Prof. Dr. Sebastian Goette
Dr. Martin Kalck
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Funktionentheorie SS 2019
01. Mai, 2019

Übungsblatt 2

Abgabe: Mittwoch, den 08.05.2019
in die Briefkästen der Tutoren.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.

Bewertung: Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Falls nichts anderes angegeben ist, werden die Punkte gleichmässig auf die Teilaufgaben verteilt.

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Wirtinger-Ableitungen $\frac{\partial}{\partial z}$ und $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ folgender Funktionen:

$$(a)\, z^3\bar{z}, \quad (b)\, \frac{1}{|z|^4}, \quad (c)\, \mathrm{Im}(z), \quad (d)\, e^{\bar{z}}.$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie die reellen partiellen Ableitungen vom Real- und Imaginärteil der folgenden Funktionen. An welchen Punkten $z \in \mathbb{C}$ sind die Cauchy–Riemann-Differentialgleichungen erfüllt?

$$(a)\, \bar{z}, \quad (b)\, |z|^2, \quad (c)\, \sin(\mathrm{Re}(z)), \quad (d)\, \cos(z),$$

wobei $\cos(z) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ für $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 3

(a) Zeigen Sie, die folgenden Aussagen:
  (i) Die Verkettung zweier holomorpher Funktionen ist wieder holomorph.
  (ii) Die Verkettung zweier antiholomorpher[1] Funktionen ist holomorph.
  (iii) Die Verkettung einer holomorphen Funktion mit einer antiholomorphen Funktion ist antiholomorph.

(b) Leiten Sie die Kettenregel für holomorphe Funktionen (Proposition 1.15 (2) im Skript) aus der Kettenregel aus Analysis II ab.

Bitte wenden für Aufgabe 4.

[1] Sei Ω ein Gebiet. Eine Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ heisst *antiholomorph* in $p \in \Omega$, falls f in p reell total differenzierbar ist und die Ableitung $df|_p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\mathbb{C}$-antilinear ist.

Aufgabe 4

Sei Ω ein Gebiet und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine reell total differenzierbare Funktion. Beweisen Sie oder widerlegen Sie die folgende Aussage:

Wenn f in allen Punkten $z \in \Omega$ zugleich holomorph und antiholomorph ist, dann ist f konstant.