm{fr}(\varphi)$, können wir o.B.d.A. annehmen, dass $y \notin \{x_1, \ldots, x_n\}$. Somit $\psi = \psi(x_1, \ldots, x_n, y)$. Nun gilt:

$$\begin{array}{rcl}
\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{a}] & \iff & \text{ex. } a \in A\text{: } \mathfrak{A} \models \psi[\bar{a}, a] \\
\iff \text{, Ind.vor.} & \iff & \text{ex. } a \in A\text{: } \mathfrak{B} \models \psi[\pi(\bar{a}), \pi(a)] \\
(\Leftarrow,\ \pi \text{ surjektiv}) & \iff & \text{ex. } b \in B\text{: } \mathfrak{B} \models \psi[\pi(\bar{a}), b] \\
& \iff & \mathfrak{B} \models \varphi[\pi(\bar{a})].
\end{array}$$

Folgerung. Sei $\Phi \subseteq L_0^S$ ohne $=$ und $m \geq 1$. Hat Φ ein Modell, dessen Träger genau m Elemente hat, so hat Φ auch ein Modell mit genau $m+1$ Elementen (genauer: in jeder Mächtigkeit $\geq m$ hat Φ ein Modell).

Φ_{BA}:

$\forall x \forall y \; x \sqcap y = y \sqcap x$	$\sqcap$ kommutat.
$\forall x \forall y \forall z \; (x \sqcap y) \sqcap z = x \sqcap (y \sqcap z)$	$\sqcap$ assoziat.
$\forall x \forall y \; x \sqcup y = y \sqcup x$	$\sqcup$ kommutat.
$\forall x \forall y \forall z \; (x \sqcup y) \sqcup z = x \cup (y \sqcup z)$	$\sqcup$ assoziat.
$\forall x \forall y \forall z \; x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$	distributiv
$\forall x \forall y \forall z \; x \sqcup (y \sqcap z) = (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$	distributiv
$\forall x \forall y \; (x \sqcup y) \sqcap y = y$	Absorption
$\forall x \; (x \sqcap y) \sqcup y = y$	Absorption
$\forall x \; x \sqcap 1 = x$	1 neutral bei $\sqcap$
$\forall x \; x \sqcup 0 = x$	0 neutral bei $\sqcup$
$\forall x \forall y \; x \sqcap \sim x = 0$	Komplementgesetz
$\forall x \; x \sqcup \sim x = 1$	Komplementgesetz.

Sind

$$(\exists y(Exy \vee \neg\neg Eyx) \vee \neg\neg Eyx))$$

und

$$(\exists y(Exy \vee Eyx) \vee \neg\neg Eyx))$$

logisch äquivalent?

Sind

$$(\exists y(Exy \vee \neg\neg Eyx) \vee \neg\neg Eyx))$$

und

$$(\exists y(Exy \vee Eyx) \vee \neg\neg Eyx))$$

logisch äquivalent?

Ersetzungslemma. (Intuitiv: Ersetzt man in φ einen Teilausdruck ψ durch einen zu ψ logisch äquivalenten Ausdruck, so erhält man einen zu φ logisch äquivalenten Ausdruck.)

Sind

$$(\exists y(Exy \vee \neg\neg Eyx) \vee \neg\neg Eyx))$$

und

$$(\exists y(Exy \vee Eyx) \vee \neg\neg Eyx))$$

logisch äquivalent?

Ersetzungslemma. (Intuitiv: Ersetzt man in φ einen Teilausdruck ψ durch einen zu ψ logisch äquivalenten Ausdruck, so erhält man einen zu φ logisch äquivalenten Ausdruck.)

Gelte $\varphi_1 \equiv \psi_1$ und $\varphi_2 \equiv \psi_2$; dann

$\neg\varphi_1 \equiv \neg\psi_1$,

Sind

$$(\exists y(Exy \vee \neg\neg Eyx) \vee \neg\neg Eyx))$$

und

$$(\exists y(Exy \vee Eyx) \vee \neg\neg Eyx))$$

logisch äquivalent?

Ersetzungslemma. (Intuitiv: Ersetzt man in φ einen Teilausdruck ψ durch einen zu ψ logisch äquivalenten Ausdruck, so erhält man einen zu φ logisch äquivalenten Ausdruck.)

Gelte $\varphi_1 \equiv \psi_1$ und $\varphi_2 \equiv \psi_2$; dann

$$\neg\varphi_1 \equiv \neg\psi_1, \qquad (\varphi_1 \vee \varphi_2) \equiv (\psi_1 \vee \psi_2),$$

Sind

$$(\exists y(Exy \lor \neg\neg Eyx) \lor \neg\neg Eyx))$$

und

$$(\exists y(Exy \lor Eyx) \lor \neg\neg Eyx))$$

logisch äquivalent?

Ersetzungslemma. (Intuitiv: Ersetzt man in φ einen Teilausdruck ψ durch einen zu ψ logisch äquivalenten Ausdruck, so erhält man einen zu φ logisch äquivalenten Ausdruck.)

Gelte $\varphi_1 \equiv \psi_1$ und $\varphi_2 \equiv \psi_2$; dann

$$\neg\varphi_1 \equiv \neg\psi_1, \qquad (\varphi_1 \lor \varphi_2) \equiv (\psi_1 \lor \psi_2), \qquad \forall x\varphi_1 \equiv \forall x\psi_1. \qquad \exists x\varphi_1 \equiv \exists x\psi_1.$$

Sind

$$(\exists y(Exy \lor \neg\neg Eyx) \lor \neg\neg Eyx))$$

und

$$(\exists y(Exy \lor Eyx) \lor \neg\neg Eyx))$$

logisch äquivalent?

Ersetzungslemma. (Intuitiv: Ersetzt man in φ einen Teilausdruck ψ durch einen zu ψ logisch äquivalenten Ausdruck, so erhält man einen zu φ logisch äquivalenten Ausdruck.)

Gelte $\varphi_1 \equiv \psi_1$ und $\varphi_2 \equiv \psi_2$; dann

$$\neg\varphi_1 \equiv \neg\psi_1, \qquad (\varphi_1 \lor \varphi_2) \equiv (\psi_1 \lor \psi_2), \qquad \forall x\varphi_1 \equiv \forall x\psi_1. \qquad \exists x\varphi_1 \equiv \exists x\psi_1.$$

$$\begin{aligned}
\neg\neg Eyx &\equiv Eyx \\
(Exy \lor \neg\neg Eyx) &\equiv (Exy \lor Eyx) \\
\exists y(Exy \lor \neg\neg Eyx) &\equiv \exists y(Exy \lor Eyx) \\
(\exists y(Exy \lor \neg\neg Eyx) \lor \neg\neg Eyx)) &\equiv (\exists y(Exy \lor Eyx) \lor \neg\neg Eyx))
\end{aligned}$$

S-Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$, $x_1, \ldots, x_m$ paarweise verschiedene Variable, $a_1, \ldots, a_m \in A$

S-Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$, $x_1, \ldots, x_m$ paarweise verschiedene Variable, $a_1, \ldots, a_m \in A$

$$\mathfrak{I}\frac{a_1 \ldots a_m}{x_1 \ldots x_m} := (\mathfrak{A}, \beta\frac{a_1 \ldots a_m}{x_1 \ldots x_m}),$$

wobei $\beta\frac{a_1 \ldots a_m}{x_1 \ldots x_m}$ die Belegung in $\mathfrak{A}$ ist mit

$$\beta\frac{a_1 \ldots a_m}{x_1 \ldots x_m}(y) := \begin{cases} a_i & y = x_i \\ \beta(y) & y \neq x_1, \ldots, y \neq x_m \end{cases}$$

S-Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$, $x_1, \ldots, x_m$ paarweise verschiedene Variable, $a_1, \ldots, a_m \in A$

$$\mathfrak{I}\frac{a_1 \ldots a_m}{x_1 \ldots x_m} := (\mathfrak{A}, \beta\frac{a_1 \ldots a_m}{x_1 \ldots x_m}),$$

wobei $\beta\frac{a_1 \ldots a_m}{x_1 \ldots x_m}$ die Belegung in $\mathfrak{A}$ ist mit

$$\beta\frac{a_1 \ldots a_m}{x_1 \ldots x_m}(y) := \begin{cases} a_i & y = x_i \\ \beta(y) & y \neq x_1, \ldots, y \neq x_m \end{cases}$$

also für Terme $t_1, \ldots, t_m$:

$$\mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_1) \ldots \mathfrak{I}(t_m)}{x_1 \ldots x_m}(y) = \begin{cases} \mathfrak{I}(t_i) & y = x_i \\ \mathfrak{I}(y) & y \neq x_1, \ldots, y \neq x_m \end{cases}$$

Eine Abbildung

$$\sigma : V \to T^S$$

ist eine Substitution, wenn $\{x \mid \sigma(x) \neq x\}$ endlich ist.

Eine Abbildung

$$\sigma : V \to T^S$$

ist eine Substitution, wenn $\{x \mid \sigma(x) \neq x\}$ endlich ist.

Ist dann $\{x \mid \sigma(x) \neq x\} \subseteq \{x_1, \ldots, x_m\}$ mit paarweise verschiedenen x_i und ist $\sigma(x_1) = t_1, \ldots, \sigma(x_m) = t_m$, so schreiben wir für σ auch

$$\frac{t_1 \ldots t_m}{x_1 \ldots x_m}.$$

Eine Abbildung

$$\sigma : V \to T^S$$

ist eine Substitution, wenn $\{x \mid \sigma(x) \neq x\}$ endlich ist.

Ist dann $\{x \mid \sigma(x) \neq x\} \subseteq \{x_1, \ldots, x_m\}$ mit paarweise verschiedenen x_i und ist $\sigma(x_1) = t_1, \ldots, \sigma(x_m) = t_m$, so schreiben wir für σ auch

$$\frac{t_1 \ldots t_m}{x_1 \ldots x_m}.$$

Ist $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ eine S-Interpretation und σ eine Substitution, so sei

$$\mathfrak{I}^\sigma := (\mathfrak{A}, \mathfrak{I} \circ \sigma).$$

Somit:

Eine Abbildung

$$\sigma : V \to T^S$$

ist eine Substitution, wenn $\{x \mid \sigma(x) \neq x\}$ endlich ist.

Ist dann $\{x \mid \sigma(x) \neq x\} \subseteq \{x_1, \ldots, x_m\}$ mit paarweise verschiedenen x_i und ist $\sigma(x_1) = t_1, \ldots, \sigma(x_m) = t_m$, so schreiben wir für σ auch

$$\frac{t_1 \ldots t_m}{x_1 \ldots x_m}.$$

Ist $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ eine S-Interpretation und σ eine Substitution, so sei

$$\mathfrak{I}^\sigma := (\mathfrak{A}, \mathfrak{I} \circ \sigma).$$

Somit:

Ist $\sigma(x) = t$, so $\mathfrak{I}^\sigma(x) = (\mathfrak{I} \circ \sigma)(x) = \mathfrak{I}(\sigma(x)) = \mathfrak{I}(t)$.

Eine Abbildung

$$\sigma : V \to T^S$$

ist eine Substitution, wenn $\{x \mid \sigma(x) \neq x\}$ endlich ist.

Ist dann $\{x \mid \sigma(x) \neq x\} \subseteq \{x_1, \ldots, x_m\}$ mit paarweise verschiedenen x_i und ist $\sigma(x_1) = t_1, \ldots, \sigma(x_m) = t_m$, so schreiben wir für σ auch

$$\frac{t_1 \ldots t_m}{x_1 \ldots x_m}.$$

Ist $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ eine S-Interpretation und σ eine Substitution, so sei

$$\mathfrak{I}^\sigma := (\mathfrak{A}, \mathfrak{I} \circ \sigma).$$

Somit:

Ist $\sigma(x) = t$, so $\mathfrak{I}^\sigma(x) = (\mathfrak{I} \circ \sigma)(x) = \mathfrak{I}(\sigma(x)) = \mathfrak{I}(t)$.

Ist $\sigma(x) = x$, so $\mathfrak{I}^\sigma(x) = (\mathfrak{I} \circ \sigma)(x) = \mathfrak{I}(\sigma(x)) = \mathfrak{I}(x)$.

Eine Abbildung

$$\sigma : V \to T^S$$

ist eine Substitution, wenn $\{x \mid \sigma(x) \neq x\}$ endlich ist.

Ist dann $\{x \mid \sigma(x) \neq x\} \subseteq \{x_1, \ldots, x_m\}$ mit paarweise verschiedenen x_i und ist $\sigma(x_1) = t_1, \ldots, \sigma(x_m) = t_m$, so schreiben wir für σ auch

$$\frac{t_1 \ldots t_m}{x_1 \ldots x_m}.$$

Ist $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ eine S-Interpretation und σ eine Substitution, so sei

$$\mathfrak{I}^\sigma := (\mathfrak{A}, \mathfrak{I} \circ \sigma).$$

Somit:

Ist $\sigma(x) = t$, so $\mathfrak{I}^\sigma(x) = (\mathfrak{I} \circ \sigma)(x) = \mathfrak{I}(\sigma(x)) = \mathfrak{I}(t)$.

Ist $\sigma(x) = x$, so $\mathfrak{I}^\sigma(x) = (\mathfrak{I} \circ \sigma)(x) = \mathfrak{I}(\sigma(x)) = \mathfrak{I}(x)$.

Ist daher $\sigma = \dfrac{t_1 \ldots t_m}{x_1 \ldots x_m}$, so $\mathfrak{I}^\sigma = \mathfrak{I}\dfrac{\mathfrak{I}(t_1) \ldots \mathfrak{I}(t_m)}{x_1 \ldots x_m}$.

