Prof. Dr. Sebastian Goette
Dr. Martin Kalck
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Funktionentheorie SS 2019
24. April, 2019

Übungsblatt 1

Abgabe: Mittwoch, den 01.05.2019
in die Briefkästen der Tutoren.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.

Bewertung: Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Falls nichts anderes angegeben ist, werden die Punkte gleichmässig auf die Teilaufgaben verteilt.

Aufgabe 1

(a) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $e^z = 1$.

(b) Es seien $\alpha, \omega \in \mathbb{C}$ mit $e^\alpha = \omega$. Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $e^z = \omega$.

Aufgabe 2

Es sei $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius ρ. Bestimmen Sie die Konvergenzradien folgender Potenzreihen

(a) $\sum_{n\geq 0} a_n z^{2n}$,

(b) $\sum_{n\geq 0} a_n^2 z^n$.

Aufgabe 3

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Drücken Sie $\cos(\alpha+\beta)$ und $\sin(\alpha+\beta)$ jeweils als Funktion von $\cos(\alpha)$, $\cos(\beta)$, $\sin(\alpha)$ und $\sin(\beta)$ aus.
Hinweis: Sie dürfen die Identität $e^{z+w} = e^z e^w$ für komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ benutzen.

Aufgabe 4

(a) Sei $z = re^{i\varphi}$ mit $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\varphi \in (-\pi, \pi]$ eine komplexe Zahl. Finden Sie alle komplexen Zahlen $w \in \mathbb{C}$ mit $w^2 = z$.

(b) Sei $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ eine komplexe Zahl. Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen $w \in \mathbb{C}$ mit $w^2 = z$. Schreiben Sie w jeweils in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Bitte wenden für die Präsenzaufgaben für die Tutorate am 29. bzw. 30. April 2019.

Prof. Dr. Sebastian Goette
Dr. Martin Kalck
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Funktionentheorie SS 2019
24. April, 2019

Präsenzaufgaben

Keine Abgabe, Besprechung 29. bzw. 30. April 2019.

Aufgabe 1

Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Gausschen Zahlenebene dar. Finden Sie also jeweils die Darstellung $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

$$(1+i)(1-i), \quad (1+i)^{-1}, \quad \frac{2+i}{2-i}, \quad e^{-i\pi}, \quad e^{5-i\pi/3}, \quad (1+i)^{2019}.$$

Aufgabe 2

Geben Sie eine geometrische Beschreibung der folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$:

$$|z-i+3| = 5, \quad |z-i+3| \leq 5, \quad |z-i+3| > 5, \quad \operatorname{Im} z > 0, \quad \operatorname{Re} z \leq 0.$$

Aufgabe 3

Es sei $n \in \mathbb{N}_0$. Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^n = 1$.

Aufgabe 4

Es sei

$$f(w) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{w^n}{n}$$

Zeigen Sie:

(a) Falls $w = x$ mit $x \in (-1, 1) \subset \mathbb{R}$, dann konvergiert die Potenzreihe auf der rechten Seite gegen $\log(1 + x)$.

(b) Falls $|w| < 1$, dann ist die Potenzreihe absolut konvergent.

Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - 1| < 1$ sei

$$\log z = f(z-1).$$

(c) Zeigen Sie, dass $\exp \log z = z$ gilt.

Bitte wenden für die Hausaufgaben.