Substitutionslemma. Für jede Substitution $\sigma : V \to T^S$, jeden Term $t \in T^S$ und jeden Ausdruck $\varphi \in L^S$ definieren wir

$$t^\sigma \quad \text{und} \qquad \varphi^\sigma,$$

Substitutionslemma. Für jede Substitution $\sigma : V \to T^S$, jeden Term $t \in T^S$ und jeden Ausdruck $\varphi \in L^S$ definieren wir

$$t^\sigma \quad \text{und} \quad \varphi^\sigma,$$

sodass für alle S-Interpretationen $\mathfrak{I}$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}(t^\sigma) \quad &= \quad \mathfrak{I}^\sigma(t) \\ \mathfrak{I} \models \varphi^\sigma \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{I}^\sigma \models \varphi; \end{aligned}$$

Substitutionslemma. Für jede Substitution $\sigma : V \to T^S$, jeden Term $t \in T^S$ und jeden Ausdruck $\varphi \in L^S$ definieren wir

$$t^\sigma \quad \text{und} \quad \varphi^\sigma,$$

sodass für alle S-Interpretationen $\mathfrak{I}$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}(t^\sigma) \quad &= \quad \mathfrak{I}^\sigma(t) \\ \mathfrak{I} \models \varphi^\sigma \quad &\iff \quad \mathfrak{I}^\sigma \models \varphi; \end{aligned}$$

also

$$\mathfrak{I}(t\frac{t_1 \ldots t_m}{x_1 \ldots x_m}) \quad = \quad \mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_1) \ldots \mathfrak{I}(t_m)}{x_1 \ldots x_m}(t)$$

$$\mathfrak{I} \models \varphi\frac{t_1 \ldots t_m}{x_1 \ldots x_m} \quad \iff \quad \mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_1) \ldots \mathfrak{I}(t_m)}{x_1 \ldots x_m} \models \varphi.$$

Substitutionslemma. Für jede Substitution $\sigma : V \to T^S$, jeden Term $t \in T^S$ und jeden Ausdruck $\varphi \in L^S$ definieren wir

$$t^\sigma \quad \text{und} \quad \varphi^\sigma,$$

sodass für alle S-Interpretationen $\mathfrak{I}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{I}(t^\sigma) & = & \mathfrak{I}^\sigma(t) \\ \mathfrak{I} \models \varphi^\sigma & \iff & \mathfrak{I}^\sigma \models \varphi; \end{array}$$

also

$$\mathfrak{I}(t\frac{t_1 \ldots t_m}{x_1 \ldots x_m}) \quad = \quad \mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_1) \ldots \mathfrak{I}(t_m)}{x_1 \ldots x_m}(t)$$

$$\mathfrak{I} \models \varphi\frac{t_1 \ldots t_m}{x_1 \ldots x_m} \quad \iff \quad \mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_1) \ldots \mathfrak{I}(t_m)}{x_1 \ldots x_m} \models \varphi.$$

Weiterhin gilt:

$$\varphi\frac{x}{x} = \varphi.$$

$$t = x: \qquad\qquad t^\sigma := \sigma(x)$$

$$
\begin{aligned}
t = x: &\qquad t^\sigma := \sigma(x) \\
t = c: &\qquad t^\sigma := c
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
t = x: &\qquad t^\sigma := \sigma(x) \\
t = c: &\qquad t^\sigma := c \\
t = f(t_1, \ldots, t_n): &\qquad t^\sigma := f(t_1^\sigma, \ldots, t_n^\sigma)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
t = x :& \qquad t^{\sigma} := \sigma(x) \\
t = c :& \qquad t^{\sigma} := c \\
t = f(t_1, \ldots, t_n) :& \qquad t^{\sigma} := f(t_1^{\sigma}, \ldots, t_n^{\sigma}) \\
\varphi = t_1 \equiv t_2 :& \qquad \varphi^{\sigma} := t_1^{\sigma} \equiv t_2^{\sigma}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
t = x: &\qquad t^\sigma := \sigma(x) \\
t = c: &\qquad t^\sigma := c \\
t = f(t_1, \ldots, t_n): &\qquad t^\sigma := f(t_1^\sigma, \ldots, t_n^\sigma) \\
\\
\varphi = t_1 \equiv t_2: &\qquad \varphi^\sigma := t_1^\sigma \equiv t_2^\sigma \\
\varphi = R t_1 \ldots t_n: &\qquad \varphi^\sigma := R t_1^\sigma \ldots t_n^\sigma
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
t = x :& \qquad t^{\sigma} := \sigma(x) \\
t = c :& \qquad t^{\sigma} := c \\
t = f(t_1, \ldots, t_n) :& \qquad t^{\sigma} := f(t_1^{\sigma}, \ldots, t_n^{\sigma}) \\[1em]
\varphi = t_1 \equiv t_2 :& \qquad \varphi^{\sigma} := t_1^{\sigma} \equiv t_2^{\sigma} \\
\varphi = Rt_1 \ldots t_n :& \qquad \varphi^{\sigma} := Rt_1^{\sigma} \ldots t_n^{\sigma} \\
\varphi = \neg\psi :& \qquad \varphi^{\sigma} := \neg[\psi]^{\sigma}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
t = x : &\quad t^{\sigma} := \sigma(x) \\
t = c : &\quad t^{\sigma} := c \\
t = f(t_1, \dots, t_n) : &\quad t^{\sigma} := f(t_1^{\sigma}, \dots, t_n^{\sigma}) \\
\\
\varphi = t_1 \equiv t_2 : &\quad \varphi^{\sigma} := t_1^{\sigma} \equiv t_2^{\sigma} \\
\varphi = Rt_1 \dots t_n : &\quad \varphi^{\sigma} := Rt_1^{\sigma} \dots t_n^{\sigma} \\
\varphi = \neg\psi : &\quad \varphi^{\sigma} := \neg[\psi]^{\sigma} \\
\varphi = (\psi \vee \chi) : &\quad \varphi^{\sigma} := (\psi^{\sigma} \vee \chi^{\sigma})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
t = x : &\quad t^\sigma := \sigma(x) \\
t = c : &\quad t^\sigma := c \\
t = f(t_1, \ldots, t_n) : &\quad t^\sigma := f(t_1^\sigma, \ldots, t_n^\sigma)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi = t_1 \equiv t_2 : &\quad \varphi^\sigma := t_1^\sigma \equiv t_2^\sigma \\
\varphi = Rt_1 \ldots t_n : &\quad \varphi^\sigma := Rt_1^\sigma \ldots t_n^\sigma \\
\varphi = \neg\psi : &\quad \varphi^\sigma := \neg[\psi]^\sigma \\
\varphi = (\psi \vee \chi) : &\quad \varphi^\sigma := (\psi^\sigma \vee \chi^\sigma) \\
\varphi = (\psi \wedge \chi) : &\quad \varphi^\sigma := (\psi^\sigma \wedge \chi^\sigma)
\end{aligned}
$$

$\varphi = \underset{\forall}{\exists} x \psi :$

$\varphi = \underset{\forall}{\exists} x \psi :$

$$\varphi^{\sigma} := \underset{\forall}{\exists} u \left[\psi \frac{\sigma(y_1) \quad \ldots \quad \sigma(y_r) \quad u}{y_1 \quad \ldots \quad y_r \quad x} \right]$$

$\varphi = \underset{\forall}{\exists} x \psi$:

$$\varphi^{\sigma} := \underset{\forall}{\exists} u \left[\psi \frac{\sigma(y_1) \quad \dots \quad \sigma(y_r) \quad u}{y_1 \quad \dots \quad y_r \quad x}\right]$$

Dabei sind $y_1, \dots, y_r$ paarweise verschieden mit

$$\{y_1, \dots, y_r\} \quad := \quad \{y \mid y \in \mathrm{fr}(\exists x \psi) \text{ und } y \neq \sigma(y)\}$$

und

$\varphi = \underset{\forall}{\exists} x\psi$:

$$\varphi^{\sigma} := \underset{\forall}{\exists} u \left[\psi \frac{\sigma(y_1) \quad \ldots \quad \sigma(y_r) \quad u}{y_1 \quad \ldots \quad y_r \quad x}\right]$$

Dabei sind $y_1, \ldots, y_r$ paarweise verschieden mit

$$\{y_1, \ldots, y_r\} \quad := \quad \{y \mid y \in \mathrm{fr}(\exists x\psi) \text{ und } y \neq \sigma(y)\}$$

und

$$u := \begin{cases} x, & \text{falls } x \notin \mathrm{var}(\sigma(y_1)) \cup \ldots \cup \mathrm{var}(\sigma(y_r)) \\ \text{die erste Variable, die in} & \\ \psi, \sigma(y_1), \ldots, \sigma(y_r) \text{ nicht vorkommt,} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis (gebundene Umbenennung): Wenn $y = x$, dann Beh. klar, da $\varphi\frac{x}{x} = \varphi$.

Beweis (gebundene Umbenennung): Wenn $y = x$, dann Beh. klar, da $\varphi\frac{x}{x} = \varphi$.

Sei $y \neq x$ und somit $y \notin \mathrm{fr}(\varphi)$.

Beweis (gebundene Umbenennung): Wenn $y = x$, dann Beh. klar, da $\varphi\frac{x}{x} = \varphi$.

Sei $y \neq x$ und somit $y \notin \mathrm{fr}(\varphi)$.Sei $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
& \mathfrak{I} \models \exists y\, \varphi\frac{y}{x} \\
\iff \quad & \text{ex. } a \in A: \ \mathfrak{I}\frac{a}{y} \models \varphi\frac{y}{x} \\
\iff \quad & \text{ex. } a \in A: \ (\mathfrak{I}\frac{a}{y})\frac{\mathfrak{I}\frac{a}{y}(y)}{x} \models \varphi \qquad \text{(Sub.lem.)} \\
\iff \quad & \text{ex. } a \in A: \ \mathfrak{I}\frac{a\ a}{y\ x} \models \varphi \qquad (\text{da } \mathfrak{I}\tfrac{a}{y}(y) = a \text{ und } y \neq x) \\
\iff \quad & \text{ex. } a \in A: \ \mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi \qquad (\text{da } y \notin \mathrm{fr}(\varphi) \text{ und Koin.lem.}) \\
\iff \quad & \mathfrak{I} \models \exists x \varphi.
\end{aligned}
$$

Pränexe Normalform

Ein Ausdruck $\varphi \in L^S$ ist in pränexer Normalform, wenn

$$\varphi = \underbrace{Q_1 x_1 \ldots Q_m x_m}_{\text{Präfix}} \underbrace{\varphi_0}_{\text{Kern}}$$

mit $Q_1, \ldots, Q_m \in \{\forall, \exists\}$ und φ_0 quantorenfrei.

Pränexe Normalform

Ein Ausdruck $\varphi \in L^S$ ist in pränexer Normalform, wenn

$$\varphi = \underbrace{Q_1 x_1 \ldots Q_m x_m}_{\text{Präfix}}\ \underbrace{\varphi_0}_{\text{Kern}}$$

mit $Q_1, \ldots, Q_m \in \{\forall, \exists\}$ und φ_0 quantorenfrei.

Satz über die pränexe Normalform. Zu jeden Ausdruck $\varphi \in L^S$ läßt sich in polynomieller Zeit ein logisch äquivalenter Ausdruck $\psi \in L^S$ in pränexer Normalform angeben mit $\mathrm{fr}(\varphi) = \mathrm{fr}(\psi)$.

Pränexe Normalform

Ein Ausdruck $\varphi \in L^S$ ist in pränexer Normalform, wenn

$$\varphi = \underbrace{Q_1 x_1 \ldots Q_m x_m}_{\text{Präfix}} \underbrace{\varphi_0}_{\text{Kern}}$$

mit $Q_1, \ldots, Q_m \in \{\forall, \exists\}$ und φ_0 quantorenfrei.

Satz über die pränexe Normalform. Zu jeden Ausdruck $\varphi \in L^S$ läßt sich in polynomieller Zeit ein logisch äquivalenter Ausdruck $\psi \in L^S$ in pränexer Normalform angeben mit $\mathrm{fr}(\varphi) = \mathrm{fr}(\psi)$.

Beweis induktiv über den Aufbau der Ausdrücke mit 1. und 2.:

1. $\neg\exists x\psi \equiv \forall x\neg\psi,\qquad \neg\forall x\psi \equiv \exists x\neg\psi$

1. $\neg\exists x\psi \equiv \forall x\neg\psi$, $\neg\forall x\psi \equiv \exists x\neg\psi$
2. $(\exists x\varphi\vee\psi) \equiv \exists y(\varphi\frac{y}{x}\vee\psi)$, wenn $y \notin \mathrm{fr}((\exists x\varphi\vee\psi))$
   insbesondere $(\exists x\varphi\vee\psi) \equiv \exists x(\varphi\vee\psi)$, wenn $x \notin \mathrm{fr}(\psi)$

1. $\neg\exists x\psi \equiv \forall x\neg\psi$, $\qquad\qquad$ $\neg\forall x\psi \equiv \exists x\neg\psi$

2. $(\exists x\varphi\vee\psi) \equiv \exists y(\varphi\frac{y}{x}\vee\psi)$, wenn $y \notin \mathrm{fr}((\exists x\varphi\vee\psi))$

   insbesondere $(\exists x\varphi\vee\psi) \equiv \exists x(\varphi\vee\psi)$, wenn $x \notin \mathrm{fr}(\psi)$

   $(\varphi\vee\exists x\psi) \equiv \exists y(\varphi\vee\psi\frac{y}{x})$, wenn $y \notin \mathrm{fr}((\varphi\vee\exists x\psi))$

   $(\forall x\varphi\vee\psi) \equiv \forall y(\varphi\frac{y}{x}\vee\psi)$, wenn $y \notin \mathrm{fr}((\forall x\varphi\vee\psi))$

   $(\varphi\vee\forall x\psi) \equiv \forall y(\varphi\vee\psi\frac{y}{x})$, wenn $y \notin \mathrm{fr}((\varphi\vee\forall x\psi))$.

1. $\neg\exists x\psi \equiv \forall x\neg\psi,$ $\qquad\qquad$ $\neg\forall x\psi \equiv \exists x\neg\psi$

2. $(\exists x\varphi\vee\psi) \equiv \exists y(\varphi\frac{y}{x}\vee\psi)$, wenn $y \notin \mathrm{fr}((\exists x\varphi\vee\psi))$

   insbesondere $(\exists x\varphi\vee\psi) \equiv \exists x(\varphi\vee\psi)$, wenn $x \notin \mathrm{fr}(\psi)$

   $(\varphi\vee\exists x\psi) \equiv \exists y(\varphi\vee\psi\frac{y}{x})$, wenn $y \notin \mathrm{fr}((\varphi\vee\exists x\psi))$

   $(\forall x\varphi\vee\psi) \equiv \forall y(\varphi\frac{y}{x}\vee\psi)$, wenn $y \notin \mathrm{fr}((\forall x\varphi\vee\psi))$

   $(\varphi\vee\forall x\psi) \equiv \forall y(\varphi\vee\psi\frac{y}{x})$, wenn $y \notin \mathrm{fr}((\varphi\vee\forall x\psi))$.

Beispiel: Sei

$$\varphi = (\neg\exists z Pxyz \vee \forall x\exists y Rxy).$$

Dann

1. $\neg\exists x\psi \equiv \forall x\neg\psi, \qquad\qquad \neg\forall x\psi \equiv \exists x\neg\psi$
2. $(\exists x\varphi\vee\psi) \equiv \exists y(\varphi\frac{y}{x}\vee\psi)$, wenn $y \notin \mathrm{fr}((\exists x\varphi\vee\psi))$
   insbesondere $(\exists x\varphi\vee\psi) \equiv \exists x(\varphi\vee\psi)$, wenn $x \notin \mathrm{fr}(\psi)$
   $(\varphi\vee\exists x\psi) \equiv \exists y(\varphi\vee\psi\frac{y}{x})$, wenn $y \notin \mathrm{fr}((\varphi\vee\exists x\psi))$
   $(\forall x\varphi\vee\psi) \equiv \forall y(\varphi\frac{y}{x}\vee\psi)$, wenn $y \notin \mathrm{fr}((\forall x\varphi\vee\psi))$
   $(\varphi\vee\forall x\psi) \equiv \forall y(\varphi\vee\psi\frac{y}{x})$, wenn $y \notin \mathrm{fr}((\varphi\vee\forall x\psi))$.

Beispiel: Sei

$$\varphi = (\neg\exists z Pxyz \vee \forall x\exists y Rxy).$$

Dann

$$(\neg\exists z Pxyz \vee \forall x\exists y Rxy) \quad \overset{1}{\equiv} \quad (\forall z\neg Pxyz \vee \forall x\exists y Rxy)$$

1. $\neg\exists x\psi \equiv \forall x\neg\psi$, $\qquad\qquad$ $\neg\forall x\psi \equiv \exists x\neg\psi$

2. $(\exists x\varphi\vee\psi) \equiv \exists y(\varphi\frac{y}{x}\vee\psi)$, wenn $y \notin \mathrm{fr}((\exists x\varphi\vee\psi))$

   insbesondere $(\exists x\varphi\vee\psi) \equiv \exists x(\varphi\vee\psi)$, wenn $x \notin \mathrm{fr}(\psi)$

   $(\varphi\vee\exists x\psi) \equiv \exists y(\varphi\vee\psi\frac{y}{x})$, wenn $y \notin \mathrm{fr}((\varphi\vee\exists x\psi))$

   $(\forall x\varphi\vee\psi) \equiv \forall y(\varphi\frac{y}{x}\vee\psi)$, wenn $y \notin \mathrm{fr}((\forall x\varphi\vee\psi))$

   $(\varphi\vee\forall x\psi) \equiv \forall y(\varphi\vee\psi\frac{y}{x})$, wenn $y \notin \mathrm{fr}((\varphi\vee\forall x\psi))$.

Beispiel: Sei

$$\varphi = (\neg\exists z Pxyz \vee \forall x\exists y Rxy).$$

Dann

$$\begin{aligned} (\neg\exists z Pxyz \vee \forall x\exists y Rxy) &\overset{1}{\equiv} (\forall z\neg Pxyz \vee \forall x\exists y Rxy) \\ &\overset{2}{\equiv} \forall z(\neg Pxyz \vee \forall x\exists y Rxy) \end{aligned}$$

1. $\neg\exists x\psi \equiv \forall x\neg\psi$, $\qquad \neg\forall x\psi \equiv \exists x\neg\psi$

2. $(\exists x\varphi\vee\psi) \equiv \exists y(\varphi\frac{y}{x}\vee\psi)$, wenn $y \notin \mathrm{fr}((\exists x\varphi\vee\psi))$

   insbesondere $(\exists x\varphi\vee\psi) \equiv \exists x(\varphi\vee\psi)$, wenn $x \notin \mathrm{fr}(\psi)$

   $(\varphi\vee\exists x\psi) \equiv \exists y(\varphi\vee\psi\frac{y}{x})$, wenn $y \notin \mathrm{fr}((\varphi\vee\exists x\psi))$

   $(\forall x\varphi\vee\psi) \equiv \forall y(\varphi\frac{y}{x}\vee\psi)$, wenn $y \notin \mathrm{fr}((\forall x\varphi\vee\psi))$

   $(\varphi\vee\forall x\psi) \equiv \forall y(\varphi\vee\psi\frac{y}{x})$, wenn $y \notin \mathrm{fr}((\varphi\vee\forall x\psi))$.

Beispiel: Sei

$$\varphi = (\neg\exists z Pxyz \vee \forall x\exists y Rxy).$$

Dann

$$\begin{aligned} (\neg\exists z Pxyz \vee \forall x\exists y Rxy) &\overset{1}{\equiv} (\forall z\neg Pxyz \vee \forall x\exists y Rxy) \\ &\overset{2}{\equiv} \forall z(\neg Pxyz \vee \forall x\exists y Rxy) \\ &\overset{2}{\equiv} \forall z\forall u(\neg Pxyz \vee \exists y Ruy) \end{aligned}$$

1. $\neg\exists x\psi \equiv \forall x\neg\psi,\qquad \neg\forall x\psi \equiv \exists x\neg\psi$

2. $(\exists x\varphi\vee\psi) \equiv \exists y(\varphi\frac{y}{x}\vee\psi)$, wenn $y \notin \mathrm{fr}((\exists x\varphi\vee\psi))$

   insbesondere $(\exists x\varphi\vee\psi) \equiv \exists x(\varphi\vee\psi)$, wenn $x \notin \mathrm{fr}(\psi)$

   $(\varphi\vee\exists x\psi) \equiv \exists y(\varphi\vee\psi\frac{y}{x})$, wenn $y \notin \mathrm{fr}((\varphi\vee\exists x\psi))$

   $(\forall x\varphi\vee\psi) \equiv \forall y(\varphi\frac{y}{x}\vee\psi)$, wenn $y \notin \mathrm{fr}((\forall x\varphi\vee\psi))$

   $(\varphi\vee\forall x\psi) \equiv \forall y(\varphi\vee\psi\frac{y}{x})$, wenn $y \notin \mathrm{fr}((\varphi\vee\forall x\psi))$.

Beispiel: Sei

$$\varphi = (\neg\exists z Pxyz \vee \forall x\exists y Rxy).$$

Dann

$$\begin{aligned}
(\neg\exists z Pxyz \vee \forall x\exists y Rxy) &\overset{1}{\equiv} (\forall z\neg Pxyz \vee \forall x\exists y Rxy)\\
&\overset{2}{\equiv} \forall z(\neg Pxyz \vee \forall x\exists y Rxy)\\
&\overset{2}{\equiv} \forall z\forall u(\neg Pxyz \vee \exists y Ruy)\\
&\overset{2}{\equiv} \forall z\forall u\exists v(\neg Pxyz \vee Ruv).
\end{aligned}$$

Skolemsche Normalform

Ein Ausdruck ist universell (existentiell), wenn er in pränexer Normalform ist und alle Quantoren Allquantoren (Existenzquantoren) sind.

Skolemsche Normalform

Ein Ausdruck ist universell (existentiell), wenn er in pränexer Normalform ist und alle Quantoren Allquantoren (Existenzquantoren) sind.

Ausdrücke φ und ψ sind erfüllbarkeitsäquivalent, wenn

$$\text{Erf}\ \varphi \iff \text{Erf}\ \psi.$$

Satz über die Skolemsche Normalform. Zu jeden Ausdruck φ läßt sich in polynomieller Zeit ein erfüllbarkeitsäquivalenter, universeller Ausdruck φ' in pränexer Normalform angeben mit $\mathrm{fr}(\varphi) = \mathrm{fr}(\varphi')$. In φ' kommen neben den Symbolen aus φ gegebenfalls noch weitere Funktionssymbole und Konstantensymbole vor.

Satz über die Skolemsche Normalform. Zu jeden Ausdruck φ läßt sich in polynomieller Zeit ein erfüllbarkeitsäquivalenter, universeller Ausdruck φ' in pränexer Normalform angeben mit $\mathrm{fr}(\varphi) = \mathrm{fr}(\varphi')$. In φ' kommen neben den Symbolen aus φ gegebenfalls noch weitere Funktionssymbole und Konstantensymbole vor.

Seien S bzw. S' die Menge der Symbole in φ bzw. in φ'. Dann gilt:

(1) $\varphi' \models \varphi$

(2) Wenn Erf φ, so Erf φ' (wegen (1) sind somit φ und φ' erfüllbarkeitsäquivalent): Zu jeder S-Struktur $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A} \models \varphi$ gibt es eine S'-Expansion $\mathfrak{A}'$ mit $\mathfrak{A}' \models \varphi'$.

(3) $\mathrm{fr}(\varphi) = \mathrm{fr}(\varphi')$.

Algorithmus: Man bringe φ zunächst in pränexe NF

Algorithmus: Man bringe φ zunächst in pränexe NF und eliminiere anschließend "von links beginnend" die Existenzquantoren im Präfix wie folgt:

Algorithmus: Man bringe φ zunächst in pränexe NF und eliminiere anschließend "von links beginnend" die Existenzquantoren im Präfix wie folgt:

Sei $\varphi_1 \in L^S$ und $\varphi_1 = \forall x_1 \ldots \forall x_k \exists x_{k+1} \chi$.

Algorithmus: Man bringe φ zunächst in pränexe NF und eliminiere anschließend "von links beginnend" die Existenzquantoren im Präfix wie folgt:

Sei $\varphi_1 \in L^S$ und $\varphi_1 = \forall x_1 \ldots \forall x_k \exists x_{k+1} \chi$.

Man wähle $f \notin S$, f k-stellig (falls $k = 0$, so sei f ein Konstantensymbol).

Algorithmus: Man bringe φ zunächst in pränexe NF und eliminiere anschließend "von links beginnend" die Existenzquantoren im Präfix wie folgt:

Sei $\varphi_1 \in L^S$ und $\varphi_1 = \forall x_1 \ldots \forall x_k \exists x_{k+1} \chi$.

Man wähle $f \notin S$, f k-stellig (falls $k = 0$, so sei f ein Konstantensymbol). Wir setzen

$$\psi_1 = \forall x_1 \ldots \forall x_k \ \chi \frac{f(x_1, \ldots, x_k)}{x_{k+1}}$$

Algorithmus: Man bringe φ zunächst in pränexe NF und eliminiere anschließend "von links beginnend" die Existenzquantoren im Präfix wie folgt:

Sei $\varphi_1 \in L^S$ und $\varphi_1 = \forall x_1 \ldots \forall x_k \exists x_{k+1} \chi$.

Man wähle $f \notin S$, f k-stellig (falls $k = 0$, so sei f ein Konstantensymbol). Wir setzen

$$\psi_1 = \forall x_1 \ldots \forall x_k \ \chi \frac{f(x_1, \ldots, x_k)}{x_{k+1}}$$

Dann gilt:

(1) $\psi_1 \models \varphi_1$

(2) Wenn Erf φ_1, so Erf ψ_1 (wegen (1) sind somit φ_1 und ψ_1 erfüllbarkeitsäquivalent): Zu jeder S-Struktur $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A} \models \varphi_1$ gibt es eine $(S \cup \{f\})$-Expansion $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{B} \models \psi_1$.

(3) $\mathrm{fr}(\varphi_1) = \mathrm{fr}(\psi_1)$.

Eine Sequenz

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta$$

ist korrekt, wenn $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \models \beta$.

Eine Sequenzenregel

$$\begin{array}{c} \Gamma_1, \beta_1 \\ \vdots \\ \Gamma_s, \beta_s \\ \hline \Gamma, \beta \end{array}$$

ist korrekt, wenn sie bei Anwendung auf korrekte Sequenzen eine korrekte Sequenz liefert. Ist $s = 0$, so bedeutet dies: Γ, β ist korrekt.

Ein Sequenzenkalkül $\mathfrak{S}$ ist eine Menge von Sequenzenregeln.

Eine Sequenz Γ, β ist in $\mathfrak{S}$ ableitbar oder in $\mathfrak{S}$ formal beweisbar, $\vdash_{\mathfrak{S}} \Gamma, \beta$, wenn sie durch endlichmalige Anwendung der Regeln in $\mathfrak{S}$ gewonnen werden kann.

$\mathfrak{S}$ ist korrekt: Alle Regeln in $\mathfrak{S}$ sind korrekt.

Bemerkung. Ist $\mathfrak{S}$ korrekt, so ist jede in $\mathfrak{S}$ ableitbare Sequenz korrekt.

$\mathfrak{S}$ ist vollständig: Jede korrekte Sequenz ist in $\mathfrak{S}$ ableitbar.

Eine Sequenz

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \psi$$

ist korrekt, wenn $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\} \models \psi$.

Eine Sequenz

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \psi$$

ist korrekt, wenn $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\} \models \psi$.

Eine Sequenzenregel $\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1, \psi_1 \\ \vdots \\ \Gamma_s, \psi_s\end{array}}{\Gamma, \psi}$ ist korrekt, wenn sie bei Anwendung auf korrekte Sequenzen eine korrekte Sequenz liefert. Ist $s = 0$, so bedeutet dies: Γ, ψ ist korrekt.

Eine Sequenz

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \psi$$

ist korrekt, wenn $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\} \models \psi$.

Eine Sequenzenregel

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma_1, \psi_1 \\ \vdots \\ \Gamma_s, \psi_s\end{array}}{\Gamma, \psi}$$

ist korrekt, wenn sie bei Anwendung auf korrekte Sequenzen eine korrekte Sequenz liefert. Ist $s = 0$, so bedeutet dies: Γ, ψ ist korrekt.

Ein Sequenzenkalkül $\mathfrak{S}$ ist eine Menge von Sequenzenregeln.

Eine Sequenz

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \psi$$

ist korrekt, wenn $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\} \models \psi$.

Eine Sequenzenregel

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma_1, \psi_1 \\ \vdots \\ \Gamma_s, \psi_s\end{array}}{\Gamma, \psi}$$

ist korrekt, wenn sie bei Anwendung auf korrekte Sequenzen eine korrekte Sequenz liefert. Ist $s = 0$, so bedeutet dies: Γ, ψ ist korrekt.

Ein Sequenzenkalkül $\mathfrak{S}$ ist eine Menge von Sequenzenregeln.

Eine Sequenz Γ, ψ ist in $\mathfrak{S}$ ableitbar oder in $\mathfrak{S}$ formal beweisbar, $\vdash_{\mathfrak{S}} \Gamma, \psi$, wenn sie durch endlichmalige Anwendung der Regeln in $\mathfrak{S}$ gewonnen werden kann.

Eine Sequenz

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \psi$$

ist korrekt, wenn $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\} \models \psi$.

Eine Sequenzenregel

$$\begin{array}{c} \Gamma_1, \psi_1 \\ \vdots \\ \Gamma_s, \psi_s \\ \hline \Gamma, \psi \end{array}$$

ist korrekt, wenn sie bei Anwendung auf korrekte Sequenzen eine korrekte Sequenz liefert. Ist $s = 0$, so bedeutet dies: Γ, ψ ist korrekt.

Ein Sequenzenkalkül $\mathfrak{S}$ ist eine Menge von Sequenzenregeln.

Eine Sequenz Γ, ψ ist in $\mathfrak{S}$ ableitbar oder in $\mathfrak{S}$ formal beweisbar, $\vdash_{\mathfrak{S}} \Gamma, \psi$, wenn sie durch endlichmalige Anwendung der Regeln in $\mathfrak{S}$ gewonnen werden kann.

$\mathfrak{S}$ ist korrekt: Alle Regeln in $\mathfrak{S}$ sind korrekt.

Eine Sequenz

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \psi$$

ist korrekt, wenn $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\} \models \psi$.

Eine Sequenzenregel
$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma_1, \psi_1 \\ \vdots \\ \Gamma_s, \psi_s\end{array}}{\Gamma, \psi}$$
ist korrekt, wenn sie bei Anwendung auf korrekte Sequenzen eine korrekte Sequenz liefert. Ist $s = 0$, so bedeutet dies: Γ, ψ ist korrekt.

Ein Sequenzenkalkül $\mathfrak{S}$ ist eine Menge von Sequenzenregeln.

Eine Sequenz Γ, ψ ist in $\mathfrak{S}$ ableitbar oder in $\mathfrak{S}$ formal beweisbar, $\vdash_{\mathfrak{S}} \Gamma, \psi$, wenn sie durch endlichmalige Anwendung der Regeln in $\mathfrak{S}$ gewonnen werden kann.

$\mathfrak{S}$ ist korrekt: Alle Regeln in $\mathfrak{S}$ sind korrekt.

Bemerkung. Ist $\mathfrak{S}$ korrekt, so ist jede in $\mathfrak{S}$ ableitbare Sequenz korrekt.

Eine Sequenz

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \psi$$

ist korrekt, wenn $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\} \models \psi$.

Eine Sequenzenregel

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma_1, \psi_1 \\ \vdots \\ \Gamma_s, \psi_s\end{array}}{\Gamma, \psi}$$

ist korrekt, wenn sie bei Anwendung auf korrekte Sequenzen eine korrekte Sequenz liefert. Ist $s = 0$, so bedeutet dies: Γ, ψ ist korrekt.

Ein Sequenzenkalkül $\mathfrak{S}$ ist eine Menge von Sequenzenregeln.

Eine Sequenz Γ, ψ ist in $\mathfrak{S}$ ableitbar oder in $\mathfrak{S}$ formal beweisbar, $\vdash_{\mathfrak{S}} \Gamma, \psi$, wenn sie durch endlichmalige Anwendung der Regeln in $\mathfrak{S}$ gewonnen werden kann.

$\mathfrak{S}$ ist korrekt: Alle Regeln in $\mathfrak{S}$ sind korrekt.

Bemerkung. Ist $\mathfrak{S}$ korrekt, so ist jede in $\mathfrak{S}$ ableitbare Sequenz korrekt.

$\mathfrak{S}$ ist vollständig: Jede korrekte Sequenz ist in $\mathfrak{S}$ ableitbar.

Ein korrekter und vollständiger Sequenzenkalkül $\mathfrak{S}_0$ für AA$(\neg, \vee)$

(Vor) $$\frac{}{\Gamma, \alpha}$$ falls α in Γ

(Ant) $$\frac{\Gamma, \alpha}{\Gamma', \alpha}$$ falls jeder Ausdruck in Γ auch in Γ' vorkommt

(FU) $$\frac{\Gamma, \alpha, \beta \qquad \Gamma, \neg\alpha, \beta}{\Gamma, \beta}$$

(Wid) $$\frac{\Gamma, \neg\alpha, \beta \qquad \Gamma, \neg\alpha, \neg\beta}{\Gamma, \alpha}$$

($\vee$A) $$\frac{\Gamma, \alpha, \beta \qquad \Gamma, \delta, \beta}{\Gamma, (\alpha \vee \delta), \beta}$$

($\vee$S$_1$) $$\frac{\Gamma, \alpha}{\Gamma, (\alpha \vee \beta)}$$

($\vee$S$_2$) $$\frac{\Gamma, \alpha}{\Gamma, (\beta \vee \alpha)}$$

Ein korrekter und vollständiger Sequenzenkalkül $\mathfrak{S}_1$ für L^S (ohne $\wedge$ und ohne $\forall$)

(Vor) $\dfrac{}{\Gamma, \varphi}$ falls φ in Γ

(Ant) $\dfrac{\Gamma, \varphi}{\Gamma', \varphi}$ falls jeder Ausdruck in Γ auch in Γ' vorkommt

(FU) $\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, \varphi, \psi \\ \Gamma, \neg\varphi, \psi\end{array}}{\Gamma, \psi}$

(Wid) $\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, \neg\varphi, \psi \\ \Gamma, \neg\varphi, \neg\psi\end{array}}{\Gamma, \varphi}$

($\vee$A) $\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, \varphi, \psi \\ \Gamma, \chi, \psi\end{array}}{\Gamma, (\varphi \vee \chi), \psi}$

($\vee$S$_1$) $\dfrac{\Gamma, \varphi}{\Gamma, (\varphi \vee \psi)}$

($\vee$S$_2$) $\dfrac{\Gamma, \varphi}{\Gamma, (\psi \vee \varphi)}$

(∃S) $\dfrac{\Gamma, \varphi\frac{t}{x}}{\Gamma, \exists x\varphi}$

(∃A) $\dfrac{\Gamma, \varphi\frac{y}{x},\, \psi}{\Gamma, \exists x\varphi, \psi}$ $\quad y \notin \mathrm{fr}(\Gamma, \exists x\varphi, \psi)$

(= S) $\dfrac{}{t = t}$

(= A) $\dfrac{\Gamma, \varphi\frac{t}{x}}{\Gamma, t = t',\, \varphi\frac{t'}{x}}$

$$(\exists S) \quad \frac{\Gamma, \varphi\frac{t}{x}}{\Gamma, \exists x\varphi} \qquad\qquad (\exists A) \quad \frac{\Gamma, \varphi\frac{y}{x},\ \psi}{\Gamma, \exists x\varphi, \psi} \quad y \notin \mathrm{fr}(\Gamma, \exists x\varphi, \psi)$$

$$(= S) \quad \frac{}{t = t} \qquad\qquad (= A) \quad \frac{\Gamma, \varphi\frac{t}{x}}{\Gamma, t = t',\ \varphi\frac{t'}{x}}$$

Statt $\vdash_{\mathfrak{S}_1} \Gamma, \psi$ schreiben wir $\vdash \Gamma, \psi$.

Korrektheitsbeweis für (∃A). $$\frac{\Gamma, \varphi\frac{y}{x},\ \psi}{\Gamma, \exists x\varphi, \psi} \quad y \notin \mathrm{fr}(\Gamma, \exists x\varphi, \psi)$$

Korrektheitsbeweis für (∃A). $\dfrac{\Gamma, \varphi\frac{y}{x},\ \psi}{\Gamma, \exists x\varphi, \psi}\quad y \notin \mathrm{fr}(\Gamma, \exists x\varphi, \psi)$

Gelte

$$\Gamma, \varphi\frac{y}{x} \models \psi \tag{2}$$

Korrektheitsbeweis für (∃A). $\dfrac{\Gamma, \varphi\frac{y}{x}, \psi}{\Gamma, \exists x\varphi, \psi} \quad y \notin \mathrm{fr}(\Gamma, \exists x\varphi, \psi)$

Gelte

$$\Gamma, \varphi\frac{y}{x} \models \psi \tag{2}$$

und sei $\mathfrak{I} \models \Gamma$ und $\mathfrak{I} \models \exists x\varphi$, wobei $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$.

Korrektheitsbeweis für (∃A). $\frac{\Gamma, \varphi\frac{y}{x},\ \psi}{\Gamma, \exists x\varphi, \psi}\quad y \notin \mathrm{fr}(\Gamma, \exists x\varphi, \psi)$

Gelte

$$\Gamma, \varphi\frac{y}{x} \models \psi \tag{2}$$

und sei $\mathfrak{I} \models \Gamma$ und $\mathfrak{I} \models \exists x\varphi$, wobei $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$.Dann

$$\text{ex. } a \in A\text{: } \mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi.$$

Korrektheitsbeweis für (∃A). $\dfrac{\Gamma, \varphi\frac{y}{x}, \psi}{\Gamma, \exists x\varphi, \psi}$ $y \notin \mathrm{fr}(\Gamma, \exists x\varphi, \psi)$

Gelte

$$\Gamma, \varphi\frac{y}{x} \models \psi \tag{2}$$

und sei $\mathfrak{I} \models \Gamma$ und $\mathfrak{I} \models \exists x\varphi$, wobei $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$.Dann

$$\text{ex. } a \in A\text{: } \mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi.$$

Nach Koinzidenzlemma und Vor. $y \notin \mathrm{fr}(\exists x\varphi)$

$$\text{ex. } a \in A\text{: } (\mathfrak{I}\frac{a}{x})\frac{a}{y} \models \varphi.$$

Korrektheitsbeweis für (∃A). $\dfrac{\Gamma, \varphi\frac{y}{x}, \psi}{\Gamma, \exists x\varphi, \psi} \quad y \notin \mathrm{fr}(\Gamma, \exists x\varphi, \psi)$

Gelte

$$\Gamma, \varphi\frac{y}{x} \models \psi \tag{2}$$

und sei $\mathfrak{I} \models \Gamma$ und $\mathfrak{I} \models \exists x\varphi$, wobei $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$.Dann

$$\text{ex. } a \in A\colon \mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi.$$

Nach Koinzidenzlemma und Vor. $y \notin \mathrm{fr}(\exists x\varphi)$

$$\text{ex. } a \in A\colon (\mathfrak{I}\frac{a}{x})\frac{a}{y} \models \varphi.$$

Somit

$$\text{ex. } a \in A\colon (\mathfrak{I}\frac{a}{y})\frac{\mathfrak{I}\frac{a}{y}(y)}{x} \models \varphi.$$

Korrektheitsbeweis für (∃A). $\dfrac{\Gamma, \varphi\frac{y}{x}, \psi}{\Gamma, \exists x\varphi, \psi} \quad y \notin \mathrm{fr}(\Gamma, \exists x\varphi, \psi)$

Gelte

$$\Gamma, \varphi\frac{y}{x} \models \psi \tag{2}$$

und sei $\mathfrak{I} \models \Gamma$ und $\mathfrak{I} \models \exists x\varphi$, wobei $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$.Dann

$$\text{ex. } a \in A\text{: } \mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi.$$

Nach Koinzidenzlemma und Vor. $y \notin \mathrm{fr}(\exists x\varphi)$

$$\text{ex. } a \in A\text{: } (\mathfrak{I}\frac{a}{x})\frac{a}{y} \models \varphi.$$

Somit

$$\text{ex. } a \in A\text{: } (\mathfrak{I}\frac{a}{y})\frac{\mathfrak{I}\frac{a}{y}(y)}{x} \models \varphi.$$

Daher nach Substit.lemma

$$\text{ex. } a \in A\text{: } \mathfrak{I}\frac{a}{y} \models \varphi\frac{y}{x}.$$

Korrektheitsbeweis für (∃A). $\dfrac{\Gamma, \varphi\frac{y}{x}, \psi}{\Gamma, \exists x\varphi, \psi} \quad y \notin \mathrm{fr}(\Gamma, \exists x\varphi, \psi)$

Gelte

$$\Gamma, \varphi\frac{y}{x} \models \psi \tag{2}$$

und sei $\mathfrak{I} \models \Gamma$ und $\mathfrak{I} \models \exists x\varphi$, wobei $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$.Dann

$$\text{ex. } a \in A\text{: } \mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi.$$

Nach Koinzidenzlemma und Vor. $y \notin \mathrm{fr}(\exists x\varphi)$

$$\text{ex. } a \in A\text{: } (\mathfrak{I}\frac{a}{x})\frac{a}{y} \models \varphi.$$

Somit

$$\text{ex. } a \in A\text{: } (\mathfrak{I}\frac{a}{y})\frac{\mathfrak{I}\frac{a}{y}(y)}{x} \models \varphi.$$

Daher nach Substit.lemma

$$\text{ex. } a \in A\text{: } \mathfrak{I}\frac{a}{y} \models \varphi\frac{y}{x}.$$

Da auch $\mathfrak{I}\frac{a}{y} \models \Gamma$ (weil $y \notin \mathrm{fr}(\Gamma)$), gilt nach (2)

$$\mathfrak{I}\frac{a}{y} \models \psi \quad \text{und daher } \mathfrak{I} \models \psi \quad (\text{weil } y \notin \mathrm{fr}(\psi)).$$

$\Phi \subseteq L^S$, $\psi \in L^S$:

$\Phi \subseteq L^S$, $\psi \in L^S$:

ψ ist aus Φ $\mathfrak{S}_1$-ableitbar oder mit $\mathfrak{S}_1$ formal beweisbar , $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}_1} \psi$,

gdw

es gibt endlich viele $\varphi_1, \ldots, \varphi_r \in \Phi$ mit: $\vdash \varphi_1, \ldots, \varphi_r, \psi$

$\Phi \subseteq L^S$, $\psi \in L^S$:

ψ ist aus Φ $\mathfrak{S}_1$-ableitbar oder mit $\mathfrak{S}_1$ formal beweisbar , $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}_1} \psi$,

gdw

es gibt endlich viele $\varphi_1, \ldots, \varphi_r \in \Phi$ mit: $\vdash \varphi_1, \ldots, \varphi_r, \psi$

$\vdash$ statt $\vdash_{\mathfrak{S}_1}$; ableitbar statt $\mathfrak{S}_1$-ableitbar

$\Phi \subseteq L^S$, $\psi \in L^S$:

ψ ist aus Φ $\mathfrak{S}_1$-ableitbar oder mit $\mathfrak{S}_1$ formal beweisbar , $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}_1} \psi$,

gdw

es gibt endlich viele $\varphi_1, \ldots, \varphi_r \in \Phi$ mit: $\vdash \varphi_1, \ldots, \varphi_r, \psi$

$\vdash$ statt $\vdash_{\mathfrak{S}_1}$; ableitbar statt $\mathfrak{S}_1$-ableitbar

Bemerkung. Wenn $\Phi \vdash \psi$, so ex. endliches $\Phi_0 \subseteq \Phi$ mit $\Phi_0 \vdash \psi$.

$\Phi \subseteq L^S$, $\psi \in L^S$:

ψ ist aus Φ $\mathfrak{S}_1$-ableitbar oder mit $\mathfrak{S}_1$ formal beweisbar , $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}_1} \psi$,

gdw

es gibt endlich viele $\varphi_1, \ldots, \varphi_r \in \Phi$ mit: $\vdash \varphi_1, \ldots, \varphi_r, \psi$

$\vdash$ statt $\vdash_{\mathfrak{S}_1}$; ableitbar statt $\mathfrak{S}_1$-ableitbar

Bemerkung. Wenn $\Phi \vdash \psi$, so ex. endliches $\Phi_0 \subseteq \Phi$ mit $\Phi_0 \vdash \psi$.

Gödelscher Vollständigkeitssatz. $\Phi \vdash \psi \iff \Phi \models \psi$.

Gödelscher Vollständigkeitssatz. $\Phi \vdash \psi \iff \Phi \models \psi$.

$\Rightarrow$= Korrektheit von $\mathfrak{S}_1$; $\Leftarrow$= Vollständigkeit von $\mathfrak{S}_1$.

Gödelscher Vollständigkeitssatz. $\Phi \vdash \psi \iff \Phi \models \psi$.

$\Rightarrow$= Korrektheit von $\mathfrak{S}_1$; $\Leftarrow$= Vollständigkeit von $\mathfrak{S}_1$.

Da alle Regeln von $\mathfrak{S}_1$ korrekt sind:

Korrektheitssatz. Wenn $\Phi \vdash \psi$, so $\Phi \models \psi$.

Gödelscher Vollständigkeitssatz. $\Phi \vdash \psi \iff \Phi \models \psi$.

$\Rightarrow$= Korrektheit von $\mathfrak{S}_1$; $\Leftarrow$= Vollständigkeit von $\mathfrak{S}_1$.

Da alle Regeln von $\mathfrak{S}_1$ korrekt sind:

Korrektheitssatz. Wenn $\Phi \vdash \psi$, so $\Phi \models \psi$.

Endlichkeitssatz (Kompaktheitssatz).

1) Wenn $\Phi \models \psi$, so ex. endliches $\Phi_0 \subseteq \Phi : \Phi_0 \models \psi$.

Gödelscher Vollständigkeitssatz. $\Phi \vdash \psi \iff \Phi \models \psi$.

$\Rightarrow$= Korrektheit von $\mathfrak{S}_1$; $\Leftarrow$= Vollständigkeit von $\mathfrak{S}_1$.

Da alle Regeln von $\mathfrak{S}_1$ korrekt sind:

Korrektheitssatz. Wenn $\Phi \vdash \psi$, so $\Phi \models \psi$.

Endlichkeitssatz (Kompaktheitssatz).

1) Wenn $\Phi \models \psi$, so ex. endliches $\Phi_0 \subseteq \Phi : \Phi_0 \models \psi$.

2) Wenn jede endliche Teilmenge von Φ erfüllbar ist, so auch Φ.

Gödelscher Vollständigkeitssatz. $\Phi \vdash \psi \iff \Phi \models \psi$.

$\Rightarrow$= Korrektheit von $\mathfrak{S}_1$; $\Leftarrow$= Vollständigkeit von $\mathfrak{S}_1$.

Da alle Regeln von $\mathfrak{S}_1$ korrekt sind:

Korrektheitssatz. Wenn $\Phi \vdash \psi$, so $\Phi \models \psi$.

Endlichkeitssatz (Kompaktheitssatz).

1) Wenn $\Phi \models \psi$, so ex. endliches $\Phi_0 \subseteq \Phi : \Phi_0 \models \psi$.

2) Wenn jede endliche Teilmenge von Φ erfüllbar ist, so auch Φ.

Satz von Löwenheim und Skolem. Ist Φ erfüllbar, so hat Φ ein Modell mit höchstens abzählbarem Träger.

$S = \{E\}$, $m \in \mathbb{N}$:

$$\text{“}v_1, \ldots, v_{m+1} \text{ ist ein Weg der Länge } m\text{”}$$

$S = \{E\}$, $m \in \mathbb{N}$:

"$v_1, \ldots, v_{m+1}$ ist ein Weg der Länge m"

$\psi_0(v_1) := v_1 = v_1$ und für $m \geq 1$: $\psi_m(v_1, \ldots, v_{m+1}) := \bigwedge_{i=1}^{m} E v_i v_{i+1}$

$S = \{E\}$, $m \in \mathbb{N}$:

"$v_1, \ldots, v_{m+1}$ ist ein Weg der Länge m"

$$\psi_0(v_1) := v_1 = v_1 \qquad \text{und für } m \geq 1: \ \psi_m(v_1, \ldots, v_{m+1}) := \bigwedge_{i=1}^{m} E v_i v_{i+1}$$

"Es gibt einen Weg der Länge m von u nach v"

$S = \{E\}$, $m \in \mathbb{N}$:

"$v_1, \ldots, v_{m+1}$ ist ein Weg der Länge m"

$$\psi_0(v_1) := v_1 = v_1 \qquad \text{und für } m \geq 1\text{:} \quad \psi_m(v_1, \ldots, v_{m+1}) := \bigwedge_{i=1}^{m} E v_i v_{i+1}$$

"Es gibt einen Weg der Länge m von u nach v"

$$\varphi_m(u, v) := \exists v_1 \ldots \exists v_{m+1} (\psi_m(v_1, \ldots, v_{m+1}) \wedge u = v_1 \wedge v = v_{m+1})$$

$S = \{E\}$, $m \in \mathbb{N}$:

"$v_1, \ldots, v_{m+1}$ ist ein Weg der Länge m"

$\psi_0(v_1) := v_1 = v_1$ und für $m \geq 1$: $\psi_m(v_1, \ldots, v_{m+1}) := \bigwedge_{i=1}^{m} Ev_iv_{i+1}$

"Es gibt einen Weg der Länge m von u nach v"

$$\varphi_m(u, v) := \exists v_1 \ldots \exists v_{m+1}(\psi_m(v_1, \ldots, v_{m+1}) \wedge u = v_1 \wedge v = v_{m+1})$$

$\mathfrak{G}$ ist zusammenhängend, wenn es für alle $a, b \in G$ einen Weg von a nach b gibt.

$S = \{s, 0\}$. $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, s^{\mathbb{N}}, 0)$, wobei $s^{\mathbb{N}}(k) = k + 1$

$S = \{s, 0\}$. $\quad\quad \mathfrak{N} = (\mathbb{N}, s^{\mathbb{N}}, 0)$, wobei $s^{\mathbb{N}}(k) = k + 1$

(P1) $\forall x \neg s(x) = 0$

(P2) $\forall x \forall y (s(x) = s(y) \rightarrow x = y)$

(P3) $\forall X((X0 \wedge \forall y(Xy \rightarrow Xs(y))) \rightarrow \forall z Xz)$

$\Sigma = \{a_0, \ldots, a_n\}$ mit paarweise verschiedenen $a_0, \ldots, a_n$.

$\Sigma = \{a_0, \ldots, a_n\}$ mit paarweise verschiedenen $a_0, \ldots, a_n$.

Die lexikographische Ordnung $\leq_{\text{lex}}$ von Σ^* (bzgl. $a_0, \ldots, a_n$):

$\Sigma = \{a_0, \ldots, a_n\}$ mit paarweise verschiedenen $a_0, \ldots, a_n$.

Die lexikographische Ordnung $\leq_{\text{lex}}$ von Σ^* (bzgl. $a_0, \ldots, a_n$):

$$u \leq_{\text{lex}} v \quad \Longleftrightarrow \quad \Big(u = v \text{ oder } |u| < |v| \text{ oder}$$
$$(|u| = |v| \text{ und ex. } 1 \leq i < j \leq n,\ x, y, z \in \Sigma^*\colon\ u = xa_iy \text{ und } v = xa_jz)\Big).$$

$$u <_{\text{lex}} v \quad \Longleftrightarrow \quad (u \leq_{\text{lex}} v \text{ und } u \neq v)$$

$\Sigma = \{a_0, \ldots, a_n\}$ mit paarweise verschiedenen $a_0, \ldots, a_n$.

Die lexikographische Ordnung $\leq_{\text{lex}}$ von Σ^* (bzgl. $a_0, \ldots, a_n$):

$$u \leq_{\text{lex}} v \quad \Longleftrightarrow \quad \Big(u = v \text{ oder } |u| < |v| \text{ oder}$$
$$(|u| = |v| \text{ und ex. } 1 \leq i < j \leq n,\ x, y, z \in \Sigma^*\colon\ u = x a_i y \text{ und } v = x a_j z) \Big).$$

$$u <_{\text{lex}} v \quad \Longleftrightarrow \quad (u \leq_{\text{lex}} v \text{ und } u \neq v)$$

λ

$\Sigma = \{a_0, \ldots, a_n\}$ mit paarweise verschiedenen $a_0, \ldots, a_n$.

Die lexikographische Ordnung $\leq_{\text{lex}}$ von Σ^* (bzgl. $a_0, \ldots, a_n$):

$$u \leq_{\text{lex}} v \quad \Longleftrightarrow \quad \Big(u = v \text{ oder } |u| < |v| \text{ oder}$$
$$(|u| = |v| \text{ und ex. } 1 \leq i < j \leq n,\ x, y, z \in \Sigma^*\text{: } u = xa_iy \text{ und } v = xa_jz)\Big).$$

$$u <_{\text{lex}} v \quad \Longleftrightarrow \quad (u \leq_{\text{lex}} v \text{ und } u \neq v)$$

$\lambda, a_0, \ldots, a_n$

$\Sigma = \{a_0, \ldots, a_n\}$ mit paarweise verschiedenen $a_0, \ldots, a_n$.

Die lexikographische Ordnung $\leq_{\text{lex}}$ von Σ^* (bzgl. $a_0, \ldots, a_n$):

$$u \leq_{\text{lex}} v \quad \Longleftrightarrow \quad \Big(u = v \text{ oder } |u| < |v| \text{ oder}$$
$$(|u| = |v| \text{ und ex. } 1 \leq i < j \leq n,\ x, y, z \in \Sigma^*\text{: } u = x a_i y \text{ und } v = x a_j z)\Big).$$

$$u <_{\text{lex}} v \quad \Longleftrightarrow \quad (u \leq_{\text{lex}} v \text{ und } u \neq v)$$

$\lambda, a_0, \ldots, a_n, a_0a_0, \ldots, a_0a_n$

$\Sigma = \{a_0, \ldots, a_n\}$ mit paarweise verschiedenen $a_0, \ldots, a_n$.

Die lexikographische Ordnung $\leq_{\text{lex}}$ von Σ^* (bzgl. $a_0, \ldots, a_n$):

$$u \leq_{\text{lex}} v \quad \Longleftrightarrow \quad \Big(u = v \text{ oder } |u| < |v| \text{ oder}$$
$$(|u| = |v| \text{ und ex. } 1 \leq i < j \leq n,\ x, y, z \in \Sigma^*\text{: } u = xa_iy \text{ und } v = xa_jz)\Big).$$

$$u <_{\text{lex}} v \quad \Longleftrightarrow \quad (u \leq_{\text{lex}} v \text{ und } u \neq v)$$

$\lambda, a_0, \ldots, a_n, a_0a_0, \ldots, a_0a_n, a_1a_0, \ldots, a_1a_n$

$\Sigma = \{a_0, \ldots, a_n\}$ mit paarweise verschiedenen $a_0, \ldots, a_n$.

Die lexikographische Ordnung $\leq_{\text{lex}}$ von Σ^* (bzgl. $a_0, \ldots, a_n$):

$$u \leq_{\text{lex}} v \quad \Longleftrightarrow \quad \Big(u = v \text{ oder } |u| < |v| \text{ oder}$$

$$(|u| = |v| \text{ und ex. } 1 \leq i < j \leq n,\ x, y, z \in \Sigma^*\colon\ u = xa_iy \text{ und } v = xa_jz)\Big).$$

$$u <_{\text{lex}} v \quad \Longleftrightarrow \quad (u \leq_{\text{lex}} v \text{ und } u \neq v)$$

$$\lambda, a_0, \ldots, a_n, a_0a_0, \ldots, a_0a_n, a_1a_0, \ldots, a_1a_n, \ldots, a_na_n$$

$\Sigma = \{a_0, \ldots, a_n\}$ mit paarweise verschiedenen $a_0, \ldots, a_n$.

Die lexikographische Ordnung $\leq_{\text{lex}}$ von Σ^* (bzgl. $a_0, \ldots, a_n$):

$$u \leq_{\text{lex}} v \quad \Longleftrightarrow \quad \Big(u = v \text{ oder } |u| < |v| \text{ oder}$$
$$(|u| = |v| \text{ und ex. } 1 \leq i < j \leq n,\ x, y, z \in \Sigma^*\text{: } u = x a_i y \text{ und } v = x a_j z)\Big).$$

$$u <_{\text{lex}} v \quad \Longleftrightarrow \quad (u \leq_{\text{lex}} v \text{ und } u \neq v)$$

$\lambda, a_0, \ldots, a_n, a_0a_0, \ldots, a_0a_n, a_1a_0, \ldots, a_1a_n, \ldots, a_na_n, a_0a_0a_0, \ldots$

Zu 1): Aufzählungsverfahren: Für $n = 1, 2, \ldots$ stelle man die ersten n Terme und Ausdrücke her in der lexikographischen Reihenfolge und bilde die endlich vielen Ableitungen einer Länge $\leq n$, die nur diese Ausdrücke und Terme verwenden und aus höchstens n-gliedrigen Sequenzen bestehen.

Zu 1): Aufzählungsverfahren: Für $n = 1, 2, \ldots$ stelle man die ersten n Terme und Ausdrücke her in der lexikographischen Reihenfolge und bilde die endlich vielen Ableitungen einer Länge $\leq n$, die nur diese Ausdrücke und Terme verwenden und aus höchstens n-gliedrigen Sequenzen bestehen.

Zu 2): Setze Aufzählungsverfahren $\mathfrak{V}_1$ für Φ und $\mathfrak{V}_2$ für $\{\Gamma\varphi \mid \vdash \Gamma\varphi\}$ in Gang.

Zu 1): Aufzählungsverfahren: Für $n = 1, 2, \ldots$ stelle man die ersten n Terme und Ausdrücke her in der lexikographischen Reihenfolge und bilde die endlich vielen Ableitungen einer Länge $\leq n$, die nur diese Ausdrücke und Terme verwenden und aus höchstens n-gliedrigen Sequenzen bestehen.

Zu 2): Setze Aufzählungsverfahren $\mathfrak{V}_1$ für Φ und $\mathfrak{V}_2$ für $\{\Gamma\varphi \mid \vdash \Gamma\varphi\}$ in Gang.

Für $n = 1, 2 \ldots$: Sind nach n Schritten von $\mathfrak{V}_1$ ausgegeben

$$\psi_1, \ldots, \psi_k$$

Zu 1): Aufzählungsverfahren: Für $n = 1, 2, \ldots$ stelle man die ersten n Terme und Ausdrücke her in der lexikographischen Reihenfolge und bilde die endlich vielen Ableitungen einer Länge $\leq n$, die nur diese Ausdrücke und Terme verwenden und aus höchstens n-gliedrigen Sequenzen bestehen.

Zu 2): Setze Aufzählungsverfahren $\mathfrak{V}_1$ für Φ und $\mathfrak{V}_2$ für $\{\Gamma\varphi \mid \vdash \Gamma\varphi\}$ in Gang.

Für $n = 1, 2 \ldots$: Sind nach n Schritten von $\mathfrak{V}_1$ ausgegeben

$$\psi_1, \ldots, \psi_k$$

und von $\mathfrak{V}_2$ ausgegeben

$$\Gamma_1, \varphi_1, \ldots, \Gamma_\ell, \varphi_\ell,$$

Zu 1): Aufzählungsverfahren: Für $n = 1, 2, \ldots$ stelle man die ersten n Terme und Ausdrücke her in der lexikographischen Reihenfolge und bilde die endlich vielen Ableitungen einer Länge $\leq n$, die nur diese Ausdrücke und Terme verwenden und aus höchstens n-gliedrigen Sequenzen bestehen.

Zu 2): Setze Aufzählungsverfahren $\mathfrak{V}_1$ für Φ und $\mathfrak{V}_2$ für $\{\Gamma\varphi \mid \vdash \Gamma\varphi\}$ in Gang.

Für $n = 1, 2 \ldots$: Sind nach n Schritten von $\mathfrak{V}_1$ ausgegeben

$$\psi_1, \ldots, \psi_k$$

und von $\mathfrak{V}_2$ ausgegeben

$$\Gamma_1, \varphi_1, \ldots, \Gamma_\ell, \varphi_\ell,$$

so prüfe für $i = 1, \ldots, \ell$, ob

$$\Gamma_i \subseteq \{\psi_1, \ldots, \psi_k\}$$

und gib ggf. φ_i aus.

TURINGMASCHINEN

Sei Σ_0 ein endliches Alphabet ist und $* \notin \Sigma_0$.

Turingmaschinen

Sei Σ_0 ein endliches Alphabet ist und $* \notin \Sigma_0$.

– einseitig unendliches Band, das in abzählbar unendlich viele Felder eingeteilt ist, die mit den natürlichen Zahlen durchnummeriert sind. Weiterhin gibt es einen LS-Kopf (Lese- und Schreibkopf), der stets auf einem der Felder steht.

Turingmaschinen

Sei Σ_0 ein endliches Alphabet ist und $* \notin \Sigma_0$.

– einseitig unendliches Band, das in abzählbar unendlich viele Felder eingeteilt ist, die mit den natürlichen Zahlen durchnummeriert sind. Weiterhin gibt es einen LS-Kopf (Lese- und Schreibkopf), der stets auf einem der Felder steht.

– Zu jedem Zeitpunkt der Berechnung enthält jedes Feld genau einen Buchstaben aus Σ_0 oder ist leer (wir sagen dann: es enthält $*$).

Turingmaschinen

Sei Σ_0 ein endliches Alphabet ist und $* \notin \Sigma_0$.

- einseitig unendliches Band, das in abzählbar unendlich viele Felder eingeteilt ist, die mit den natürlichen Zahlen durchnummeriert sind. Weiterhin gibt es einen LS-Kopf (Lese- und Schreibkopf), der stets auf einem der Felder steht.
- Zu jedem Zeitpunkt der Berechnung enthält jedes Feld genau einen Buchstaben aus Σ_0 oder ist leer (wir sagen dann: es enthält $*$).

$$\Sigma := \Sigma_0 \cup \{*\}.$$

Eine Turingmaschine T (auch: Turingprogramm, Turingtafel) ist ein Tripel

$$T = (\Sigma, Z, \delta),$$

wobei

Eine Turingmaschine T (auch: Turingprogramm, Turingtafel) ist ein Tripel

$$T = (\Sigma, Z, \delta),$$

wobei

- Σ ein endliches Alphabet ist mit $* \in \Sigma$ und $\Sigma \neq \{*\}$;

Eine Turingmaschine T (auch: Turingprogramm, Turingtafel) ist ein Tripel

$$T = (\Sigma, Z, \delta),$$

wobei

- Σ ein endliches Alphabet ist mit $* \in \Sigma$ und $\Sigma \neq \{*\}$;
- $Z = \{0, \ldots, z_T\}$ mit $z_T \geq 1$ ist die Zustandsmenge von T; 0 ist der Startzustand und 1 der Haltezustand;

Eine Turingmaschine T (auch: Turingprogramm, Turingtafel) ist ein Tripel

$$T = (\Sigma, Z, \delta),$$

wobei

- Σ ein endliches Alphabet ist mit $* \in \Sigma$ und $\Sigma \neq \{*\}$;
- $Z = \{0, \ldots, z_T\}$ mit $z_T \geq 1$ ist die Zustandsmenge von T; 0 ist der Startzustand und 1 der Haltezustand;
- $\delta : Z \times \Sigma \to Z \times \Sigma \times \{-1, 0, 1\}$ ist die Übergangsfunktion.

Eine Turingmaschine T (auch: Turingprogramm, Turingtafel) ist ein Tripel

$$T = (\Sigma, Z, \delta),$$

wobei

- Σ ein endliches Alphabet ist mit $* \in \Sigma$ und $\Sigma \neq \{*\}$;
- $Z = \{0, \ldots, z_T\}$ mit $z_T \geq 1$ ist die Zustandsmenge von T; 0 ist der Startzustand und 1 der Haltezustand;
- $\delta : Z \times \Sigma \to Z \times \Sigma \times \{-1, 0, 1\}$ ist die Übergangsfunktion.

Statt

$$\delta(z, a) = (z', a', i)$$

schreiben wir auch

$$z, a \mapsto z', a', i \quad \in \delta$$

Eine Turingmaschine T (auch: Turingprogramm, Turingtafel) ist ein Tripel

$$T = (\Sigma, Z, \delta),$$

wobei

- Σ ein endliches Alphabet ist mit $* \in \Sigma$ und $\Sigma \neq \{*\}$;
- $Z = \{0, \ldots, z_T\}$ mit $z_T \geq 1$ ist die Zustandsmenge von T; 0 ist der Startzustand und 1 der Haltezustand;
- $\delta : Z \times \Sigma \to Z \times \Sigma \times \{-1, 0, 1\}$ ist die Übergangsfunktion.

Statt

$$\delta(z, a) = (z', a', i)$$

schreiben wir auch

$$z, a \mapsto z', a', i \quad \in \delta$$

Bedeutung: Ist T im Zustand z und liest der LS-Kopf den Buchstaben a,

Eine Turingmaschine T (auch: Turingprogramm, Turingtafel) ist ein Tripel

$$T = (\Sigma, Z, \delta),$$

wobei

- Σ ein endliches Alphabet ist mit $* \in \Sigma$ und $\Sigma \neq \{*\}$;
- $Z = \{0, \ldots, z_T\}$ mit $z_T \geq 1$ ist die Zustandsmenge von T; 0 ist der Startzustand und 1 der Haltezustand;
- $\delta : Z \times \Sigma \to Z \times \Sigma \times \{-1, 0, 1\}$ ist die Übergangsfunktion.

Statt

$$\delta(z, a) = (z', a', i)$$

schreiben wir auch

$$z, a \mapsto z', a', i \quad \in \delta$$

Bedeutung: Ist T im Zustand z und liest der LS-Kopf den Buchstaben a, so wird dieses a durch a' ersetzt, der LS-Kopf bewegt sich ein Feld nach rechts, falls $i = 1$, ein Feld nach links, falls $i = -1$ (wobei die Maschine die Berechnung abbricht, falls der LS-Kopf bereits auf dem 0. Feld steht), oder bewegt sich nicht, falls $i = 0$.

$$T : * \longrightarrow \mathrm{halt}$$

bedeute

$$T : * \longrightarrow \text{halt}$$

bedeute

T angesetzt auf das leere Band (d.h. alle Felder enthalten zu Beginn der Berechnung $*$ und der LS-Kopf steht auf dem 0.ten Feld) erreicht den Haltezustand.

$$T : * \longrightarrow \text{halt}$$

bedeute

> T angesetzt auf das leere Band (d.h. alle Felder enthalten zu Beginn der Berechnung $*$ und der LS-Kopf steht auf dem 0.ten Feld) erreicht den Haltezustand.

Unentscheidbarkeit des Halteproblems. Es ist nicht entscheidbar, ob $T : * \longrightarrow \text{halt}$ für eine Turingmaschine $\underline{\underline{T}}$ gilt.

$$T : * \longrightarrow \text{halt}$$

bedeute

> T angesetzt auf das leere Band (d.h. alle Felder enthalten zu Beginn der Berechnung $*$ und der LS-Kopf steht auf dem 0.ten Feld) erreicht den Haltezustand.

Unentscheidbarkeit des Halteproblems. Es ist nicht entscheidbar, ob $T : * \longrightarrow \text{halt}$ für eine Turingmaschine $\underline{\underline{T}}$ gilt.

Für jedes endliche Alphabet Σ mit $* \in \Sigma$ und $\Sigma \neq \{*\}$ ist es nicht entscheidbar, ob $T : * \longrightarrow \text{halt}$ für eine Turingmaschine $\underline{\underline{T}}$ mit $T = (\Sigma, -, -)$ gilt.

Als ψ_t wähle man die Konjunktion der Ausdrücke:

Als ψ_t wähle man die Konjunktion der Ausdrücke:

1. "$\leq$ ist Ordnung mit kleinstem Element 0 und Nachfolgerfunktion (!) s"

Als ψ_t wähle man die Konjunktion der Ausdrücke:

1. "$\leq$ ist Ordnung mit kleinstem Element 0 und Nachfolgerfunktion (!) s"
2. (Die Anfangsdaten stimmen) $(Q00 \wedge K00 \wedge \forall x B_* 0x)$

Als ψ_t wähle man die Konjunktion der Ausdrücke:

1. "$\leq$ ist Ordnung mit kleinstem Element 0 und Nachfolgerfunktion (!) s"
2. (Die Anfangsdaten stimmen) $(Q00 \wedge K00 \wedge \forall x B_* 0x)$
3. (Die Übergänge sind korrekt) $\bigwedge_{\mathrm{anw} \in \delta} \psi_{\mathrm{anw}}$,

Als ψ_t wähle man die Konjunktion der Ausdrücke:

1. "$\leq$ ist Ordnung mit kleinstem Element 0 und Nachfolgerfunktion (!) s"
2. (Die Anfangsdaten stimmen) $(Q00 \wedge K00 \wedge \forall x B_* 0x)$
3. (Die Übergänge sind korrekt) $\bigwedge_{\mathrm{anw} \in \delta} \psi_{\mathrm{anw}}$,

wobei etwa für

$$\mathrm{anw} = \ z, a \mapsto z', a', 1$$

Als ψ_t wähle man die Konjunktion der Ausdrücke:

1. "$\leq$ ist Ordnung mit kleinstem Element 0 und Nachfolgerfunktion (!) s"
2. (Die Anfangsdaten stimmen) $(Q00 \wedge K00 \wedge \forall x B_* 0x)$
3. (Die Übergänge sind korrekt) $\bigwedge_{\mathrm{anw} \in \delta} \psi_{\mathrm{anw}}$,

wobei etwa für

$$\mathrm{anw} = \; z, a \mapsto z', a', 1$$

$$\psi_{\mathrm{anw}} := \forall x \forall y \Big((Qx\bar{z} \wedge Kxy \wedge B_a xy) \rightarrow \Big(Qs(x)\overline{z'} \wedge Ks(x)s(y) \wedge B_{a'} s(x)y$$
$$\wedge \forall z (\neg z = y \rightarrow \bigwedge_{b \in \Sigma} (B_b s(x)z \leftrightarrow B_b xz)) \wedge \neg s(x) = x \Big)\Big).$$

Als ψ_t wähle man die Konjunktion der Ausdrücke:

1. "$\leq$ ist Ordnung mit kleinstem Element 0 und Nachfolgerfunktion (!) s"
2. (Die Anfangsdaten stimmen) $(Q00 \wedge K00 \wedge \forall x B_* 0x)$
3. (Die Übergänge sind korrekt) $\bigwedge_{\mathrm{anw} \in \delta} \psi_{\mathrm{anw}}$,

wobei etwa für

$$\mathrm{anw} = \ z, a \mapsto z', a', 1$$

$$\psi_{\mathrm{anw}} := \forall x \forall y \Big((Qx\bar{z} \wedge Kxy \wedge B_a xy) \rightarrow \Big(Qs(x)\overline{z'} \wedge Ks(x)s(y) \wedge B_{a'} s(x)y \\ \wedge \forall z(\neg z = y \rightarrow \bigwedge_{b \in \Sigma} (B_b s(x)z \leftrightarrow B_b xz)) \wedge \neg s(x) = x \Big) \Big).$$

und für

$$\mathrm{anw} = \ z, a \mapsto z', a', -1$$

Als ψ_t wähle man die Konjunktion der Ausdrücke:

1. "$\leq$ ist Ordnung mit kleinstem Element 0 und Nachfolgerfunktion (!) s"
2. (Die Anfangsdaten stimmen) $(Q00 \wedge K00 \wedge \forall x B_* 0x)$
3. (Die Übergänge sind korrekt) $\bigwedge_{\mathrm{anw} \in \delta} \psi_{\mathrm{anw}}$,

wobei etwa für

$$\mathrm{anw} = \ z, a \mapsto z', a', 1$$

$$\psi_{\mathrm{anw}} := \forall x \forall y \Big((Qx\bar{z} \wedge Kxy \wedge B_a xy) \to \Big(Qs(x)\overline{z'} \wedge Ks(x)s(y) \wedge B_{a'} s(x)y \\ \wedge \forall z (\neg z = y \to \bigwedge_{b \in \Sigma} (B_b s(x)z \leftrightarrow B_b xz)) \wedge \neg s(x) = x \Big)\Big).$$

und für

$$\mathrm{anw} = \ z, a \mapsto z', a', -1$$

$$\psi_{\mathrm{anw}} := \forall x \forall y \Big((Qx\bar{z} \wedge Kxy \wedge B_a xy) \to \exists u \Big(s(u) = y \wedge Qs(x)\overline{z'} \wedge Ks(x)u \wedge B_{a'} s(x)y \\ \wedge \forall z (\neg z = y \to \bigwedge_{b \in \Sigma} (B_b s(x)z \leftrightarrow B_b xz)) \wedge \neg s(x) = x \Big)\Big).$$

Angabe einer S-Str. $\mathfrak{A}_T$

nicht $T : * \to$ halt	T erreicht nach h_T Schritten den Haltezustand
$A_T := \mathbb{N}$	$A_T := \{0, \ldots, \underbrace{\max\{z_T, h_T\}}_{e}\}$
$\leq^{A_T}$ gewöhnl. Ordg	$\leq^{A_T}$ gewöhnl. Ordg
$0^{A_T} := 0$	$0^{A_T} := 0$
s^{A_T} Nachfolgerfkt.	s^{A_T} Nachfolgerfkt. mit $s^{A_T}(e) = e$

$$Q^{A_T} := \{(\ell, z) \mid \ T \text{ läuft mind. } \ell \text{ Schritte und ist dann im Zustand } z\}$$

$$K^{A_T} := \{(\ell, m) \mid \ T \text{ läuft mind. } \ell \text{ Schritte und dann steht Kopf auf Feld } m\}$$

$$B_a^{A_T} := \{(\ell, m) \mid \ T \text{ läuft mind. } \ell \text{ Schritte und dann steht } a \text{ in Feld } m\}$$

$\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots$: Abk. für Terme 0, $s(0)$, $s(s(0))$,. . .

Für ψ_T gilt:

(1) (a) $\mathfrak{A}_T \models \psi_T$

(b) Ist $\mathfrak{A} \models \psi_T$ und läuft T mindestens ℓ Schritte und ist nach ℓ Schritten im Zustand z, so sind

$$\overline{0}^{\mathfrak{A}}, \overline{1}^{\mathfrak{A}}, \ldots, \overline{\ell}^{\mathfrak{A}} \text{ p.v. und } \; Q^{\mathfrak{A}}\,\overline{\ell}^{\mathfrak{A}}\,\bar{z}^{\mathfrak{A}}.$$

T stoppe nach s_T Schritten wegen "Bandüberschreitung"

Angabe einer endlichen S-Str. $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A} \models \psi_T$:

$$A := \{0, \ldots, \underbrace{\max\{z_T, s_T\}}_{e}\}$$

$$\leq^A \text{ gewöhnl. Ordg}$$

$$0^A := 0$$

$$s^A \text{ Nachfolgerfkt. mit } s^A(e) = e$$

$$Q^A := \{(\ell, z) \mid \ T \text{ läuft mind. } \ell \text{ Schritte und ist dann im Zustand } z\}$$

$$K^A := \{(\ell, m) \mid \ T \text{ läuft mind. } \ell \text{ Schritte und dann steht Kopf auf Feld } m\}$$

$$B_a^A := \{(\ell, m) \mid \ T \text{ läuft mind. } \ell \text{ Schritte und dann steht } a \text{ in Feld } m\}$$

SYNTAX:

SYNTAX: 1) Alphabet. Zusätzliche Zeichen:

SYNTAX: 1) Alphabet. Zusätzliche Zeichen:

für $n \geq 1$, n-stellige Relationsvariable: $V_1^n, V_2^n, \ldots$ $X^n, Y^n, X, Y, \ldots$

($n = 1$: Mengenvariable)

SYNTAX: 1) Alphabet. Zusätzliche Zeichen:

für $n \geq 1$, n-stellige Relationsvariable: $V_1^n, V_2^n, \ldots$ $X^n, Y^n, X, Y, \ldots$

($n = 1$: Mengenvariable)

2) Termkalkül. Keine Änderung.

SYNTAX: 1) Alphabet. Zusätzliche Zeichen:

für $n \geq 1$, n-stellige Relationsvariable: $V_1^n, V_2^n, \ldots$ $X^n, Y^n, X, Y, \ldots$

($n = 1$: Mengenvariable)

2) Termkalkül. Keine Änderung.

3) Ausdruckskalkül. Zusätzliche Regeln:

SYNTAX: 1) Alphabet. Zusätzliche Zeichen:

für $n \geq 1$, n-stellige Relationsvariable: $V_1^n, V_2^n, \ldots$ $\quad X^n, Y^n, X, Y, \ldots$

($n = 1$: Mengenvariable)

2) Termkalkül. Keine Änderung.

3) Ausdruckskalkül. Zusätzliche Regeln:

$$\frac{}{X^n t_1 \ldots t_n}, \qquad \frac{\varphi}{\exists X \varphi} \qquad \frac{\varphi}{\forall X \varphi}$$

SYNTAX: 1) Alphabet. Zusätzliche Zeichen:

für $n \geq 1$, n-stellige Relationsvariable: $V_1^n, V_2^n, \ldots$ $X^n, Y^n, X, Y, \ldots$

($n = 1$: Mengenvariable)

2) Termkalkül. Keine Änderung.

3) Ausdruckskalkül. Zusätzliche Regeln:

$$\frac{}{X^n t_1 \ldots t_n}, \qquad \frac{\varphi}{\exists X \varphi} \qquad \frac{\varphi}{\forall X \varphi}$$

L_{II}^S Menge der S-Ausdrücke der 2. Stufe

SYNTAX: 1) Alphabet. Zusätzliche Zeichen:

für $n \geq 1$, n-stellige Relationsvariable: $V_1^n, V_2^n, \ldots$ $\qquad X^n, Y^n, X, Y, \ldots$

($n = 1$: Mengenvariable)

2) Termkalkül. Keine Änderung.

3) Ausdruckskalkül. Zusätzliche Regeln:

$$\frac{}{X^n t_1 \ldots t_n}, \qquad \frac{\varphi}{\exists X \varphi} \qquad \frac{\varphi}{\forall X \varphi}$$

L_{II}^S Menge der S-Ausdrücke der 2. Stufe

Abkürzungen wie früher:

$$(\varphi \to \psi) \quad \text{für} \quad (\neg\varphi \vee \psi)$$
$$(\varphi \leftrightarrow \psi) \quad \text{für} \quad (\neg(\varphi \vee \psi) \vee \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi))$$

$S := \{s, 0\}$ $X := V_1^1$

$S := \{s, 0\}$ $\qquad$ $X := V_1^1$

(P3): $\forall X((X0 \wedge \forall y(Xy \rightarrow Xs(y))) \rightarrow \forall z Xz)$

$S := \{s, 0\}$ $\qquad X := V_1^1$

(P3): $\forall X((X0 \land \forall y(Xy \to Xs(y))) \to \forall z Xz)$

$Xs(s(0))$

$S := \{s, 0\}$ $\qquad\qquad X := V_1^1$

(P3): $\forall X((X0 \land \forall y(Xy \to Xs(y))) \to \forall z Xz)$

$Xs(s(0))$

Xy

SEMANTIK:

SEMANTIK: Eine S-Interpretation der 2. Stufe

$$\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \gamma)$$

besteht aus einer S-Struktur $\mathfrak{A}$ und einer Belegung zweiter Stufe γ.

SEMANTIK: Eine S-Interpretation der 2. Stufe

$$\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \gamma)$$

besteht aus einer S-Struktur $\mathfrak{A}$ und einer Belegung zweiter Stufe γ.

Eine Belegung zweiter Stufe γ in der Struktur $\mathfrak{A}$ ist auf der Menge aller (Individuen-)Variablen und aller Relationsvariablen definiert und ordnet zu:

$$\begin{aligned} x \mapsto \gamma(x) \quad &\text{mit} \quad \gamma(x) \in A \\ X^n \mapsto \gamma(X^n) \quad &\text{mit} \quad \gamma(X^n) \subseteq A^n. \end{aligned}$$

SEMANTIK: Eine S-Interpretation der 2. Stufe

$$\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \gamma)$$

besteht aus einer S-Struktur $\mathfrak{A}$ und einer Belegung zweiter Stufe γ.

Eine Belegung zweiter Stufe γ in der Struktur $\mathfrak{A}$ ist auf der Menge aller (Individuen-)Variablen und aller Relationsvariablen definiert und ordnet zu:

$$\begin{aligned} x \mapsto \gamma(x) \quad & \text{mit} \quad \gamma(x) \in A \\ X^n \mapsto \gamma(X^n) \quad & \text{mit} \quad \gamma(X^n) \subseteq A^n. \end{aligned}$$

Für $t \in T^S$ wird $\mathfrak{I}(t)$ mit $\mathfrak{I}(t) \in A$ durch Induktion über den Termkalkül wie früher definiert.

Modellbeziehung.

Modellbeziehung. Für $\varphi \in L_{\mathrm{II}}^{S}$ und $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \gamma)$ wird $\mathfrak{I} \models \varphi$ ($\mathfrak{I}$ ist ein Modell von φ) durch Induktion über den Ausdruckskalkül wie früher definiert mit den zusätzlichen Festlegungen:

Modellbeziehung. Für $\varphi \in L_{\mathrm{II}}^S$ und $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \gamma)$ wird $\mathfrak{I} \models \varphi$ ($\mathfrak{I}$ ist ein Modell von φ) durch Induktion über den Ausdruckskalkül wie früher definiert mit den zusätzlichen Festlegungen:

$$\mathfrak{I} \models X^n t_1 \dots t_n \quad \iff \quad \gamma(X^n)\mathfrak{I}(t_1)\dots\mathfrak{I}(t_n);$$

Modellbeziehung. Für $\varphi \in L_{\mathrm{II}}^S$ und $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \gamma)$ wird $\mathfrak{I} \models \varphi$ ($\mathfrak{I}$ ist ein Modell von φ) durch Induktion über den Ausdruckskalkül wie früher definiert mit den zusätzlichen Festlegungen:

$$\mathfrak{I} \models X^n t_1 \ldots t_n \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma(X^n)\mathfrak{I}(t_1)\ldots\mathfrak{I}(t_n);$$

$$\mathfrak{I} \models \exists X^n \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \text{ex. } n\text{-stellige Relation } \mathcal{R} \text{ auf } A\text{:} \;\; \mathfrak{I}\frac{\mathcal{R}}{X^n} \models \varphi.$$

$$\mathfrak{I} \models \forall X^n \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \text{für alle } \; n\text{-stellige Relationen } \mathcal{R} \text{ auf } A\text{:} \;\; \mathfrak{I}\frac{\mathcal{R}}{X^n} \models \varphi.$$

Für $\varphi \in L^S_{\mathrm{II}}$ sei $\mathrm{fr}(\varphi)$ die Menge der in φ frei vorkommenden (Individuen-)Variable und Relationsvariable.

Für $\varphi \in L_{\mathrm{II}}^{S}$ sei $\mathrm{fr}(\varphi)$ die Menge der in φ frei vorkommenden (Individuen-)Variable und Relationsvariable.

φ ist ein Satz: $\quad \mathrm{fr}(\varphi) = \emptyset$.

Für $\varphi \in L_{\mathrm{II}}^{S}$ sei $\mathrm{fr}(\varphi)$ die Menge der in φ frei vorkommenden (Individuen-)Variable und Relationsvariable.

φ ist ein Satz: $\qquad \mathrm{fr}(\varphi) = \emptyset$.

Es gilt das Analogon des Koinzidenzlemmas, insbesondere:

Für $\varphi \in L_{\mathrm{II}}^{S}$ sei $\mathrm{fr}(\varphi)$ die Menge der in φ frei vorkommenden (Individuen-)Variable und Relationsvariable.

φ ist ein Satz: $\quad \mathrm{fr}(\varphi) = \emptyset$.

Es gilt das Analogon des Koinzidenzlemmas, insbesondere:

$$\text{wenn } \gamma_1 \upharpoonright \mathrm{fr}(\varphi) = \gamma_2 \upharpoonright \mathrm{fr}(\varphi), \text{ so} \qquad (\mathfrak{A}, \gamma_1) \models \varphi \iff (\mathfrak{A}, \gamma_2) \models \varphi$$

Für $\varphi \in L_{\mathrm{II}}^{S}$ sei $\mathrm{fr}(\varphi)$ die Menge der in φ frei vorkommenden (Individuen-)Variable und Relationsvariable.

φ ist ein Satz: $\quad \mathrm{fr}(\varphi) = \emptyset$.

Es gilt das Analogon des Koinzidenzlemmas, insbesondere:

$$\text{wenn } \gamma_1 \restriction \mathrm{fr}(\varphi) = \gamma_2 \restriction \mathrm{fr}(\varphi), \text{ so} \qquad (\mathfrak{A}, \gamma_1) \models \varphi \iff (\mathfrak{A}, \gamma_2) \models \varphi$$

Für einen Satz $\varphi \in L_{\mathrm{II}}^{S}$ ist daher $\mathfrak{A} \models \varphi$ sinnvoll.

Für $\varphi \in L_{\mathrm{II}}^{S}$ sei $\mathrm{fr}(\varphi)$ die Menge der in φ frei vorkommenden (Individuen-)Variable und Relationsvariable.

φ ist ein Satz: $\quad \mathrm{fr}(\varphi) = \emptyset$.

Es gilt das Analogon des Koinzidenzlemmas, insbesondere:

$$\text{wenn } \gamma_1 \restriction \mathrm{fr}(\varphi) = \gamma_2 \restriction \mathrm{fr}(\varphi), \text{ so} \qquad (\mathfrak{A}, \gamma_1) \models \varphi \iff (\mathfrak{A}, \gamma_2) \models \varphi$$

Für einen Satz $\varphi \in L_{\mathrm{II}}^{S}$ ist daher $\mathfrak{A} \models \varphi$ sinnvoll.

Es gilt das Analogon des Isomorphielemmas, insbesondere:

Für $\varphi \in L_{\mathrm{II}}^{S}$ sei fr(φ) die Menge der in φ frei vorkommenden (Individuen-)Variable und Relationsvariable.

φ ist ein Satz: $\quad \mathrm{fr}(\varphi) = \emptyset$.

Es gilt das Analogon des Koinzidenzlemmas, insbesondere:

$$\text{wenn } \gamma_1 \restriction \mathrm{fr}(\varphi) = \gamma_2 \restriction \mathrm{fr}(\varphi), \text{ so} \qquad (\mathfrak{A}, \gamma_1) \models \varphi \iff (\mathfrak{A}, \gamma_2) \models \varphi$$

Für einen Satz $\varphi \in L_{\mathrm{II}}^{S}$ ist daher $\mathfrak{A} \models \varphi$ sinnvoll.

Es gilt das Analogon des Isomorphielemmas, insbesondere:

$$\text{Ist } \varphi \in L_{\mathrm{II}}^{S} \text{ ein Satz, } \mathfrak{A} \models \varphi \text{ und } \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}, \text{ so } \mathfrak{B} \models \varphi.$$

$$\overbrace{\exists X_1 \exists X_2 \exists X_3}^{\text{“}X_i\text{ Menge der Elemente der Farbe }i\text{.”}} \quad \Big(\overbrace{\forall x \big(\bigvee_{i \in [3]} X_i x \wedge \bigwedge_{1 \le i < j \le 3} \neg (X_i x \wedge X_j x) \big)}^{\text{“Jedes Element hat genau eine Farbe.”}}$$

$$\wedge \quad \underbrace{\forall x \forall y \bigwedge_{i \in [3]} \big(Exy \to \neg (X_i x \wedge X_i y) \big)}_{\text{“Benachbarte Elemente sind verschieden gefärbt.”}} \quad \Big).$$

$$\overbrace{\exists X_1 \exists X_2 \exists X_3}^{\text{“}X_i\text{ Menge der Elemente der Farbe }i\text{.”}} \Big(\overbrace{\forall x \big(\bigvee_{i \in [3]} X_i x \wedge \bigwedge_{1 \leq i < j \leq 3} \neg (X_i x \wedge X_j x) \big)}^{\text{“Jedes Element hat genau eine Farbe.”}}$$

$$\wedge \underbrace{\forall x \forall y \bigwedge_{i \in [3]} \big(Exy \rightarrow \neg (X_i x \wedge X_i y) \big)}_{\text{“Benachbarte Elemente sind verschieden gefärbt.”}} \Big).$$

$$\varphi_{\text{unendl}} := \exists X (\text{“}X\text{ ist der Graph einer injektiven und nicht surjektiven Funktion”})$$

$$:= \exists X \Big(\underbrace{\forall x \exists^{=1} y Xxy}_{\text{“}X\text{ ist der Graph einer Funktion”}} \wedge \underbrace{\forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2 ((Xx_1y_1 \wedge Xx_2y_2 \wedge y_1 = y_2) \rightarrow x_1 = x_2)}_{X\text{ ist injektiv}}$$

$$\wedge \underbrace{\exists y \forall x \neg Xxy}_{X\text{ ist nicht surjektiv}} \Big)$$

Satz von Fagin. Sei S endlich und K eine isomorphieabgeschlossene Klasse von endlichen S-Strukturen. Dann sind äquivalent:

1. K ist in NP.
2. K ist Σ^1_1-axiomatisierbar, d.h. es gibt einen Σ^1_1-Satz φ zur Symbolmenge S mit

$$K = \mathrm{Mod}(\varphi).$$

Satz von Fagin. Sei S endlich und K eine isomorphieabgeschlossene Klasse von endlichen S-Strukturen. Dann sind äquivalent:

1. K ist in NP.
2. K ist Σ_1^1-axiomatisierbar, d.h. es gibt einen Σ_1^1-Satz φ zur Symbolmenge S mit

$$K = \mathrm{Mod}(\varphi).$$

Σ endliches Alphabet.

$S(\Sigma) = \{\leq\} \cup \{\underset{1}{P_a} \mid a \in \Sigma\}.$

Satz von Fagin. Sei S endlich und K eine isomorphieabgeschlossene Klasse von endlichen S-Strukturen. Dann sind äquivalent:

1. K ist in NP.
2. K ist Σ_1^1-axiomatisierbar, d.h. es gibt einen Σ_1^1-Satz φ zur Symbolmenge S mit

$$K = \mathrm{Mod}(\varphi).$$

Σ endliches Alphabet.

$S(\Sigma) = \{\leq\} \cup \{\underset{1}{P_a} \mid a \in \Sigma\}$.

Für $w \in \Sigma^* \setminus \{\lambda\})$ sei die Wortstruktur $\mathfrak{B}(w)$ zu w gegeben durch

$$\mathfrak{B}(w) := (\{1, \ldots, |w|\}, \leq, (P_a^w)_{a\in\Sigma}),$$

Satz von Fagin. Sei S endlich und K eine isomorphieabgeschlossene Klasse von endlichen S-Strukturen. Dann sind äquivalent:

1. K ist in NP.
2. K ist Σ_1^1-axiomatisierbar, d.h. es gibt einen Σ_1^1-Satz φ zur Symbolmenge S mit

$$K = \mathrm{Mod}(\varphi).$$

Σ endliches Alphabet.

$S(\Sigma) = \{\leq\} \cup \{\underset{1}{P_a} \mid a \in \Sigma\}$.

Für $w \in \Sigma^* \setminus \{\lambda\})$ sei die Wortstruktur $\mathfrak{B}(w)$ zu w gegeben durch

$$\mathfrak{B}(w) := (\{1, \ldots, |w|\}, \leq, (P_a^w)_{a \in \Sigma}),$$

wobei für $w = a_1 \ldots a_n$

$$P_a^w i \iff a_i = a.$$

Satz (Automatenakzeptierbar = MSO-definierbar).

Für $L \subseteq \Sigma^+$ sind äquivalent:

Satz (Automatenakzeptierbar = MSO-definierbar).

Für $L \subseteq \Sigma^+$ sind äquivalent:

(1) Es gibt DFA $\mathbb{A}$ mit $L = L(\mathbb{A})$.

(2) Es gibt $\mathrm{MSO}^{S(\Sigma)}$-Satz φ mit $L(\varphi) := \{w \in \Sigma^+ \mid \mathfrak{B}(w) \models \varphi\} = L$.

Satz (Automatenakzeptierbar = MSO-definierbar).

Für $L \subseteq \Sigma^+$ sind äquivalent:

(1) Es gibt DFA $\mathbb{A}$ mit $\quad L = L(\mathbb{A})$.

(2) Es gibt $\mathrm{MSO}^{S(\Sigma)}$-Satz φ mit $\quad L(\varphi) := \{w \in \Sigma^+ \mid \mathfrak{B}(w) \models \varphi\} = L$.

Es gilt sogar:

(a) Jedem Automaten $\mathbb{A}$ läßt sich effektiv ein $\mathrm{MSO}^{S(\Sigma)}$-Satz φ zuordnen mit

$$L(\mathbb{A}) = L(\varphi).$$

(b) Jedem $\mathrm{MSO}^{S(\Sigma)}$-Satz φ läßt sich effektiv ein Automat $\mathbb{A}$ zuordnen mit

$$L(\mathbb{A}) = L(\varphi).$$

$$\varphi_{part} = \text{“}X_1, \dots, X_m \text{ bilden eine Partition”}$$

$$\varphi_{part} = \forall x\big((X_1 x \vee X_2 x) \wedge \neg(X_1 x \wedge X_2 x)\big)$$

$$\varphi_{anf} = \text{“Der Anfangszustand stimmt”}$$

$$\varphi_{anf} = \forall x\big(\forall y\; x \leq y \rightarrow X_1 x\big),$$

$$\varphi_{trans} = \text{“Die Übergange sind korrekt”}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{trans} = \forall x \forall y \Big(\big(x \leq y \wedge \neg x = y \wedge \forall z(z \leq x \vee y \leq z)\big) \rightarrow \\
\big(\,(X_1 x \wedge P_a x \wedge X_2 y) \vee (X_1 x \wedge P_b x \wedge X_1 y) \vee (X_1 x \wedge P_c x \wedge X_1 y) \\
\vee (X_2 x \wedge P_a x \wedge X_2 y) \vee (X_2 x \wedge P_b x \wedge X_1 y) \vee (X_2 x \wedge P_c x \wedge X_2 y)\big)\Big),
\end{aligned}$$

$$\varphi_{akz} = \text{“Der Input wird akzeptiert”}$$

$$\varphi_{akz} = \forall x\Big(\forall z\; z \leq x \rightarrow \big((X_1 x \wedge P_b x) \vee (X_1 x \wedge P_c x) \vee (X_2 x \wedge P_b x)\big)\Big).$$

Ein nichtdeterministischer Automat, kurz NFA, über dem Alphabet Σ ist ein 4-Tupel $\mathbb{A} = (Z, z_0, F, \delta)$ mit

- Z ist eine endliche Menge, die Zustandsmenge;
- $z_0 \in Z$, der Startzustand;
- $F \subseteq Z$, die Menge der akzeptierenden Zustände;
- $\delta \subseteq Z \times \Sigma \times Z$, die Übergangsrelation.

$$(z, a, z') \in \delta$$

Ein nichtdeterministischer Automat, kurz NFA, über dem Alphabet Σ ist ein 4-Tupel $\mathbb{A} = (Z, z_0, F, \delta)$ mit

- Z ist eine endliche Menge, die Zustandsmenge;
- $z_0 \in Z$, der Startzustand;
- $F \subseteq Z$, die Menge der akzeptierenden Zustände;
- $\delta \subseteq Z \times \Sigma \times Z$, die Übergangsrelation.

$$(z, a, z') \in \delta$$

"Ist $\mathbb{A}$ im Zustand z und liest a, so kann $\mathbb{A}$ in Zustand z' übergehen."

Ein nichtdeterministischer Automat, kurz NFA, über dem Alphabet Σ ist ein 4-Tupel $\mathbb{A} = (Z, z_0, F, \delta)$ mit

- Z ist eine endliche Menge, die Zustandsmenge;
- $z_0 \in Z$, der Startzustand;
- $F \subseteq Z$, die Menge der akzeptierenden Zustände;
- $\delta \subseteq Z \times \Sigma \times Z$, die Übergangsrelation.

$$(z, a, z') \in \delta$$

"Ist $\mathbb{A}$ im Zustand z und liest a, so kann $\mathbb{A}$ in Zustand z' übergehen."

$\mathbb{A}$ akzeptiert w: Es gibt mind. eine Berechnung von $\mathbb{A}$ mit Input w die in F endet.

Ein nichtdeterministischer Automat, kurz NFA, über dem Alphabet Σ ist ein 4-Tupel $\mathbb{A} = (Z, z_0, F, \delta)$ mit

- Z ist eine endliche Menge, die Zustandsmenge;
- $z_0 \in Z$, der Startzustand;
- $F \subseteq Z$, die Menge der akzeptierenden Zustände;
- $\delta \subseteq Z \times \Sigma \times Z$, die Übergangsrelation.

$$(z, a, z') \in \delta$$

"Ist $\mathbb{A}$ im Zustand z und liest a, so kann $\mathbb{A}$ in Zustand z' übergehen."

$\mathbb{A}$ akzeptiert w: Es gibt mind. eine Berechnung von $\mathbb{A}$ mit Input w die in F endet.

$$L(\mathbb{A}) = \{w \in \Sigma^+ \mid \mathbb{A} \text{ akzeptiert } w\}.$$

Ein nichtdeterministischer Automat, kurz NFA, über dem Alphabet Σ ist ein 4-Tupel $\mathbb{A} = (Z, z_0, F, \delta)$ mit

- Z ist eine endliche Menge, die Zustandsmenge;
- $z_0 \in Z$, der Startzustand;
- $F \subseteq Z$, die Menge der akzeptierenden Zustände;
- $\delta \subseteq Z \times \Sigma \times Z$, die Übergangsrelation.

$$(z, a, z') \in \delta$$

"Ist $\mathbb{A}$ im Zustand z und liest a, so kann $\mathbb{A}$ in Zustand z' übergehen."

$\mathbb{A}$ akzeptiert w: Es gibt mind. eine Berechnung von $\mathbb{A}$ mit Input w die in F endet.

$$L(\mathbb{A}) = \{w \in \Sigma^+ \mid \mathbb{A} \text{ akzeptiert } w\}.$$

Satz. Zu jedem NFA $\mathbb{A}$ über Σ gibt es einen DFA $\mathbb{A}'$ über Σ mit

$$L(\mathbb{A}) = L(\mathbb{A}').$$

Singl(X) sei Abkürzung für

$$\exists y(Xy \land \forall z(Xz \rightarrow z = y))$$

Singl(X) sei Abkürzung für

$$\exists y(Xy \land \forall z(Xz \rightarrow z = y))$$

Kle(X, Y) sei Abkürzung für

$$\forall x \forall y((Xx \land Yy) \rightarrow x \leq y)$$

$\mathrm{Singl}(X)$ sei Abkürzung für

$$\exists y(Xy \wedge \forall z(Xz \rightarrow z = y))$$

$\mathrm{Kle}(X, Y)$ sei Abkürzung für

$$\forall x \forall y((Xx \wedge Yy) \rightarrow x \leq y)$$

$\mathrm{Symb}_a(X)$ sei Abkürzung für

$$\forall x(Xx \rightarrow P_a x)$$

$\text{Singl}(X)$ sei Abkürzung für

$$\exists y(Xy \land \forall z(Xz \to z = y))$$

$\text{Kle}(X, Y)$ sei Abkürzung für

$$\forall x \forall y((Xx \land Yy) \to x \leq y)$$

$\text{Symb}_a(X)$ sei Abkürzung für

$$\forall x(Xx \to P_a x)$$

$\text{Teil}(X, Y)$ sei Abkürzung für

$$\forall z(Xz \to Yz)$$